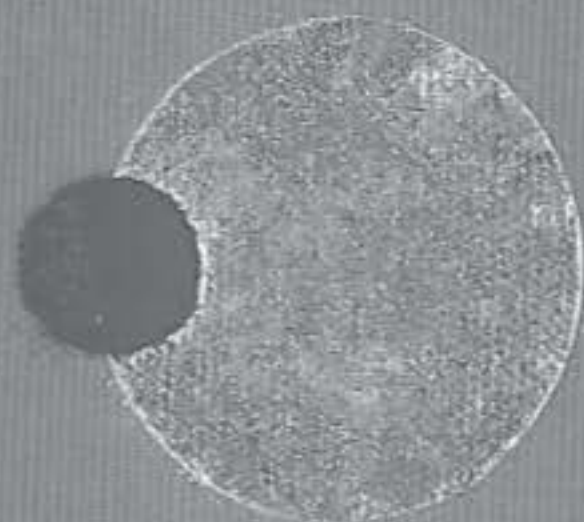


LIVRU
SOLOMON

ELASTICITATE LINIARA

INTRODUCERE
MATEMATICĂ
ÎN STATICA
SOLIDULUI
ELASTIC



ELASTICITATE LINIARĂ
INTRODUCERE MATEMATICĂ ÎN
STATICA SOLIDULUI ELASTIC

LIVIU SOLOMON

ELASTICITATE LINIARĂ

INTRODUCERE MATEMATICĂ ÎN
STATICA SOLIDULUI ELASTIC

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA
BUCUREȘTI 1969

TABLA DE MATERII

	<u>Pag.</u>
PREFAȚĂ	17
INTRODUCERE	21
§ 1. <i>Generalități</i>	21
§ 2. <i>Experiențele de întindere-compresiune</i>	22
a) Descrierea experienței	22
b) Curbe caracteristice	23
c) Tipuri și proprietăți diferite ale materialelor	25
§ 3. <i>Solicitarea mediului continuu deformabil</i>	26
§ 4. <i>Modelul corpului elastic</i>	28
a) Ipoteze fundamentale	28
b) Ipoteze simplificatoare	31
CAPITOLUL 1. <i>Starea de deplasare și starea de deformare a mediului continuu</i>	33
§ 1. <i>Teoria geometrică a mediului continuu</i>	33
a) Notatii	33
b) Continuitatea funcțiilor	35
c) Medii continue	36
d) Deplasări și deformări	36
§ 2. <i>Starea de deplasare</i>	37
a) Sisteme de coordonate	37
b) Vectorul deplasare	37
c) Transformarea componentelor vectorilor	38
§ 3. <i>Deformația omogenă</i>	39
§ 4. <i>Deformația pură infinitesimală și deplasarea rigidă infinitesimală</i>	40
a) Deplasarea rigidă	40
b) Variația distanțelor	41
c) Matricea deformație	42
d) Alungiri și alunecări	43
§ 5. <i>Teoria generală a deformației infinitesimale. Ecuațiile geometrice</i>	44
§ 6. <i>Tensorul deformație</i>	46
§ 7. <i>Direcțiile principale ale deformației</i>	48
§ 8. <i>Cuadricele deformației. Invarianți</i>	51
a) Cuadricele deformației	51
b) Stări particulare de deformație	53
c) Invarianți	54

	<u>Pag.</u>
§ 9. <i>Ecuatiile de compatibilitate</i>	55
§ 10. <i>Deformații neliniare</i>	58
CAPITOLUL 2. <i>Starea de tensiune a mediului continuu</i>	63
§ 1. <i>Forțe exterioare</i>	63
a) Forțe de volum și forțe superficiale	63
b) Forțe concentrate	64
§ 2. <i>Forțe interioare. Tensiuni</i>	65
a) Vectorul tensiune	65
b) Proprietățile vectorului tensiune	66
§ 3. <i>Starea de tensiune în vecinătatea unui punct. Componentele tensiunii</i>	68
a) Matricea tensiune	68
b) Relațiile lui Cauchy	69
§ 4. <i>Ecuatiile de echilibru</i>	70
a) Asupra ecuațiilor statice ale teoriei liniare.	70
b) Ecuatiile lui Cauchy	71
c) Teorema de reciprocitate.	73
§ 5. <i>Tensorul tensiune. Proprietăți</i>	74
a) Tensorul tensiune	74
b) Vectorul tensiune	75
c) Direcții principale	75
d) Cuadricele tensiunii	76
e) Invarianti	78
§ 6. <i>Tensiunile tangențiale maximale</i>	78
CAPITOLUL 3. <i>Legătura dintre starea de tensiune și starea de deformare</i>	81
§ 1. <i>Despre ideea de lege fizică pentru corpurile elastice</i>	81
§ 2. <i>Legea lui Hooke</i>	82
a) Legi liniare	82
b) Legea lui Hooke	83
c) Tensorul lui Hooke	84
§ 3. <i>Cazuri particulare ale legii lui Hooke</i>	85
a) Anizotropie	85
b) Un plan de simetrie elastică	85
c) Ortotropie. Trei plane de simetrie triortogonale	86
d) Izotropie	87
§ 4. <i>Constantele elastice ale teoriei liniare pentru corpuri omogene și izotrope</i>	89
a) Modulul lui Young; coeficientul lui Poisson	89
b) Constanta lui Coulomb	91
c) Modulul de compresiune hidrostatică	92
d) Legea lui Hooke rezolvată în raport cu deformațiile	93
e) Tensori sferici și deviatori	93
f) Concluzii	94

	<u>Pag.</u>
§ 5. <i>Noțiuni de termodinamica deformației</i>	95
a) Formularea problemei	95
b) Noțiuni fundamentale	97
c) Principiile termodinamicii	100
d) Indicații bibliografice	103
e) Exemplul experienței de tracțiune și compresiune	103
§ 6. <i>Potențialul elastic</i>	107
a) Lucrul mecanic de deformație	107
b) Energia elastică.	109
c) Corpuri elastice și corpuri hiperelastice	111
d) Notă istorică	113
§ 7. <i>Corpuri hiperelastice</i>	113
a) Formulele lui Green	113
b) Constantele elastice	114
c) Teoria liniară. Formulele lui Castigliano	116
d) Potențialul elastic al corpurilor izotrope	117
CAPITOLUL 4. <i>Sistemul complet de ecuații al teoriei elasticității liniare</i> . . .	120
§ 1. <i>Ecuațiile teoriei elasticității</i>	120
a) Ecuațiile elasto-staticii liniare	120
b) Alte tipuri de corpuri și probleme	123
§ 2. <i>Puncte de vedere. Metode de studiu. Probleme fundamentale</i>	126
a) Puncte de vedere asupra studiului sistemului de ecuații ale elasto-staticii	126
b) Metoda directă. Probleme fundamentale	127
c) Liniaritate. Superpoziția efectelor	129
d) Regularitatea soluțiilor	129
e) Metode experimentale și altele	130
§ 3. <i>Criterii de rezistență</i>	131
§ 4. <i>Despre teoremele de existență</i>	134
§ 5. <i>Teorema de unicitate</i>	136
§ 6. <i>Puncte de vedere simplificatoare</i>	139
a) Metoda semînvîrsă	139
b) Principiul lui Saint-Venant	140
§ 7. <i>Ecuațiile variaționale ale elasto-staticii</i>	142
a) Ecuația variațională a lui Reissner	143
b) Principiul de minimum pentru deplasări	147
c) Principiul de maximum pentru tensiuni	148
d) Concluzii	149
§ 8. <i>Sistemul ecuațiilor în deplasări</i>	150
a) Corpuri neomogene și anizotrope	150
b) Sistemul ecuațiilor lui Lamé pentru corpuri omogene și izotrope. . .	151
§ 9. <i>Sistemul ecuațiilor în tensiuni pentru corpuri omogene și izotrope</i>	152

	<u>Pag.</u>
§ 10. <i>Proprietăți generale ale soluțiilor</i>	153
a) Reducerea la ecuații omogene	153
b) Biharmonicitatea componentelor stării elastice	155
c) Potențiali	156
§ 11. <i>Ecuațiile micilor mișcări ale corpurilor elastice</i>	157
§ 12. <i>Structura ecuațiilor elasto-staticii și elasto-dinamicii pentru corpuri omogene și izotrope</i>	159
a) Clasificarea sistemelor de ecuații. Unde	159
b) Ecuațiile lui Lamé dinamice și statice	161
c) Indicații bibliografice	163
CAPITOLUL 5. Problema antiplană	165
§ 1. <i>Generalități</i>	165
§ 2. <i>Forma și sollicitarea barei cilindrice zvelte</i>	167
a) Notății	167
b) Sarcina	167
c) Stări de deformare ale barei	169
§ 3. <i>Ecuațiile problemei antiplane</i>	172
a) Ecuații și ipoteze de lucru	172
b) Descompunerea sistemului de ecuații	173
§ 4. <i>Forma ecuațiilor problemei antiplane în variabile complexe conjugate</i>	177
a) Ecuațiile problemei	177
b) Comportarea secțiunilor	180
§ 5. <i>Bara cilindrică acționată pe baze de sarcini normale</i>	182
§ 6. <i>Analiza stării elastice a barei acționate pe baze de sarcini normale.</i>	184
a) Comportarea secțiunilor	184
b) Sarcină static echivalentă cu o forță unică \mathcal{Q}_3	185
c) Sarcină static echivalentă cu un cuplu de moment M	185
d) Elemente geometrice esențiale. Rigidități la încovoiere	186
e) Încovoiere dreaptă și încovoiere oblică	191
f) Aplicarea principiului lui Saint-Venant	195
§ 7. <i>Bara acționată pe baze de sarcini normale. Exemple</i>	195
a) Cornier.	195
b) Dreptunghi	196
c) Rolul variației raportului $\eta = l_1/l_2$	197
d) Încovoierea oblică a barei de secțiune dreptunghiulară	198
§ 8. <i>Bara acționată pe baza $x_3 = l$ de sarcini tangențiale</i>	199
a) Ecuațiile în tensiuni.	199
b) Ecuațiile fizico-geometrice	202
§ 9. <i>Analiza stării elastice a barei acționate pe baza $x_3 = l$ de sarcini tangențiale.</i>	204
a) Comportarea secțiunilor	204
b) Elemente geometrice esențiale	205
§ 10. <i>Observații asupra soluției problemei antiplane</i>	209
a) Aplicarea principiului lui Saint-Venant	209
b) Criterii de rezistență	212

	Pag.
§ 11. <i>Funcția lui Capildeo și Milne-Thomson</i>	214
a) Probleme la limită	214
b) Gradul de arbitrar	216
c) Natura funcției $\varphi(\zeta)$	217
d) Schimbări de axe	218
§ 12. <i>Funcția lui Prandtl și Timoshenko. Teorema lui Bredt și Leibenzon</i>	221
a) Funcția lui Prandtl și Timoshenko	221
b) Teorema lui Bredt și Leibenzon	223
§ 13. <i>Problema torsiunii pure. Funcțiile lui Saint-Venant</i>	225
a) Funcții de torsiune	225
b) Probleme la limită	226
c) Rigiditatea geometrică la torsiune	228
d) Câmpul deplasărilor	230
e) Notă istorică	232
§ 14. <i>Funcția lui Prandtl și constantele lui Prandtl</i>	234
a) Funcția lui Prandtl	234
b) Constantele lui Prandtl și rigiditatea geometrică la torsiune	235
c) Imagine geometrică	237
d) Proprietăți extreme	238
§ 15. <i>Problema torsiunii. Exemple</i>	238
a) Cerc, Coroană circulară	239
b) Elipsă	240
c) Triunghi echilateral	243
d) Lunulă circulară. Concentrarea tensiunilor	245
e) Dreptunghi	248
f) Semicoroană circulară. Concentrarea tensiunilor	253
g) Tabel comparativ	260
§ 16. <i>Analogii mecanice ale problemei torsiunii. Exemple</i>	261
a) Analogia lui Lord Kelvin și P. Tait	261
b) Analogia lui J. Boussinesq	262
c) Analogia membranei elastice (L. Prandtl)	262
d) Fisură rectilinie în lungul razei unei secțiuni circulare	266
e) Secțiune dreptunghiulară îngustă	269
f) Bare cu pereți subțiri	270
g) Secțiuni compuse	272
h) Coroană circulară excentrică	272
i) Secțiuni multiplu conexe cu pereți subțiri	273
j) Secțiuni simplu conexe și multiplu conexe	274
§ 17. <i>Problema torsiunii pentru bare de secțiune simplu conexă. Metoda reprezentării conforme</i>	278
a) Metoda $\zeta \bar{\zeta}$	281
b) Metoda seriilor	281
c) Metoda integralelor de tip Cauchy	283
§ 18. <i>Problema torsiunii pentru bare de secțiuni simplu conexe și dublu conexe. Exemple</i>	284
a) Elipsă	285
b) Cardioidă	285
c) Lemniscata lui Bernoulli	287
d) Coroana eliptică. Concentrarea tensiunilor	291
e) Coroana circulară excentrică	294

	<u>Faz.</u>
f) Domenii reprezentabile conform pe discul unitate prin intermediul unor funcții polinomiale. (Soluții aproximative)	299
g) Alte metode și tipuri de probleme	301
§ 19. <i>Încovoierea în consolă</i>	303
a) Încovoiere și torsiune	303
b) Gradul de torsiune la încovoiere. Rigidități	304
c) Centrul de încovoiere	307
§ 20. <i>Încovoierea consolei. Analogii. Exemple</i>	309
a) Disc circular. Coroană circulară. Concentrarea tensiunilor	310
b) Funcția lui Timoshenko modificată	312
c) Analogia membranei elastice	313
d) Domenii simetrice	314
e) Elipsă	315
f) Dreptunghi	316
g) Semicoroană circulară. Concentrarea tensiunilor	319
h) Rolul tensiunilor de torsiune în încovoiere	329
§ 21. <i>Problema încovoierii în consolă a barelor de secțiune simplu conexă. Metoda reprezentării conforme</i>	334
§ 22. <i>Problema încovoierii în consolă pentru bare de secțiune simplu conexă. Exemple</i>	337
a) Discul circular	337
b) Cardioida	338
c) Lemniscata lui Bernoulli	341
d) Alte metode și probleme	346
CAPITOLUL 6. Problema plană	348
§ 1. <i>Generalități</i>	348
§ 2. <i>Starea de deformație plană (cilindru elastic foarte lung).</i>	349
§ 3. <i>Starea de tensiune plană generalizată și starea de încovoiere a plăcii subțiri (Ecuațiile lui V. Manea)</i>	353
a) Componente plane și componente de încovoiere	354
b) Eforturi și momente	357
c) Starea de tensiune plană generalizată	363
d) Starea de încovoiere a plăcii subțiri	365
e) Teoria clasică	368
§ 4. <i>Sistemul complet de ecuații al elasticității plane. Funcția lui Airy</i>	371
a) Sistemul de ecuații	371
b) Funcția lui Airy	373
§ 5. <i>Utilizarea funcției lui Airy. Exemple</i>	374
a) Soluții polinomiale	374
b) Placa dreptunghiulară în consolă	375
c) Grinda pe două reazime	379
d) Problema dreptunghiului. Metoda separării variabilelor	383
§ 6. <i>Forma ecuațiilor problemei plane în variabile complexe conjugate.</i>	385
a) Ecuațiile problemei	386
b) Criterii de rezistență	388

	Pag.
§ 7. <i>Reprezentarea soluției ecuațiilor problemei plane. Funcțiile lui Kolosov și Mushelishvili</i>	390
a) Ecuațiile omogene	390
b) Ecuațiile neomogene	394
§ 8. <i>Rezultanta și momentul rezultat al tensiunilor</i>	398
a) Problema omogenă	399
b) Problema neomogenă	400
c) Singularități admisibile pentru funcțiile lui Kolosov și Mushelishvili	401
§ 9. <i>Gradul de arbitrar al funcțiilor lui Kolosov și Mushelishvili. Schimbări de coordonate</i>	403
a) Gradul de arbitrar	403
b) Schimbări de axe	404
c) Ecuațiile lui Lamé și Maxwell	406
§ 10. <i>Natura funcțiilor lui Kolosov și Mushelishvili în domenii oarecare</i>	407
a) Domenii simplu conexe	408
b) Domenii mărginite și multiplu conexe	408
c) Domenii nemărginite și multiplu conexe	411
d) Sarcini concentrate	414
§ 11. <i>Problemele la limită fundamentale ale elasticității plane</i>	415
a) Problema lui Dirichlet	416
b) Problema lui Neumann	417
c) Problema mixtă	419
d) Exemplu	420
e) Concluzii	420
§ 12. <i>Formularea problemelor fundamentale ale teoriei încovoierii plăcilor subțiri</i>	421
a) Reprezentarea soluției prin două funcții complexe și o funcție reală	422
b) Varianta clasică: reprezentarea soluției prin două funcții complexe	424
c) Problema lui Dirichlet	426
d) Problema lui Neumann	426
e) Concluzii	428
§ 13. <i>Analogia optică în studiul problemei plane (Fotoelasticimetria)</i>	429
a) Birefrința accidentală	430
b) Legile lui Neumann. Izocline și izocromate	432
c) Cazul domeniilor multiplu conexe	435
§ 14. <i>Problema lui Neumann pentru coroana circulară. Metoda seriilor</i>	436
a) Metoda seriilor	436
b) Convergența soluției	442
c) Exemplu. Problema lui Lamé	445
§ 15. <i>Problema lui Neumann pentru discul circular și pentru planul cu un orificiu circular</i>	446
a) Disc circular	446
b) Metoda lui C. Iacob	447
c) Disc circular cu o fisură punctuală centrală. Concentrarea tensiunilor	447
d) Plan cu un orificiu circular	451
§ 16. <i>Problema lui Neumann. Metoda seriilor. Exemple</i>	452
a) Disc supus la presiune uniformă pe frontieră	452
b) Discul lui Hertz	452
c) Plan cu un orificiu circular solicitat de o presiune uniformă	454
d) Forță concentrată aplicată în origine	455
e) Moment concentrat aplicat în origine	455
f) Plan cu un orificiu circular liber. Concentrarea tensiunilor	456

	Pag.
§ 17. Problema lui Neumann pentru coroana circulară. Metoda integralelor de tip Cauchy (Metoda lui Milne-Thomson).	459
a) Domeniu cu frontieră circulară	459
b) Problema coroanei circulare	461
c) Exemplu. Problema lui Lamé	463
d) Concluzii	463
§ 18. Transformarea relațiilor elasticității plane prin intermediul reprezentării conforme	464
§ 19. Problema lui Neumann. Exemple. (Metoda reprezentării conforme).	467
a) Cardioida	467
b) Coroana eliptică (soluția lui A. Kalandia)	468
c) Discul eliptic	476
§ 20. Reducerea problemelor lui Dirichlet și Neumann la ecuația integro-diferențială a lui Mushelişvili	479
a) Domenii reprezentabile conform pe discul unitate	479
b) Domenii nemărginite, supuse la tensiuni ne-nule la infinit	481
§ 21. Soluția problemelor fundamentale pentru domenii reprezentabile conform pe discul unitate prin intermediul unor funcții polinomiale	482
§ 22. Problema lui Neumann. (Metoda ecuației integro-diferențiale a lui Mushelişvili) Exemple	488
a) Discul circular	488
b) Discul circular sub acțiunea unor sarcini concentrate aplicate pe frontieră	489
c) Planul cu un orificiu eliptic. Concentrarea tensiunilor	491
§ 23. Problema lui Neumann pentru domenii multiplu conexe. Algoritmul alternant generalizat al lui Schwarz-Mihlin	496
a) Algoritmul alternant	496
b) Exemplu	497
c) Asupra justificării algoritmului alternant	499
§ 24. Problema lui Neumann pentru domenii multiplu conexe. Ecuația integrală a lui Șerman	501
a) Ecuația lui Șerman	501
b) Asupra metodei de calcul efectiv	506
§ 25. Alte metode și probleme	507
a) Domenii semiinfinite	507
b) Ecuațiile integrale ale problemelor lui Dirichlet și Neumann	507
c) Problema conjugării liniare	507
d) Metode operaționale	508
e) Observație finală	508
CAPITOLUL 7. Problema tridimensională. Studiul ecuațiilor lui Lamé	509
§ 1. Generalități	509
§ 2. Despre studiul ecuației lui Poisson	512
a) Formule integrale	513
b) Potențiali newtonieni	516
c) Metode de rezolvare	519
d) Funcții sferice	520

§ 3. <i>Asupra reprezentării soluțiilor ecuațiilor elasticității prin potențiali de tensiune și de deplasare</i>	523
a) Potențiali	523
b) Reprezentarea lui Kelvin	524
c) Reprezentarea lui Clebsch	524
§ 4. <i>Reprezentarea lui Grodskii. Alte reprezentări prin potențiali de deplasare. Proprietăți generale</i>	525
a) Reprezentarea lui Grodskii	525
b) Reprezentarea lui Trefftz	527
c) Proprietăți generale	529
d) Cazul problemei plane; cazul dinamic	530
§ 5. <i>Relații de dependență între potențialii de deplasare. Teorema lui Eubanks și Sternberg</i>	531
§ 6. <i>Proprietăți de reciprocitate ale operatorului lui Lamé</i>	537
§ 7. <i>Teoremele lui Beltrami</i>	540
§ 8. <i>Metoda surselor. Soluția fundamentală a ecuațiilor lui Lamé</i>	541
a) Cîmpul deplasărilor singulare	542
b) Soluția fundamentală	545
c) Utilizarea funcției lui Dirac	548
§ 9. <i>Tensorul lui Kelvin și Somigliana. Aplicații</i>	549
a) Proprietăți de simetrie	550
b) Superpoziția soluțiilor	550
c) Potențiali elastici de volum	550
§ 10. <i>Soluția fundamentală a ecuațiilor lui Lamé bidimensionale. Caracterul paradoxal al acestei soluții</i>	552
a) Soluția fundamentală în \mathcal{L}_2	552
b) Soluția fundamentală dedusă din soluția fundamentală în \mathcal{L}_3	554
§ 11. <i>Formula integrală fundamentală a elastostaticii</i>	558
a) Reprezentarea prin potențiali elastici	558
b) Aplicații. Indicații bibliografice	562
§ 12. <i>Matricea lui Green pentru ecuațiile lui Lamé</i>	562
a) Matricea lui Green	562
b) Problema lui Dirichlet	564
c) Problema lui Neumann	565
d) Problema mixtă	566
e) Concluzii	566
CAPITOLUL 8. Problema bulei elastice	567
§ 1. <i>Generalități</i>	567
§ 2. <i>Operatorii lui Lurie</i>	568
§ 3. <i>Problema lui Dirichlet pentru bula elastică</i>	570
§ 4. <i>Problema lui Neumann pentru bula elastică</i>	573

	Pag.
§ 5. <i>Condiții necesare de existență a soluției problemei lui Neumann</i>	578
a) Condiții de existență	578
b) Gradul de arbitrar al funcțiilor lui Grodksii	583
§ 6. <i>Problema lui Neumann pentru domenii mărginite de o sferă</i>	
<i>Exemple</i>	583
a) Bula elastică supusă la presiune normală pe frontieră	583
b) Spațiul elastic cu o cavitate sferică cu frontiera liberă. Concentrarea tensiunilor	584
CAPITOLUL 9. Problema semispațiului elastic	588
§ 1. <i>Generalități</i>	588
§ 2. <i>Problema lui Dirichlet pentru semispațiul elastic</i>	589
§ 3. <i>Problema lui Dirichlet pentru semispațiul elastic. Metoda integralelor Fourier.</i>	591
§ 4. <i>Problema lui Neumann pentru semispațiul elastic (I)</i>	594
a) Sarcină normală repartizată	594
b) Formulele lui Hertz	598
c) Aplicații	599
§ 5. <i>Problema lui Neumann pentru semispațiul elastic (II)</i>	600
a) Generalizarea formulelor lui Hertz	600
b) Sarcină normală concentrată	601
c) Exemplu	602
§ 6. <i>Problema lui Neumann pentru semispațiul elastic (III)</i>	603
a) Sarcina tangențială repartizată	603
b) Formulele lui Cerruti	606
§ 7. <i>Semispațiul solicitat de o sarcină oarecare pe frontieră</i>	607
a) Forță concentrată oarecare	607
b) Sarcină repartizată oarecare	610
§ 8. <i>Problema semispațiului elastic cu frontiera liberă, solicitat de sarcini aplicate în puncte interioare</i>	611
a) Forța concentrată dirijată după normala la frontieră	612
b) Forța concentrată dirijată paralel la frontieră	614
c) Cazul unei sarcini oarecare	616
CAPITOLUL 10. Problema contactului elastic	618
§ 1. <i>Generalități</i>	618
§ 2. <i>Problema ștanței ca problemă mixtă</i>	619
a) Condițiile la limită ale problemei	620
b) Ecuația integrală a problemei ștanței	623
c) Indicații asupra potențialilor generalizați	625
§ 3. <i>Potențialul discului eliptic într-un punct interior. Teorema lui Galin și Ștaerman</i>	626
§ 4. <i>Problema ștanței cu bază plană eliptică, acționată central</i>	631
a) Soluția problemei	631
b) Despre repartiția presiunilor sub șanță	633

	Pag.
§ 5. Problema ştanşei paraboloidale acţionate central	634
a) Potenţialul discului eliptic	634
b) Ecuaţiile problemei	638
c) Comportarea mărimilor k , a , b , a_1	640
§ 6. Studiul ecuaţiei transcendente a lui Hertz	641
a) Monotonia funcţiei $f(k)$	641
b) Rezolvarea ecuaţiei lui Hertz prin tabulare	643
§ 7. Studiul aproximativ al ecuaţiei lui Hertz. Consecinţe	644
a) Soluţia aproximativă algebrică a ecuaţiei lui Hertz	644
b) Rolul excentricităţii	646
c) Formule aproximative	649
§ 8. Rigidităţi geometrice la penetraţie	650
a) Cazul domeniului de contact eliptic	650
b) Formule aproximative	653
§ 9. Ştanşe cu bază plană neeliptică	654
a) Singularităţile presiunii sub ştanşa cu bază plană mărginită convexă neeliptică (teorema lui I. Zamfirescu)	655
b) Alte rezultate	659
§ 10. O soluţie aproximativă pentru anumite ştanşe cu bază plană mărginită convexă neeliptică	660
a) Presiunea sub ştanţă şi funcţia lui Prandtl	660
b) Cazul triunghiului echilateral	661
c) Cazul pătratului	662
d) Rigiditatea geometrică la penetraţie	664
§ 11. Despre tensiunile în semispaţiu sub ştanţă pentru un domeniu de contact eliptic	665
a) Ştanşa cu bază plană eliptică	666
b) Ştanşa paraboloidală	666
§ 12. Reducerea problemei contactului la problema ştanşei paraboloidale	668
a) Corpuri în contact	668
b) Schimbarea de coordonate	670
c) Cazuri particulare	673
§ 13. Problema contactului elastic fără frecare	676
a) Condiţia la limită. Ecuaţia integrală a problemei	676
b) Ştanşa echivalentă şi semispaţiul echivalent	677
c) Exemplu: contactul dintre roată şi şină	679
d) Exemplu: bula elastică pe un semispaţiu rigid	681
§ 14. Despre alte metode şi probleme	682
ANEXĂ	684
§ 1. Funcţii de o variabilă	684
a) Clase de funcţii	684
b) Integrale	---
§ 2. Distribuţii de o variabilă	868

	Pag.
§ 3. Domenii și funcții de punct în plan	692
a) Mulțimi de puncte. Domenii în \mathcal{E}_2	692
b) Curbe-frontieră. Domenii simplu conexe și multiplu conexe	694
c) Elemente geometrice fundamentale	697
d) Funcții de punct în plan	700
e) Formule integrale	701
§ 4. Funcții de punct ca funcții de două variabile complexe conjugate	702
a) Variabile $\bar{z}, \bar{\bar{z}}$	702
b) Operatori diferențiali	703
c) Integrala definită. Condiții de uniformitate	706
d) Formula lui D. Pompeiu	710
§ 5. Funcții analitice de o variabilă complexă	711
a) Funcții uniforme. Serii. Singularități	712
b) Funcții multiforme	717
c) Prelungire analitică	723
d) Teoreme de unicitate	725
§ 6. Reprezentarea conformă	726
a) Teoreme fundamentale.	727
b) Corespondența frontierelor	728
c) Funcția lui Green	731
d) Integrala lui Schwarz-Christoffel. Reprezentări aproximative	731
§ 7. Coordonate naturale. Aplicații	734
a) Coordonate naturale	734
b) Elemente geometrice fundamentale	736
c) Arie, centru de greutate, momente de inerție	738
§ 8. Reprezentarea conformă. Exemple	740
a) Transformarea omografică	740
b) Coroana eliptică (elipse confocale)	743
c) Cardioida	746
d) Lemniscata lui Bernoulli	748
e) Pătratul. Planul cu un orificiu pătrat	752
§ 9. Serii Fourier	756
a) Funcții definite într-un disc, și valorile lor la limită	756
b) Serii trigonometrice și serii Fourier	758
c) Convergență; proprietăți ale coeficienților	760
d) Serii Fourier complexe	762
e) Serii Fourier și serii Laurent	763
f) Generalizări diferite	768
§ 10. Formulele de tip Cauchy pentru funcții olomorfe și meromorfe	770
§ 11. Despre valorile la limită ale funcțiilor olomorfe.	774
a) Integrala de tip Cauchy	774
b) Valori principale. Formulele lui Sohoŭki-Plemelj	776
c) Valori la limită ale funcțiilor olomorfe	777
d) Teorema lui Harnack	779
e) Cazul discului unitate	781
BIBLIOGRAFIE	785

PREFAȚĂ

Apărută la începutul secolului trecut, teoria elasticității a atras repede asupra-i atenția a numeroase personalități de prim rang ale științei.

În urmă cu 100 sau 50 de ani, tratate ca cele ale lui Lamé, Clebsch și Saint-Venant sau Love puteau cuprinde încă ansamblul cunoștințelor de teorie a elasticității. Dar în ultimele decenii mecanica solidului deformabil a cunoscut o nouă perioadă de intensă dezvoltare. În aceste condiții, încercarea de a realiza o carte care să cuprindă, măcar în linii mari, rezultatele și metodele teoriei elasticității în faza sa actuală pare dinainte sortită la eșec.

În volumul de față am căutat de aceea numai să selecționăm ceea ce e fundamental pentru înțelegerea cercului de idei și posibilități ale teoriei elasticității. În această alegere am căutat să reținem numai ceea ce e strict necesar pentru orientarea independentă în vasta literatură de specialitate.

În anul 1862, A. Clebsch scria în prefața cărții sale *Theorie der Elastizität fester Körper* următoarele: „În studiul științei de care ne ocupăm, dacă ținem seama de interesul fizic, cunoașterea teoriilor matematice relative la ea nu e nici absolut necesară, nici deosebit de utilă. Voi da astfel ca exemplu fie și teoria ecuațiilor cu derivate parțiale, care nu poate fi cu ușurință utilizată în aplicații”. Și Clebsch nu era inginer, ci matematician! Dimpotrivă, examinarea stării de lucru actuale ne arată că cercetarea contemporană în teoria elasticității este încă ades frânată chiar de redusa eficacitate a aparatului matematic de care ea trebuie să facă uz. Tocmai eforturile pentru ameliorarea acestui aparat fac ca teoria elasticității, cu tot trecutul ei mai mult decât secular, să fie azi în continuă și ades furtunoasă dezvoltare.

Teoria elasticității poate fi privită ca studiu al unor probleme la limită pentru un anumit sistem de ecuații cu derivate parțiale. Partea pur „fizică” a teoriei poate fi redusă la stabilirea relațiilor de bază, la alegerea acelor mărimi și raporturi între ele care trebuie să caracterizeze noțiunea de „corp elastic”. În definitiv s-ar putea construi o expunere a ei în stilul „Mecanicii Analitice”, despre care Lagrange declara cu satisfacție că nu conține nici o singură figură.

Dar teoria elasticității nu e o teorie matematică, ci o ramură a mecanicii. Iar mecanica însăși este una dintre științele fundamentale ale naturii, al cărei studiu nu coincide cu studiul matematic al ecuațiilor sale.

Mecanica — și în particular teoria elasticității — nu are o structură axiomatică și expunerea ei nu constă din înlănțuirea unui șir de teoreme. Nu orice corpuri geometrice și nu orice condiții la limită sînt interesante în studiul sistemului de ecuații pomenit mai sus. Aceasta ferește teoria de abstractizări inutile; face să se simtă mai mult grija pentru rezultatele utile practicii; duce la adoptarea metodelor matematice nu după gradul lor de extremă generalitate, ci adesea după simplitate și eficacitate.

Aparatul matematic folosit în această carte se limitează în mare la capitole clasice ale teoriei ecuațiilor fizicii matematice și ale teoriei funcțiilor de o variabilă complexă.

Am căutat să ușurăm munca cititorului printr-o expunere detaliată a raționamentelor, precum și prin citarea amănunțită a surselor. La dispoziția cititorului calificat sînt puse indicații asupra lucrărilor care dezvoltă puncte de vedere mai noi sau mai generale, ce depășesc limitele expunerii de față, limite cu grijă subliniate de fiecare dată.

Dintre tratatele clasice indicăm aici lucrările lui G. Lamé [1], A. Clebsch și B. de Saint-Venant [1] și A. Love [1]. Fiecare dintre ele a făcut epocă, iar cea din urmă prezintă încă interes și în prezent.

Starea de lucruri de pînă la 1900 — 1910 este analizată în articolele de sinteză ale lui Th. von Kármán [1], [2]; C. Müller și A. Timpe [1]; O. Tedone [2]; O. Tedone și A. Timpe [1]. Rezultatele obținute înainte de 1925 sînt pe scurt expuse în Handbuch der Physik de către E. Trefftz [3] și J. Geckeler [1], articole interesante și astăzi. În ediția postbelică a aceluiași Handbuch, elasticitatea clasică este examinată numai în articolul lui I. Sneddon și D. Berry [1], cu dimensiuni mai restrînse. Un loc important e rezervat problemelor generale ale bazelor teoriei în variantele sale cele mai moderne, în articolele — veritabile monografii — lui C. Truesdell [1], și mai ales C. Truesdell și R. Toupin [1] și C. Truesdell și W. Noll [1]. Mai indicăm două cărți recente asupra mecanicii mediilor continue, mai accesibile, dar nu mai puțin utile: P. Germain [1] și W. Prager [2]. Un punct de vedere critic și bogate indicații bibliografice sînt oferite de articolele de sinteză ale lui E. Sternberg [4] și J. Goodier [3], [4]. În afara presei periodice de specialitate, subliniem încă importanța urmării seriilor „Advances in applied mechanics”, „Progress in solid mechanics” și „Symposia in applied mathematics”, cu contribuții la problemele cele mai moderne.

Literatura de specialitate se îmbogățește în fiecare an cu mai bine de 10 000 de titluri, dintre care cel puțin 20% în domeniul teoriei clasice a elasticității. Se poate încerca urmărirea informativă a acestei avalanșe de lucrări cu ajutorul unor reviste ca „Applied Mechanics Reviews”, „Mathematical Reviews” și „Referativnii Jurnal Mehanika” (cea mai completă).

Pentru materialul inclus în volumul de față, tabla de materii este edificatoare. Prezentarea, sub o formă sau alta, a chestiunilor ce conduc la stabilirea sistemului complet de ecuații ale teoriei elasticității, este obligatorie. Alcătuirea restului lucrării, așadar a celei mai mari părți a ei, corespunde convingerii autorului că anumite metode sau soluții sînt de interes deosebit și reprezintă un bun definitiv cîștigat al teoriei. Printre acestea intră metoda teoriei funcțiilor de o variabilă complexă în problemele antiplană și plană și metoda potențialilor armonici de deplasare în problemele tridimensionale.

Ca principale surse de informare recomandăm: pentru problema antiplană — L. Milne-Thomson [3] și N. Muskhelișvili [5], capitolul 7; pentru problema plană — N. Muskhelișvili [5], L. Milne-Thomson [2], A. Green și W. Zerna [1], capitolele 6—8; pentru problema tridimensională — A. Lurie [4].

Deosebit de valoroase sînt, după părerea noastră, cărțile lui Chi Teh Wang [1], S. Timoshenko și J. Goodier [1] (ambele cu numeroase aplicații), L. Landau și E. Lifșit [1] (foarte compactă și interesantă prin considerațiile de principiu) și I. Sokolnikoff [2] (cel mai modern și mai bine echilibrat din punctul de vedere al materialului cuprins printre tratatele de elastostatică liniară).

O lucrare utilă, deși acoperind numai o arie mai restrînsă de probleme, este cea a lui V. Novojilov [3]. Recomandăm de asemenea cărțile lui R. Southwell [3] și A. Sommerfeld [1], nu îndeplinit de sistematice, dar conținînd mult material interesant, și mai ales pe cea a lui P. Papkovici [4], foarte utilă și azi, la 30 de ani după apariție. Pentru anumite aspecte elementare se pot utiliza și manualele lui M. Filonenko-Borodici [1] și L. Leibenzon [1].

Există numeroase cărți de rezistență a materialelor și de dinamică tehnică utile a fi consultate: Gh. Buzdugan [1], A. Iliușin și V. Lenski [1], R. L'Hermite [1], Iu. Rabotnov [2], precum și tratatele mai vechi ale lui N. Beliaev [2], C. Biezeno și R. Grammel [1], M. Filonenko-Borodici et al. [1].

Literatura cu caracter istoric în acest domeniu nu e prea bogată. Indicăm capitolul introductiv la volumul lui A. Love [1]; lucrările lui S. Timoshenko [2]; I. Todhunter și K. Pearson [1]; articolele lui G. Bouligand [1], C. Truesdell [3], [7].

Textul de față e strict limitat la cadrul elastostaticii liniare a corpurilor omogene și izotrope. De aceea nu dăm detalii asupra teoriei neliniare, nici asupra teoriei corpurilor anizotrope (pentru unele indicații vezi finele § 4.1).

Nu vom considera problemele dinamice nu datorită unor dificultăți speciale, cît pentru că tematica matematică a elastodinamicii e cu totul diferită de cea a elastostaticii (vezi § 4.12). Nu ne vom ocupa de teoria plăcilor plane și curbe, care formează azi o disciplină aparte (vezi, de pildă, A. Goldenveizer [1], S. Timoshenko și S. Woinowski-Krieger [1], V. Visarion [1], [2]). În fine, nu vom considera studiul metodelor aproximative, a căror prezentare corectă pretinde un aparat de analiză funcțională relativ dezvoltat (vezi, de exemplu, S. Mihlin [2]—[4]).

Acestea sînt limitele pe care o carte de elastostatică clasică trebuie să le respecte și pe care vrem să le subliniem dinainte. Cu toate acestea, aria acoperită de expunerea de față rămîne suficient de largă pentru a cuprinde ne-numărate aplicații practice. În particular, cartea este scrisă și în speranța că ea ar putea fi utilă și inginerilor preocupați de probleme apropiate teoriei elasticității și convinși de însăși tehnica modernă că metodele clasice ale rezistenței materialelor sînt deja în multe direcții depășite.

Mulțumim aici tuturor acelorora care au avut bunăvoința de a citi lucrarea în manuscris și de a ne comunica observațiile lor.

Mulțumim colegilor noștri E. Nicolau (care a efectuat măsurătorile cerute de unele exemple din § 5.16 și a pregătit bună parte din § 6.13) și I. Zamfirescu (care a efectuat calculele necesare pentru tabelele din § 10.6, § 10.10 și pentru trasarea curbilor din § A.6 și § A.7).

Doresc să exprim profunda mea recunoștință față de toți cei care m-au îndrumat în studiul mecanicii; față de acad. prof. Caius Iacob (de la Universitatea din București) și prof. Paul Germain (de la Universitatea din Paris), fără sfatul și încurajarea cărora această lucrare n-ar fi văzut lumina tiparului; și față de soția mea pentru sprijinul moral de neprețuit din anii în care această carte a fost scrisă și în anii în care, apoi, și-a așteptat apariția.

AUTORUL

INSTRUCȚIUNI PENTRU LECTURĂ

Capitolele sînt numerotate de la 1 la 10; introducerea are nr. 0 (zero); anexa este indicată cu litera A. Numerotarea paragrafelor începe de la 1 în interiorul fiecărui capitol; cea a formulelor începe de la 1 în interiorul fiecărui paragraf. În interiorul unui paragraf dat nu se repetă numărul paragrafului; în interiorul unui capitol nu se repetă numărul capitolului. Astfel, de pildă, § 7.3 înseamnă § 3 al cap. 7 (în referirile bibliografice, aceeași convenție). Dar în interiorul cap. 7, el va fi citat numai ca § 3. Formula (7.3.19) este formula 19 din § 3 din cap. 7; dar ea va fi citată ca formula (19) în interiorul § 7.3 și ca formula (3.19) în interiorul cap. 7. Numărul paragrafelor e imprimat pe prima linie a fiecărei pagini.

Numerotarea figurilor este similară: figura 5.15.8 este figura 8 din § 15 din capitolul 5.

Indicațiile bibliografice sînt date peste tot în ordine alfabetică, exceptînd cazurile în care dorim să subliniem prioritatea unui autor (în dată sau în importanța lucrării). Numele rusești sînt transcrise fonetic; în bibliografie ele apar în transcriere internațională — așadar uneori sub o formă ușor diferită.

Explicarea simbolurilor e dată pe parcurs. În figuri se folosesc aceleași simboluri, cu excepția vectorilor, care apar prevăzuți cu săgeți.

Aspectul — uneori ciudat — al unor formule e dictat de rațiuni de ordin tipografic: dorința de a câștiga spațiu a impus utilizarea unui număr mai mare de paranteze, exponenți negativi și fracționari.

Alegerea semnelor pentru unele mărimi nu a stat în întregime la dispoziția autorului; atragem atenția mai cu seamă asupra scrierii unor cantități complexe sistematic folosite în capitolele 5 și 6 și în Anexă (ca de ex. I, M, R, S, T, U, X), tipărite cu caractere oblice seminegre, acolo unde caractere oblice negre ar fi fost de preferat.

INTRODUCERE

§ 1. GENERALITĂȚI

Practica stă la originile teoriei elasticității.

Toporașele epocii paleolitice, coloanele palatului din Cnossos, podul din Gard — toate sînt semnul utilizării proprietăților corpului solid capabil să suporte și să transmită anumite sarcini. Totodată, legende ca cea a turnului Babel sau a Minăstirii Argeșului ne furnizează, sub o formă fantastică, informații despre mari catastrofe în domeniul construcțiilor, semn al insuficienței cunoașterii a proprietăților corpului solid.

Studiul proprietăților materiei a dus de la acumularea de fapte la elaborarea unor puncte de vedere științifice, care tindeau la explicarea fenomenelor, la prevederea și producerea lor în condiții dorite. Una din primele discipline științifice formate a fost *mecanica*. În cele peste două milenii scurse de la originile ei, mecanica s-a dezvoltat considerabil. Mecanica punctului material, mecanica sistemelor de puncte, mecanica solidului rigid, mecanica mediilor continui deformabile — iată principalele sale subdiviziuni.

Teoria elasticității este una din cele mai importante ramuri ale mecanicii mediilor continui deformabile. În domeniul ei intră studiul tuturor corpurilor solide ce ne înconjoară, din punctul de vedere al echilibrului și al mișcării lor (abstracție făcînd de o componentă de primă aproximație, corespunzătoare descrierii lor ca solide rigide).

Orice știință a naturii începe prin delimitarea obiectului său, ceea ce echivalează cu stabilirea unui *model* al materiei. Pentru înțelegerea fenomenelor, e necesară o operă de abstractizare : ea are ca țintă eliminarea a tot ce — din punctul de vedere al științei respective — e secundar, și formularea precisă, cantitativă, a ceea ce este esențial. Rezultatul constă în elaborarea unui model al materiei, model istoricește format și aflîndu-se în permanentă schimbare și precizare pentru orice disciplină științifică în dezvoltare.

Vom începe prin definirea *modelului corpului elastic*. Acest model odată stabilit, studiul se va concentra asupra consecințelor logice ale modelului.

Certitudinea corectitudinii modelului, precum și aprecierea limitelor sale de valabilitate, se pot obține pe două căi. Astfel, se poate stabili un model al corpului elastic pe cale deductivă, pornind de la datele furnizate de fizică asupra structurii corpurilor solide. Pe de altă parte, se pot stabili pe cale inductivă proprietățile prin care înțelegem să caracterizăm corpul elastic, lăsînd practicii verificarea justetei concluziilor la care ele ne conduc. Această din urmă cale s-a dovedit mai simplă și mai utilă pentru teoria elasticității.

§ 2. EXPERIENȚELE DE ÎNTINDERE-COMPRESIUNE

a) *Descrierea experienței*

Sub acțiunea forțelor exterioare aplicate unui corp, în el apar forțe interioare, al căror efect este modificarea formei sale. Trebuie să considerăm deci aspecte de *geometrie* și aspecte de *statică* ale problemei. Ele nu depind explicit de proprietățile materialului din care e alcătuit corpul: studiul acestora din urmă constituie aspectul *fizic* al chestiunii.

O înțelegere sugestivă a comportării unui corp sub acțiunea sarcinii se obține prin efectuarea unor experiențe simple (vezi de ex. A. Nadai [1], cap. 3, 8 și 21).

Să considerăm în acest scop un cilindru (de oțel, fontă, lemn etc.) de lungime l mare față de dimensiunile secțiunii sale transversale \mathcal{D} , a

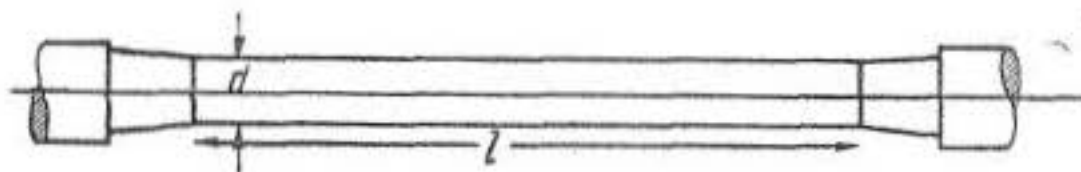


Fig. 0.2.1

cărei arie o vom nota cu D . Acest cilindru supus la întindere, la compresie, la torsiune etc., într-o mașină de încercări, se numește *epruvetă*. Să fixăm una din bazele sale și să încărcăm cealaltă bază cu un sistem de forțe static echivalent cu o forță unică $X(t)$ funcție de timp, aplicată în centrul de greutate al bazei și dirijată în lungul axei cilindrului.

Dacă X crește de la 0 la valoarea sa finală suficient de încet pentru ca forțele inerțiale să fie neglijabile, procesul se numește *pseudo-static*.

Dacă, mai mult, fiecare din stările intermediare poate fi privită ca o stare de echilibru și procesul poate fi descompus într-o succesiune de astfel de stări, arbitrar de apropiate unele de altele, el se numește *crasistatic*. (Vezi mai jos pag. 26.)

Sub acțiunea sarcinii, în epruvetă apar forțe interioare care îi modifică forma: ea se alungește sau se scurtează (după semnul lui X), iar secțiunea sa transversală se micșorează sau se mărește. Vom spune că epruveta *se deformează*.

Toți parametrii considerați *după* deformație se vor nota cu un asterisc.

Pentru a examina legătura dintre forțele ce iau naștere în epruvetă și modificarea formei sale, să ne fixăm atenția asupra sarcinii unitare (forța X raportată la aria D) și a alungirii relative a cilindrului.

Alungirea relativă este o mărime nul-dimensională; ea se numește (provizoriu) *deformație* și se notează

$$\epsilon = (l^* - l)/l. \quad (1)$$

Sarcina unitară se măsoară în kgf/cm^2 și se numește (provizoriu) *tensiune*. Mai exact, se consideră *tensiunea convențională* (pe scurt *tensiune*)

$$\sigma = X/D, \quad (2)$$

precum și *tensiunea reală*

$$\sigma^* = X/D^*. \quad (3)$$

Făcînd să crească X — și deci și σ — de la zero la valori pozitive tot mai mari, și măsurînd deformațiile corespunzătoare, putem trasa într-un sistem de axe (t, ε, σ) o curbă numită (provizoriu) *curbă caracteristică* a materialului. Această curbă nu depinde sensibil nici de dimensiunile cilindrului (dacă acesta e destul de zvelt), nici de modul concret în care se realizează sistemul de sarcini static echivalent cu X ; ea depinde însă de temperatura T , de viteza procesului etc. Dacă $T = \text{constant}$ — ceea ce este realizabil într-un proces pseudostatic, în care (în absența surselor de căldură) există timp suficient pentru schimb de căldură cu exteriorul, așa fel încît temperatura să nu varieze — putem trasa o familie de curbe caracteristice, funcție de T ca parametru.

b) Curbe caracteristice

Studiul curbei caracteristice în spațiul (t, ε, σ) pentru diferite funcții $X(t)$ pune în evidență o mare varietate de proprietăți ale materialului. Să ne mărginim la studiul materialelor pentru care — într-un proces pseudo-static — dependența explicită față de timp a mărimilor ε și σ este neglijabilă. În acest caz, vom avea de-a face cu o curbă plană, într-un plan (ε, σ). Această curbă (vezi fig. 0.2.2) va purta pe viitor numele de *curbă caracteristică*.

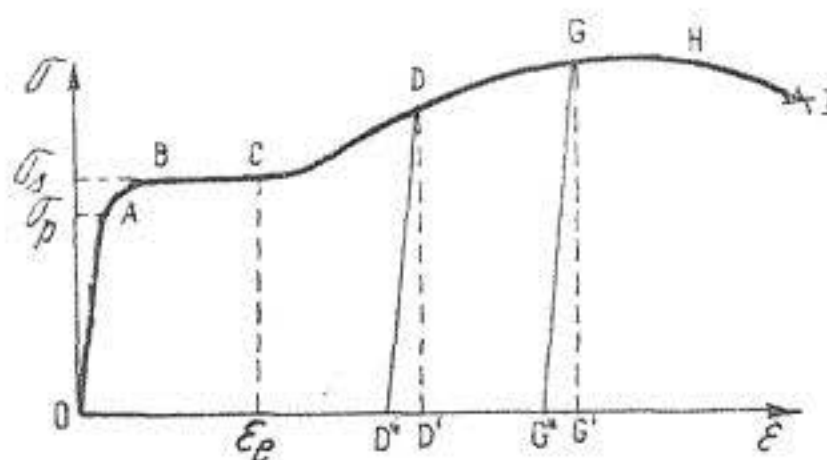


Fig. 0.2.2

Derivata

$$E = d\sigma/d\varepsilon \quad (4)$$

definește panta curbei, așadar comportarea epruvetei pentru o anumită stare prin care ea trece.

Să presupunem — pentru a fixa ideile — că epruveta e executată din oțel moale. În acest caz, porțiunea apropiată de origine a curbei $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ are o pantă constantă, independentă de ε . Pe această porțiune avem

$$E = \sigma/\varepsilon, \quad (5)$$

și dependența dintre σ și ε este deci *liniară și omogenă*. Pentru oțel la temperatura normală avem $E \cong 2\,100\,000 \text{ kgf/cm}^2$.

Pentru o valoare $\sigma = \sigma_p$, porțiunea rectilinie a diagramei ia sfârșit; această valoare (în cazul nostru $\sigma_p \cong 2\,000 \text{ kgf/cm}^2$) se numește *limită de proporționalitate* (uneori : de *elasticitate*). După o nouă creștere (în general mică) a tensiunii, diagrama ia forma unei platforme orizontale : materialul se deformează sub tensiune constantă. Această porțiune a curbei se numește *palier de fluaj* și valoarea $\sigma = \sigma_s$ corespunzătoare apariției acestui fenomen este *limita de plasticitate*.

De la punctul C mai departe (vezi fig. 0.2.2.), panta (4) redevine pozitivă, dar ea depinde de ε și valoarea sa e mai mică decât (5). Această reapariție a rezistenței la sarcină se numește *ecruisaj*, iar valoarea lui ε dincolo de care începe fenomenul se notează ε_c .

Curba caracteristică este o diagramă a tensiunii convenționale; întrucât pentru $X > 0$ avem $D^* < D$, e limpede că diagrama tensiunii reale e situată *deasupra* ei.

Dacă X crește în continuare, constatăm apariția unei gîtuituri, așadar a unei secțiuni defavorizate. Tensiunea reală *pe această secțiune* continuă să crească — cu toate că porțiunea finală HI a curbei caracteristice are alură descendentă. Punctul H marchează apariția gîtuiturii, așadar momentul în care starea cilindrului încetează de a fi omogenă pe lungime, și în care capacitatea sa de a rezista sarcinii e caracterizată de această secțiune defavorizată. Tensiunea corespunzătoare punctului H se numește *limită de rezistență*. (În cazul considerat, valoarea ei este de cca. $4\,000 \text{ kgf/cm}^2$.) Punctul I corespunde momentului în care cilindrul se rupe în zona gîtuiturii; tensiunea corespunzătoare se numește *limită de rupere*.

Curba astfel trasată se numește *curbă caracteristică de încărcare la întindere*. Pentru forțe $X < 0$ obținem $\sigma < 0$, $\varepsilon < 0$ (*compresiune*). Dacă cilindrul este lung, epruveta își *pierde stabilitatea*, trecînd brusc la o formă curbilinie de echilibru. Acest fenomen se numește *flambaj*, și el apare adesea cu mult înainte de atingerea limitei de proporționalitate. Pentru a putea continua încărcarea cu tensiuni negative, se folosesc epruvete scurte (de pildă, decupate din cea inițială). În acest caz, curba repetă (aproximativ simetric) aspectul din figura 0.2.2, ruperea fiind înlocuită cu apariția de crăpături pe suprafața laterală a cilindrului, urmată de sfărîmarea lui. Limita de elasticitate, de plasticitate, de rezistență, sînt în general *mai mari*. Pentru anumite materiale (fontă, beton), diferențele sînt importante.

Să considerăm acum atins un punct oarecare de pe curba caracteristică și să începem să micșorăm sarcina (*descărcare*). Comparînd cele două diagrame (de încărcare și descărcare) constatăm că, dacă punctul (ε , σ) se găsește pe porțiunea ce precede limita de plasticitate, descărcarea se face în lungul curbei trasate pentru încărcare; deformăția se anulează deci odată cu tensiunea ce a cauzat-o. Dimpotrivă, dacă limita de plasticitate a fost depășită, descărcarea se efectuează în lungul unei *paralele* la porțiunea rectilinie inițială.

Deformația corespunzătoare unui punct D se descompune deci în suma $OD' = OD'' + D''D'$, unde OD'' este deformația *remanentă* (pentru că nu dispare odată cu anularea tensiunii), iar $D''D'$ este deformația *elastică*. Deformația totală OD' se numește *deformație elasto-plastică*. Dacă punctul D este situat înainte de B , deformația este pur elastică. Apariția deformației remanente arată că, odată cu depășirea limitei de plasticitate, în material au avut loc anumite schimbări *irreversibile*. Dimpotrivă, deformația elastică este *reversibilă*.

Pornind din nou de la D'' spre D (*reîncărcare*), un nou palier de fluaj nu mai apare: punctul (ϵ, σ) urmează segmentul $D''D$, după care trece pe porțiunea $DGHI$ a diagramei inițiale (trasate pentru o epruvetă similară). Orice nouă descărcare începând din D se efectuează tot după $D''D$. Porțiunea rectilinie este deci mai lungă decât OA , și limita de proporționalitate — măsurată din D'' — e mai mare.

Oricâte operații de anulare a tensiunii am efectua, descărcarea se va face întotdeauna după paralele la OA , iar încărcarea va avea loc fie după astfel de paralele, fie — acolo unde ele o ating — după curba caracteristică de încărcare inițială.

OBSERVAȚIA 1. Experiențe foarte precise arată totuși că, pentru $\sigma \geq \sigma_s$, curba de descărcare e situată *sub* cea de încărcare; se obține astfel un domeniu foarte alungit, care conține paralela considerată la OA . Fenomenul se numește *hysteresis*.

Expresia matematică a acestor fapte e următoarea: atîta timp cît limita de plasticitate σ_s nu a fost atinsă, există o dependență *biunivocă* între mărimile ϵ și σ ; pentru $\sigma \leq \sigma_s$, această dependență este liniară și omogenă. Dimpotrivă, pentru $\sigma \geq \sigma_s$, dependența încetează de a fi biunivocă: pentru a restabili biunivocitatea, e necesară cunoașterea istoricului procesului de deformare.

c) Tipuri și proprietăți diferite ale materialelor

Curbele caracteristice diferă de la un material la altul. Cele pentru care curba are aspectul din figura 0.2.2 sînt extrem de numeroase (mai ales printre metale). Există însă materiale (chiar metalice: cupru, aluminiu) pentru care porțiunea rectilinie nu apare, sau altele la care curba caracteristică are aspect logaritm, exponențial etc. Există materiale pentru care deformația remanentă e foarte importantă (cupru, plumb, ceară), și altele la care ea lipsește aproape cu desăvîrșire (sticlă).

Materialele la care ruperea se produce imediat după depășirea limitei de elasticitate se numesc *casante*. Cele care suportă deformații remanente mari se numesc *plastice*.

Chiar pentru un material dat, fenomenul se complică dacă intervin factori ca: viteze mari de încărcare, variații importante de temperatură, presiuni hidrostatice mari, acțiunea alternată a unor sarcini de semne contrare, acțiunea de durată a unor sarcini depășind σ_s , iradierea și altele.

(Vezi de ex. A. Iliușin și V. Lenskii [1], cap. 2; vezi și D. Drucker [2].) Din această cauză, de fiecare dată trebuie să precizăm condițiile în care are loc solicitarea, dacă ele diferă de condițiile obișnuite. De aceea e preferabil să nu vorbim despre materiale elastice, plastice, etc., ci despre materiale aflate în zona elastică, plastică etc. (Astfel, marmora este un material casant în condiții normale; supusă la presiuni hidrostatice mari, ea suportă însă deformații remanente considerabile.)

OBSERVAȚIA 2. Rezultate analoge celor de mai sus se obțin supunând epruveta la *torsiune* sub acțiunea unui cuplu de moment dirijat în lungul axei cilindrului.

Cele de mai sus sînt valabile numai pentru procese în care variabila timp nu intervine explicit. În particular, ele fac abstracție de fenomene ca: creșterea deformației ca funcție de timp la tensiune constantă (*fluaaj*); scăderea tensiunii ca funcție de timp la deformație constantă (*relaxație*). Astfel de fenomene apar — mai mult sau mai puțin pronunțat — odată cu atingerea limitei de plasticitate. De aceea, procesele de deformație pentru $\sigma \geq \sigma_s$ nu sînt *evastatice* (deși pot fi *pseudostatice*): fixarea tuturor parametrilor la valori constante este imposibilă.

Studiul unor astfel de stări implică suprapunerea unor fenomene de deformare *elastică*, *plastică*, și *de fluaaj* (analogă curgerii unui fluid vîscos) și e legat de probleme de fizică relative la microstructura materialului. (Vezi de ex. E. Kröner [6]; M. Reiner [1].)

Observațiile precedente sînt valabile numai pentru o categorie particulară de corpuri, în condiții particulare de solicitare. Totuși, acestea sînt atît de frecvente, încît au justificat crearea unor discipline științifice consacrate studiului lor: *teoria elasticității* și *teoria plasticității*. Studiul corpurilor și condițiilor în care apar suprapuneri de fenomene elastice, plastice și de fluaaj este obiectul *reologiei*.

Fenomenele descrise deschid drumul spre înțelegerea legăturii dintre forțe și deformații într-un corp de configurație *oarecare*, supus la sarcini *oarecari*. Împreună cu relațiile geometrice și cele statice, ele trebuie să ducă la formulări cantitative asupra tuturor mărimilor ce caracterizează corpul solid deformabil sub sarcină.

§ 3. SOLICITAREA MEDIULUI CONTINUU DEFORMABIL

Din punctul de vedere al mecanicii solidului rigid, orice corp se află în echilibru sau mișcare, după natura sarcinii aplicate și a legăturilor geometrice. Dar forma lui rămîne neschimbată, distanța dintre perechile de puncte și unghiurile dintre perechile de elemente liniare nemodificîndu-se. Sub acțiunea sarcinii exterioare, apar forțe interioare. Acestea nu pot fi determinate și nu intervin în studiul problemei: oricît ar fi de mari, ele nu pot distruge corpul, nici nu pot modifica configurația sa.

Acest punct de vedere corespunde unui anumit *model* al materiei. El constituie o *primă aproximație*, dând răspuns la întrebarea dacă corpul considerat este, în ansamblu, în echilibru sau în mișcare.

Dar în cazul corpurilor realizate din materiale uzuale (metal, lemn etc.) și supuse la sarcinile ce apar de obicei în practica construcțiilor, a construcțiilor de mașini etc., forma corpului se modifică; iar dacă sarcina depășește anumite limite, construcția considerată poate ieși din uz.

Aceasta se poate petrece în mai multe moduri. Uneori apar fisuri și unele elemente ale construcției cedează, se distrug. Elementele rămase preiau uneori sarcina celor distruse și construcția în ansamblu rezistă. Dar alteori, această supraîncărcare duce și la distrugerea lor și a întregii construcții. Alteori, fără ca vreun element să se distrugă, construcția își modifică forma așa fel, încât interacțiunea părților sale e prejudiciată.

Vom spune că avem de-a face cu problema *rezistenței* și cea a *rigidității* corpului sub sarcină; ambele depășesc principial cadrul mecanicii solidului rigid. Astfel apare necesară adoptarea unui model al corpului solid, care să îngăduie (și să descrie cantitativ) deplasările reciproce ale punctelor. Legătura dintre aceste deplasări, forțele interioare care le provoacă, și sarcina exterioară, trebuie să permită determinarea formei finale a corpului, precum și a forțelor ce iau naștere în masa lui.

Prin urmare, studiul echilibrului (sau mișcării) unui corp solid se va efectua în două etape. În prima etapă (de care nu ne ocupăm aici) vor fi determinate reacțiunile și poziția de echilibru sau legea de mișcare a corpului *privit ca rigid*. În a doua etapă, vor fi studiate (în termenii din § 2, convenabil precizați) *deplasările*, *deformațiile* și *tensiunile* ce apar pe diferite direcții și diferite elemente de suprafață.

Cadrul mecanicii solidului rigid poate fi depășit fie prin considerarea deformațiilor, fie prin considerarea forțelor interioare. Prima cale duce la o teorie pur *geometrică* a deformației; cea de a doua, la o teorie *statică* a tensiunii.

Dar e limpede că legătura dintre parametrii geometrici, cei statici și cei ai acțiunii exterioare, trebuie să depindă și de proprietățile materialului, de „modul” în care corpul se opune solicitării. Teoria deformației și teoria tensiunii trebuie să fie independente de proprietățile materialului: ele trebuie să poată fi studiate în mod similar în teoria elasticității și, de exemplu, în mecanica fluidelor viscoase. Dimpotrivă, teoria legăturii dintre deformații și tensiuni trebuie să aibă o bază fizică, experimentală — și tocmai ea trasează delimitări precise între diferitele discipline relative la mecanica mediilor deformabile. Cu alte cuvinte, obținem un domeniu sau altul, după cum alegem o lege *fizică* (ar fi mai corect de spus: *mecanică*) sau alta, pentru a exprima legătura între parametrii geometrici și cei statici ai problemei — efecte ale aceleiași acțiuni exterioare. Tocmai existența unei astfel de legături permite măsurarea forțelor interioare prin efectele lor, așadar, contrar celor ce se petrec în mecanica solidului rigid, permite determinarea atât a acestor forțe, cât și a deformațiilor.

Problema de rezolvat ar putea fi deci formulată astfel : *dat fiind un corp de configurație cunoscută, realizat din materiale cu proprietăți mecanice cunoscute și supus unei acțiuni exterioare de parametri (forțe, legături, temperatură, câmpuri electro-magnetice etc.) cunoscuți ca funcții de punct și timp — să se determine forțele interioare și deplasările ca funcții de punct și timp.*

Extrema generalitate a unei astfel de formulări face deocamdată imposibilă obținerea unor rezultate suficient de generale și de precise totodată în acest cadru. Concretizând însă ipotezele asupra comportării materialului sub sarcină ; neglijând unul sau altul dintre factorii menționați ; alegând una sau alta din formele posibile de legătură între termenii problemei — putem ajunge la diferite modele ale materiei adecuate studiului matematic al diferitelor categorii de medii deformabile. Această diversitate se reflectă în diversitatea de discipline în care mecanica mediului deformabil se divide : teoria elasticității, teoria plasticității, reologia, mecanica fluidelor, dinamica gazelor etc.

Ne mărginim la a indica aici câteva titluri din uriașa bibliografie referitoare la domeniul teoriei plasticității, cel mai apropiat de domeniul care ne interesează direct : monografiile lui A. Freudenthal și H. Geiringer [1] (partea II) ; A. Iliușin [1] ; L. Kaceanov [1] ; A. Nadai [1] ; W. Prager și Ph. Hodge [1] ; articolele lui Ph. Hodge [1] ; W. Koiter [1] ; W. Olszak et al. [1] ; W. Prager [1].

Pentru domeniul încă mai vast al reologiei, vezi T. Alfrey [1] ; F. Eirich [1] ; A. Freudenthal și H. Geiringer [1] (partea I) ; M. Reiner [1].

Cu privire la problemele generale ale mecanicii mediilor continue deformabile, vezi P. Germain [1] ; W. Prager [2] ; L. Sedov [1], [2] ; și mai cu seamă C. Truesdell și W. Noll [1] și C. Truesdell și R. Toupin [1].

Pentru diferitele domenii ale mecanicii solidului, apropiate de teoria elasticității, vezi indicațiile din § 4.1. În fine, pentru unele din punctele de vedere permițând aprecierea rezistenței și rigidității corpurilor solide, vezi finele § 4.3.

§ 4. MODELUL CORPULUI ELASTIC

a) Ipoteze fundamentale

O definiție exhaustivă a unui model al materiei ar permite să se construiască pe baze axiomatiche disciplina corespunzătoare. Această problemă pusă pentru mecanică (și cunoscută sub numele de „a șasea problemă a lui Hilbert”) e încă departe de a fi rezolvată, fie măcar și pentru unele cazuri particulare. Cu privire la unele încercări recente, vezi A. Eringen [1] și mai ales W. Noll [1]—[4]. Vezi de asemenea C. Truesdell și R. Toupin [1], § 293, unde se expun unele principii generale de respectat în construirea oricărei teorii mecanice : *compatibilitate* cu ecuațiile de conservare (a masei, a momentelor, a energiei etc.) ; *invarianță* în raport cu ale-

gerea coordonatelor; *izotropie* sau *anizotropie* (vezi mai jos); *formulare corectă*, aptă să conducă la teoreme de existență, unicitate și continuitate în raport cu datele; *invarianță dimensională*; *independență materială* (adică comportare a materialului independentă de observator); în fine, *echiprezență* a tuturor mărimilor menite să caracterizeze fenomenul. E vorba aici de o enumerare care nu e completă, îmbrățișând totodată o categorie de corpuri mult mai largă decât cea care ne interesează. Vezi încă C. Truesdell și W. Noll [1], §§19, 19A, 26 și 43. Pentru aplicarea unor principii variaționale generale ale mecanicii, vezi O. Onicescu [1].

În cele ce urmează ne vom limita la a formula câteva ipoteze de bază, menite să caracterizeze *modelul corpului elastic*.

a) Ipoteza spațiului-timp newtonian: *spațiul este euclidian (tridimensional), timpul este independent de coordonatele spațiale, legile lui Newton sînt valabile*. Această ipoteză situează mecanica mediilor continue deformabile în cadrul mecanicii „clasice”.

b) Ipoteza mediului continuu: *orice domeniu elementar conține materie*. Acest punct de vedere își găsește justificare în faptul că dimensiunile corpurilor uzuale depășesc cu mult dimensiunile particulelor elementare. El se menține și pentru corpuri compuse din particule cu proprietăți diferite (microcristalele dintr-un aliaj, cimentul și pietrișul din beton) — cu condiția ca dimensiunile corpurilor să fie foarte mari față de cele ale componentelor.

Această ipoteză permite să privim toate mărimile ca *funcții de punct* în domeniul ocupat de corp, și nu ca funcții de poziția particulelor componente. Datorită ei, mecanica mediilor continui deformabile poate utiliza aparatul analizei clasice. Cu cît e mai mare atenția ce trebuie acordată proprietăților fizice propriu zise ale materialului (ca în anumite variante moderne ale teoriei plasticității, sau în anumite chestiuni de reologie), cu atît mai mult această ipoteză trebuie modificată sau chiar eliminată.

c) Ipoteza rigidizării părților (sau a solidificării): *un corp se află în echilibru dacă și numai dacă forțele ce acționează asupra fiecăreia din părțile sale formează un sistem static echivalent cu zero*. Această ipoteză permite să separăm (imaginar) o parte arbitrară a corpului, înlocuind acțiunea restului prin anumite forțe, și să determinăm aceste forțe astfel ca echilibrul corpului în ansamblu să rămînă intact. Întrucît această parte poate fi arbitrar de mică, sîntem conduși la a formula relațiile de echilibru ca *relații diferențiale*, valabile în orice punct al corpului.

d) Ipoteza dependenței locale: *forțele interioare (tensiunile) sînt funcții de poziție, de deformație, de temperatură etc., dar nu depind explicit de gradientul (derivatele spațiale) ale acestor mărimi*. Aceasta stabilește o legătură punctuală, locală, între parametrii statici și cei geometrici, excluzînd „acțiunea la distanță” și precizînd natura forțelor interioare ca forțe de coeziune intermoleculară.

Ipotezele a, b, c corespund unui cadru mai general și abia ipoteza d introduce noțiuni specifice — rămânând totuși valabilă pentru *orice* mediu continuu și deformabil. Pentru a defini corpul *elastic*, le adăugăm :

e) **Ipoteza elasticității ideale :** *există corespondență biunivocă între deformații și tensiuni* (definite prin generalizări convenabile ale noțiunilor introduse în § 0.2). Aceasta caracterizează deci o anumită *stare a materiei*, stare în care cunoașterea deformațiilor sau cea a tensiunilor dau informații *echivalente*.

Această ipoteză implică caracterul *reversibil* al deformației și concordă cu înțelegerea curentă a noțiunii de corp „elastic” : corp care revine la starea sa inițială odată cu anularea sarcinii. (Pentru corpuri aflate în zona plastică, ipoteza e trebuie înlocuită cu alte supoziții.)

Cu aceasta, modelul corpului elastic e precizat. El este suficient de simplu pentru a permite tratarea cu mijloace matematice a problemelor de rezistență și rigiditate pentru o cuprinzătoare categorie de corpuri. Desigur, acesta este numai unul din punctele de vedere posibile : așa cum se vorbește despre „mecanica fizică” sau despre „mecanica tehnică” în oarecare opoziție cu „mecanica rațională”, tot astfel se poate vorbi despre o *teorie matematică a elasticității*, în oarecare opoziție cu o teorie fizică sau tehnică a aceluiași subiect.

Din acest punct de vedere, teoria elasticității poate fi privită ca o ramură a fizicii matematice (nume destul de impropriu de altfel) : una din cele mai simple din punctul de vedere al modelului adoptat, dar și din cele mai interesante din punct de vedere teoretic, și mai utile în aplicații.

Trebuie să mai arătăm că, deși deformația elastică reprezintă numai o fracțiune a deformației elasto-plastice posibile, în schimb sarcinile în limita cărora corpurile rămân în zona elastică sînt de obicei foarte mari. O teorie bazată pe ipoteza e acoperă astfel un vast cîmp de aplicații. Pe de altă parte, studiul zonei plastice permite utilizarea unor mari rezerve de rezistență (importante mai ales dacă problemele de rigiditate trec pe al doilea plan) și deschide posibilitatea de a descrie procese în care însuși scopul este obținerea de modificări de configurație definitive.

Desigur, la fiecare etapă dată de dezvoltare a metodelor matematice și experimentale, orice complicare a aspectului fizic al unei probleme obligă la simplificări compensatoare ale aspectelor geometrice și statice : teoria plasticității înlocuiește ipoteza e prin alte presupuneri, uneori mai complicate, asupra mecanismului intern al fenomenului, dar ea trebuie atunci să-și limiteze analiza la configurații geometrice și sarcini de natură mai simplă.

Teoria elasticității și teoria plasticității sînt egal necesare. (Exemplu : organele unui laminor trebuie calculate ținînd seama de necesitatea imperioasă de a nu se depăși zona elastică — în timp ce procesul de transformare al semifabricatului în produs finit nici nu poate fi măcar imaginat în afara zonei plastice. A „alege” între cele două teorii e un nonsens : aceasta nu e o problemă de gust sau de modă, ci de exactă adaptare a teoriei la comportarea reală a corpului solid.)

b) Ipoteze simplificatoare

Modelul prezentat conduce în genere la probleme matematice de o extremă dificultate. Adesea însă, se pot adăuga celor cinci ipoteze de mai sus, încă cinci ipoteze care, deși particularizează mai departe cadrul cercetării, permit totuși cuprinderea a numeroase probleme importante. Acestea sînt :

f) Ipoteza hiperelasticității : *lucrul mecanic necesar pentru a deforma corpul depinde numai de starea sa inițială și de cea finală.*

g) Ipoteza liniarității geometrice : *deformațiile sînt expresii diferențiale liniare de deplasările reciproce ale particulelor.*

h) Ipoteza liniarității fizice : *tensiunile sînt funcții liniare de deformații.*

i) Ipoteza izotropiei : *proprietățile mecanice ale materialului nu variază de la o direcție la alta în jurul oricărui punct.*

j) Ipoteza omogenității : *proprietățile mecanice ale materialului nu variază de la un punct la altul în interiorul corpului.*

Caracterul acestor ipoteze este destul de eterogen : ipotezele f, i, j depind de material și de proces, în timp ce g, h sînt presupuneri simplificatoare privind mai ales metoda de studiu (vezi finele § 4.1). Mai notăm că ele nu sînt independente : de exemplu, ipoteza f este o consecință a ipotezelor a—i (chiar dacă j nu e satisfăcută).

Ansamblul ipotezelor a—j conduce la *teoria elasticității liniare a corpurilor izotrope și omogene*. Problema de mecanică se reduce la studiul unui sistem de ecuații cu derivate parțiale de primul ordin, liniare și cu coeficienți constanți. Studiul acestora reprezintă o teorie astăzi aproape tot atît de bine pusă la punct ca teoria potențialului sau teoria ecuației propagării undelor — cu care de altfel se află în strînsă legătură. Acest fapt deschide drumul spre utilizarea mijloacelor teoriei funcțiilor de o variabilă complexă, a teoriei ecuațiilor integrale, a analizei funcționale etc.

Renunțînd la una sau alta din ipotezele g—j, se obțin teoriile elasticității neliniare, anizotrope, a corpurilor neomogene etc. Aci rămîn valabile cele spuse mai sus cu privire la raporturile cu teoria plasticității : orice cîștig în generalitatea ipotezelor fizice sau matematice este însoțit de o pierdere de generalitate referitoare la configurația sau solicitarea corpului ce poate fi studiat. Și cel mai adesea, tocmai soluțiile teoriei „clasice” dau sugestii și metodele necesare pentru abordarea acestor domenii încă foarte dificile.

Astfel, chiar fără a recurge la modele mai perfecționate decât cel al corpului elastic, ne lovim de mari dificultăți; și chiar și în cadrul teoriei liniare a corpurilor omogene și izotrope chestiunea construirii efective a soluțiilor rămîne adesea deschisă, și sîntem încă departe de a putea da răspuns tuturor întrebărilor pe care tehnica contemporană le pune.

Acestea nu sînt motive de alarmă. Căci, după cum spunea Hilbert : *„Atîta timp cît o ramură a științei oferă surplus de probleme, ea este viabilă; sărăcia de probleme înseamnă moartea, sau încetarea dezvoltării sale independente”*.

CAPITOLUL 1

STAREA DE DEPLASARE ȘI STAREA DE DEFORMAȚIE A MEDIULUI CONTINUU

§ 1. TEORIA GEOMETRICĂ A MEDIULUI CONTINUU

a) Notatii

Vom considera corpuri ce ocupă în spațiul *euclidian* \mathcal{E}_3 domenii \mathcal{V} , de frontiere \mathcal{S} . Orice domeniu va fi raportat la un sistem de coordonate carteziene ortogonale $Ox_1x_2x_3$ (sau $Oxyz$) *fixe*. Versorii axelor se vor nota i_1, i_2, i_3 (sau i, j, k). Raza vectoare a oricărui punct, *ca și punctul însuși*, se vor nota cu același simbol: x, y, ξ etc. Orice funcție de punctul x se va nota $f(x)$, sau $f(x_1, x_2, x_3)$ sau încă $f(x, y, z)$ sau în fine $f(x_i)^1$.

Unele notații, proprietăți și relații referitoare la mulțimile de puncte într-un spațiu euclidian (cu referire specială la planul \mathcal{E}_2 și la dreapta \mathcal{E}_1 , dar ușor generalizabile la \mathcal{E}_3) sînt date în §§ A.1 și A.3. Vom sublinia aici numai unele proprietăți de însemnătate imediată.

Pentru a scurta scrierea formulelor, derivatele parțiale se vor nota

$$\partial F / \partial x_i \equiv F_{,i}. \quad (1)$$

Indicii 1, 2, 3 vor fi utilizați chiar dacă variabilele vor fi scrise x, y, z . În coordonate polare vom folosi notațiile $F_{,r}; F_{,\theta}; F_{,\varphi}$. Pentru funcții de două variabile complexe conjugate $z = x_1 + ix_2, \bar{z} = x_1 - ix_2$, derivatele se vor scrie sub forma $F_{,z}$ și $F_{,\bar{z}}$.

Semnul „sumă” în raport cu indici literali care se repetă (indici muți) va fi în general omis: vom scrie deci

$$A_1B_1 + \dots + A_nB_n \equiv A_jB_j, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (2)$$

Dacă un indice care se repetă *nu este* indice de sumare, aceasta nu riscă să producă confuzii în eventuale egalități, dacă el apare ca indice simplu în celălalt membru al egalității. Dacă totuși dubiul e posibil, vom face uz de semnul de avertizare (!). Astfel, x_j^2 va fi suma $\Sigma x_j x_j$, în timp ce $x_j^2(!)$ va fi patratul variabilei x_j . Pentru a evita orice ambiguitate, ne vom servi totuși uneori și de semnul Σ .

Parantezele drepte [] vor avea utilizări multiple. În primul rînd, ele vor fi folosite, se înțelege, ca paranteze. Vor mai fi folosite pentru a indica intervalele închise $[a, b]$ sau deschise $]a, b[$; dimensiunea unei

¹⁾ Orice exagerări puriste în astfel de chestiuni duc pînă la urmă la notații greoaie

mărimi fizice : $[\sigma] = \text{FL}^{-2}$; variația unei funcții între două puncte : $[\varphi]_{x^0}^{x^1} = \varphi(x^1) - \varphi(x^0)$; variația unei funcții pe o curbă închisă : $[\varphi]_{\mathcal{C}}$. Ele vor servi de asemenea pentru scrierea matricelor : $[a_{ij}]$, și a determinantilor : $\text{Det } [a_{ij}]$. Desigur, nici o confuzie nu e posibilă, ținând seama de fiecare dată de context.

Pentru scopurile noastre, e inutil să considerăm domenii oarecare în \mathcal{E}_3 . Ne vom mărgini la domenii definite de frontierele lor; mai departe, vom considera numai frontiere ce permit utilizarea formulelor integrale de tip Gauss, Green, Stokes etc.; mai particular, ne vom limita la frontiere pentru care se pot formula și rezolva problemele fundamentale ale teoriei potențialului.

Pentru acest motiv, vom considera numai frontiere \mathcal{S} , compuse dintr-un număr finit de părți *posedând o arie* (M. Nicolescu et al. [1], vol. 2, cap. 16). Pentru aceasta e suficient ca fiecare astfel de parte să admită o reprezentare parametrică

$$x_i = x_i(\alpha, \beta), \quad i = 1, 2, 3, \quad (3)$$

unde punctul (α, β) descrie un domeniu măsurabil Jordan, iar funcțiile (3) posedă derivate parțiale de primul ordin integrabile în acest domeniu (ceea ce e asigurat dinainte dacă ele sînt de clasă C^1).

Dacă \mathcal{S} posedă arie și nu conține linii multiple, formulele lui Gauss, Green, Stokes sînt valabile.

Mai departe, să presupunem că \mathcal{S} e alcătuită dintr-un număr finit de *suprafețe Liapunov* — a căror definiție rezultă din cea din § A.3, pag. 700, schimbînd cuvintele „curbă” și „cerc”, cu „suprafață” și „sferă”. Pentru detalii, vezi N. Günther [1], § 1.1; A. Tihonov și A. Samarskii [1], § 4.5, punctul 7. Orice suprafață Liapunov posedă arie. Printr-o schimbare de coordonate, ecuația unei suprafețe Liapunov se poate scrie, în vecinătatea oricărui punct al ei, sub forma

$$x_3 = f(x_1, x_2). \quad (4)$$

Dacă $f(x_1, x_2) \in C^2$, condițiile lui Liapunov sînt verificate; suprafețele Liapunov pot fi deci privite ca generalizări ale suprafețelor cu curbura continuă.

Pentru domenii mărginite de suprafețe Liapunov, problemele lui Dirichlet, Neumann și mixtă (pentru ecuația lui Laplace) au soluție; această soluție e unică și stabilă pentru valori la limită suficient de regulate.

Vom considera numai corpuri ce ocupă *domenii* (mulțimi conexe și deschise de puncte în \mathcal{E}_3). Dacă \mathcal{S} este o suprafață închisă și orientabilă, vom nota cu \mathcal{V}^+ domeniul *finit* mărginit de \mathcal{S} , și cu \mathcal{V}^- , domeniul *infinit* avînd aceeași frontieră. Dacă \mathcal{S} e alcătuită din mai multe suprafețe închise și orientabile, care definesc un domeniu (de exemplu o suprafață \mathcal{S}_0 care conține în interior mai multe suprafețe \mathcal{S}_i exterioare una celeilalte, și fără puncte comune), acest domeniu va fi notat \mathcal{V}^i (interior); complementarul lui $\mathcal{V}^i + \mathcal{S}$ față de \mathcal{E}_3 e o mulțime neconexă, care se va nota \mathcal{V}^e (exterior).

Dacă o proprietate e adevărată în \mathcal{V} , ea nu e cu necesitate valabilă și pe \mathcal{S} . Dacă o anumită proprietate e valabilă atât în \mathcal{V} , cât și într-o porțiune $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$, trebuie specificat că ea e valabilă în $\mathcal{V} + \mathcal{S}'$.

b) Continuitatea funcțiilor

Să considerăm o funcție f definită în anumite puncte din \mathcal{V} . Dacă punctul x aparține lui \mathcal{V} (ceea ce se scrie $x \in \mathcal{V}$); dacă $f(x)$ are sens; și dacă pentru orice șir de puncte x_n ce tind către x (vezi § A.3, pag 693) și pentru care $f(x_n)$ are sens, avem

$$f(x) = \lim f(x_n), \quad (5)$$

atunci se spune că f este *continuă* în x . (Vezi și § A.1).

Dacă funcția f nu este definită în x , dar limita din (5) există și e unică, oricare ar fi șirul $x_n \rightarrow x \in \mathcal{V}$, relația (5) constituie *definiția* funcției f extinse în punctul x ; spunem că f poate fi *prelungită prin continuitate* în x (pe scurt: f este *prelungibilă* în x).

Continuitatea pe \mathcal{S} se definește similar.

Dacă (5) e valabil pentru orice $x, x_n \in \mathcal{V} + \mathcal{S}$, se spune că $f(x)$ este continuă în *domeniul închis* $\overline{\mathcal{V}} = \mathcal{V} + \mathcal{S}$.

Pentru o funcție $f(x)$ definită în \mathcal{V} , se poate întâmpla ca $\lim f(x)$ pentru $x \rightarrow x_0, x_0 \in \mathcal{S}$, să existe și să fie unic determinată (oricare ar fi drumul interior pe care $x \rightarrow x_0$). În acest caz, se ia *prin definiție*

$$f(x_0) = \lim f(x), \text{ pentru } x \in \mathcal{V}, x \rightarrow x_0 \in \mathcal{S}, \quad (6)$$

și se spune că $f(x_0)$ este *valoarea la limită* a lui $f(x)$ în x_0 .

Dacă $f(x)$ e definită atât în \mathcal{V}^+ , cât și în \mathcal{V}^- , vom scrie

$$f(x) = \begin{cases} f_+(x) & \text{pentru } x \in \mathcal{V}^+, \\ f_-(x) & \text{pentru } x \in \mathcal{V}^-, \end{cases} \quad (7)$$

dacă o astfel de distincție e necesară. (Dacă e cazul, indicii $+$, $-$ trebuie înlocuiți cu i , e .)

Mai departe, vom nota

$$f^+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0 \in \mathcal{S}} f_+(x), \quad f^-(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0 \in \mathcal{S}} f_-(x) \quad (8)$$

în punctele în care aceste limite (fiecare din ele unică, dar nu neapăra egale între ele!) există. Dacă astfel de limite există pentru orice $x_0 \in \mathcal{S}'$, se spune că f e *prelungibilă* pe porțiunea \mathcal{S}' a frontierei (eventual pe întreaga frontieră, dacă $\mathcal{S}' = \mathcal{S}$) *dinspre* \mathcal{V}^+ , respectiv *dinspre* \mathcal{V}^- .

Uneori, funcția $f(x_0)$ poate fi definită pentru $x_0 \in \mathcal{S}$ printr-un algoritm diferit de cel din (7), (8). Dar prin *valoare la limită* înțelegem întotdeauna valoarea obținută prin prelungirea prin continuitate (vezi și §§ 7.2 și A.11).

c) Medii continue

Renunțând la modelul atomistic al materiei, vom presupune că aceasta e distribuită *continuu* în \mathcal{V} , ceea ce revine la a spune că orice punct geometric din \mathcal{V} este un punct material.

Să considerăm un punct $x \in \mathcal{V}$ și un domeniu $\mathcal{V}' \subset \mathcal{V}$, astfel încât $x \in \mathcal{V}'$. Notînd volumul lui \mathcal{V}' cu $\text{mes}(\mathcal{V}')$, diametrul său (vezi (A.3.3)) cu $d(\mathcal{V}')$, și cantitatea de materie (masa) conținută în \mathcal{V}' cu $m(\mathcal{V}')$, definim *densitatea* în x prin relația

$$\rho(x) = \lim_{d(\mathcal{V}') \rightarrow 0} \frac{m(\mathcal{V}')}{\text{mes}(\mathcal{V}')}, \quad \text{pentru } x \in \mathcal{V}', \quad d(\mathcal{V}') \rightarrow 0, \quad (9)$$

pentru toate domeniile \mathcal{V}' posibile. (Analog se definește *greutatea specifică* în x .) Ipoteza mediului continuu revine la a spune că $\rho(x)$ există, e pozitivă și mărginită în \mathcal{V} .

Domeniul \mathcal{V} care conține materie distribuită în acest mod se numește *mediu* sau *corp continuu*. Vom nota cu \mathcal{V} atât domeniul, cât și corpul însuși.

Dacă $\rho(x) = \text{const.}$, atunci \mathcal{V} e *omogen* (din punctul de vedere al densității).

Definind analog densitatea superficială sau liniară, putem considera corpuri continue bi- sau unidimensionale (suprafețe sau curbe materializate).

Proprietățile fizice, chimice etc. ale materiei din \mathcal{V} ne vor fi complet indiferente în capitolul de față.

d) Deplasări și deformații

Fie dat un corp \mathcal{V} nesupus nici unei acțiuni exterioare. Această stare (irealizabilă practic, și concepută numai ca stare ideală) se numește *stare naturală*. Dacă dorim să subliniem că în starea naturală anumiți parametri se anulează, o vom numi încă *stare nulă* în raport cu ei.

Să presupunem acum că asupra corpului acționează un sistem de forțe și de legături geometrice. Materia din \mathcal{V} trece în altă poziție din spațiu, pe care o vom nota cu \mathcal{V}^* , de frontieră \mathcal{S}^* . (Elementele păstrează notațiile inițiale, prevăzute cu un asterisc.)

Pentru ca \mathcal{V} să se afle în echilibru ca corp deformabil, trebuie mai întîi ca sistemul forțelor aplicate (inclusiv reacțiunile produse de legături) să fie static echivalent cu zero. (Dacă \mathcal{V} nu este mărginit, această condiție nu e necesară.)

În cele ce urmează, ne vom limita la cazul trecerii corpului \mathcal{V} de la o poziție de echilibru, la o alta. Poziția fiecărui punct material din \mathcal{V} , raportată la coordonatele fixe, suferă deci modificări: acest proces se numește *deplasare*.

Distanțele reciproce dintre puncte, ca și unghiurile dintre elementele liniare, variază de asemenea: acest proces se numește *deformație*.

În ansamblu, trecerea de la starea \mathcal{V} la \mathcal{V}^* se va numi și ea *deformație* („modificare a formei”). Starea naturală se va numi uneori stare de deformare nulă sau stare de deplasare nulă — după caz.

Vom părăsi deci cadrul mecanicii solidului rigid pe o cale pur geometrică, studiind transformarea domeniului \mathcal{V} în \mathcal{V}^* și făcând abstracție de sarcini, de legături și de proprietățile materiei din \mathcal{V} .

Pentru o analiză modernă și detaliată a chestiunii, vezi C. Truesdell și R. Toupin [1], partea B, I.

§ 2. STAREA DE DEPLASARE

a) Sisteme de coordonate

Pentru a cerceta comportarea unei vecinătăți a unui punct x , trebuie să considerăm un al doilea punct y , apropiat de x , și să examinăm pozițiile ocupate de particulele aflate inițial în x și y .

Toate mărimile se raportează la sistemul de coordonate *fix*. Acest mod de a raționa, în care se urmărește deci comportarea *elementelor materiale* antrenate de deformație, în timp ce sistemul de coordonate rămâne fix, este atribuit lui Lagrange — cu toate că în fapt apare încă la Euler.

Punctul de vedere opus, caracterizat prin studierea a ceea ce se petrece în vecinătatea unui *punct geometric* fix, independent de punctul material care coincide la un moment dat cu el, aparține de asemenea lui Euler. (Vezi P. Germain [1], § 3.1; C. Iacob [5], §§ 4.1 și 4.4; I. Sokolnikoff [2], § 1.11.) Distincția între cele două puncte de vedere devine esențială atunci când deplasările sînt mari: în mecanica fluidelor, teoria neliniară a elasticității etc. (Vezi de ex. I. Goldenblatt [1]; W. Prager [2]; L. Sedov [2].)

Vom face sistematic uz de punctul de vedere asociat numelui lui Lagrange, raportînd deci elementele *materiale* la coordonatele *inițiale* (ale corpului nedeformat).

b) Vectorul deplasare

Fie date două puncte x și $y = x + \xi$, și fie cunoscută legea care stabilește corespondența dintre punctele domeniilor \mathcal{V} și \mathcal{V}^* :

$$x_i^* = f_i(x), \quad i = 1, 2, 3. \quad (1)$$

Dacă deplasările particulelor sînt mici (vom da mai târziu precizări în acest sens), relațiile (1) se mai pot scrie sub forma

$$x_i^* = x_i + u_i(x), \quad i = 1, 2, 3, \quad (2)$$

unde u_i au valori mici, sau încă

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x}). \quad (3)$$

(În loc de \mathbf{x} , \mathbf{x}^* de la noi, se întâlnește frecvent notația \mathbf{a} , \mathbf{x}).

Vectorul \mathbf{u} (de componente u_1, u_2, u_3 sau încă u, v, w) se numește *vectorul deplasare*. Dimensiunea sa este cea a unei lungimi: $[\mathbf{u}] = L$. Deplasările se măsoară în centimetri (uneori în milimetri).

Proprietățile funcțiilor f_i și u_i depind de felul în care presupunem că se realizează trecerea de la \mathcal{V} la \mathcal{V}^* . Dacă ea se produce fără apariție de fisuri sau goluri, rezultă că funcțiile f_i trebuie să fie continue. Dacă această trecere e reversibilă (ipoteza elasticității ideale), transformarea (1) trebuie să posede o inversă, de asemenea continuă. Prin urmare, trecerea de la starea \mathcal{V} la starea \mathcal{V}^* se realizează printr-o transformare *biunivocă* și *bicontinuă*.

Variația de volum e caracterizată de jacobianul transformării (1). Pentru ca o porțiune de volum nenul din \mathcal{V} să treacă într-o porțiune de volum nenul în \mathcal{V}^* și reciproc, e necesar și suficient ca $f_i \in C^1(\mathcal{V})$ și jacobianul transformării (1) să fie mărginit și nenul. Transformarea (1) trebuie să fie deci o transformare *regulată* (vezi de ex. M. Nicolescu et al. [1], § 8.7, pet. 3).

c) Transformarea componentelor vectorilor

Conform notațiilor de mai sus, punctele \mathbf{x}, \mathbf{y} trec în $\mathbf{x}^* = \mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x})$, respectiv $\mathbf{y}^* = \mathbf{y} + \mathbf{u}(\mathbf{y})$, iar vectorul ξ ce le unește devine $\xi^* = \xi + \delta\xi$. Evident, avem $\xi + \mathbf{u}(\mathbf{y}) = \mathbf{u}(\mathbf{x}) + \xi^*$, și deci

$$\xi_i^* = \xi_i + u_i(\mathbf{x} + \xi) - u_i(\mathbf{x}), \quad (4)$$

sau încă

$$\delta\xi_i = u_i(\mathbf{x} + \xi) - u_i(\mathbf{x}). \quad (5)$$

Dacă $u_i \in C^2(\mathcal{V})$, atunci se poate scrie formula lui Taylor cu doi termeni și rest și deci (5) devine

$$\delta\xi_i = u_{i,j} \xi_j, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (6)$$

unde derivatele sînt calculate în \mathbf{x} . (Restul tinde la zero odată cu ξ_i^2 și deci (6) poate fi privită ca formulă *exactă* într-o vecinătate suficient de mică a punctului \mathbf{x} .)

Componentele elementului liniar ξ devin după deformație

$$\xi_i^* = (\delta_{ij} + u_{i,j}) \xi_j, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (7)$$

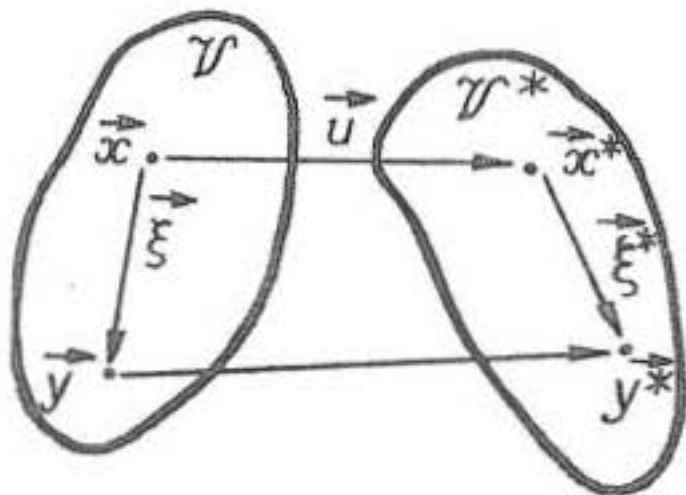


Fig. 1.2.1.

unde δ_{ij} sînt componentele tensorului lui Kronecker

$$\delta_{ij} = 1 \text{ pentru } i = j, \quad \delta_{ij} = 0 \text{ pentru } i \neq j. \quad (8)$$

În felul acesta, am obținut relații liniare între componentele înainte de deformație și cele după deformație ale elementului liniar ξ . Pentru ca ele să fie valabile, trebuie numai ca ξ_i să fie suficient de mici. Sub formă dezvoltată, relațiile (7) se scriu

$$\begin{aligned} \xi_1^* &= (1 + u_{1,1})\xi_1 + u_{1,2}\xi_2 + u_{1,3}\xi_3, \\ \xi_2^* &= u_{2,1}\xi_1 + (1 + u_{2,2})\xi_2 + u_{2,3}\xi_3, \\ \xi_3^* &= u_{3,1}\xi_1 + u_{3,2}\xi_2 + (1 + u_{3,3})\xi_3. \end{aligned} \quad (9)$$

§ 3. DEFORMAȚIA OMOGENĂ

Să alegem pentru (2.1) o formă cît mai simplă : transformarea afină

$$x_i^* = a_{ij}x_j + a_i, \quad (1)$$

(a_{ij} , a_i — constante). Din (2.2) obținem

$$u_i = x_i^* - x_i = (a_{ij} - \delta_{ij})x_j + a_i. \quad (2)$$

Componentele u_i sînt deci și ele funcții liniare. Pe de altă parte, dacă

$$u_i = \alpha_{ij}x_j + a_i, \quad (3)$$

(α_{ij} , a_i — constante), atunci

$$x_i^* = x_i + u_i = (\delta_{ij} + \alpha_{ij})x_j + a_i, \quad (4)$$

unde, pentru a reveni la (1), e suficient să notăm $\delta_{ij} + \alpha_{ij} = a_{ij}$.

Dacă determinantul $\text{Det}[a_{ij}]$ nu e nul, inversa transformării (1) există și este de asemenea o transformare afină.

Proprietățile cunoscute ale acestor transformări arată că, în urma deformației (1), un plan se transformă într-un plan ; o dreaptă (intersecție a două plane) — într-o dreaptă ; un segment — într-un segment ; un vector — într-un vector.

În particular, componentele unui vector definit de $\xi_i = x_i - x_i^0$ devin după deformație

$$\xi_i^* = (\delta_{ij} + \alpha_{ij})\xi_j. \quad (5)$$

Întrucît aceste formule sînt liniare și omogene, ele conservă egalitatea și paralelismul vectorilor. Coeficienții fiind constanți, două poligoane (sau poliedre) egale și cu laturile (fețele) respectiv paralele, rămîn după deformație egale și cu laturile (fețele) paralele. Două domenii congruente obținute printr-un proces de trecere la limită din două astfel de poligoane sau poliedre rămîn și după deformație congruente. Aceasta înseamnă că

toate părțile corpului se deformează la fel. Din acest motiv, deformația definită de (1) sau (3) poartă numele de *deformație omogenă*.

Formulele (2.7) sînt de același tip cu (5), derivatele parțiale $u_{i,j}$ avînd rolul constantelor α_{ij} . Prin urmare, *orice* deformație este, în primă aproximație, o deformație local omogenă, în vecinătatea punctului considerat.

Se știe că transformările afine formează grup. Pentru a compune două transformări afine

$$x_i^* = (\delta_{ij} + \alpha_{ij}) x_j + a_i, \quad x_k^* = (\delta_{ki} + \beta_{ki}) x_i + b_k, \quad (6)$$

introducem pe cea dintîi în cea de a doua și obținem

$$x_k^{**} = (\delta_{kj} + \alpha_{kj} + \beta_{kj} + \alpha_{ij}\beta_{ki}) x_j + a_k + b_k + \beta_{ki} a_i. \quad (7)$$

Acest grup nu este deci comutativ. Dacă însă parametrii α_{ij} , β_{ij} , a_i , b_i sînt *suficient de mici* pentru ca produse de astfel de cantități să fie neglijabile față de termenii liniari, atunci (7) se reduce la

$$x_k^{**} = (\delta_{kj} + \alpha_{kj} + \beta_{kj}) x_j + a_k + b_k. \quad (8)$$

Astfel de transformări se numesc *transformări afine infinitezimale*: ele formează un grup comutativ, iar constantele ce caracterizează transformarea-produs (8) se obțin prin adunarea constantelor corespunzătoare transformărilor-factori (6). Procesul caracterizat de o astfel de transformare se numește *deformație omogenă infinitesimală*; cuvîntul „infinitezimal” va fi peste tot înțeles numai în acest sens.

Aplicarea succesivă a două sau mai multe astfel de deformații duce la același rezultat, independent de ordinea în care ele se produc; aceasta constituie *principiul superpoziției* deformațiilor. (Vezi mai jos § 4.2, pag. 129, pentru chestiunea mai generală a *superpoziției efectelor*.)

§ 4. DEFORMAȚIA PURĂ INFINITEZIMALĂ ȘI DEPLASAREA RIGIDĂ INFINITEZIMALĂ

a) Deplasarea rigidă

Din relațiile (2.6) și (3.3) rezultă imediat formula

$$\delta \xi_i \equiv \xi_i^* - \xi_i = \alpha_{ij} \xi_j. \quad (1)$$

Variația $\delta \xi$ poate fi privită ca alcătuită din două părți: una datorată unei deplasări rigide a vecinătății lui x în ansamblu, și una datorată variației distanțelor reciproce dintre punctele din această vecinătate. Avem evident

$$\xi^* = \xi + \delta \xi, \quad |\xi^*|^2 = \xi^* \cdot \xi^* = |\xi|^2 + 2\xi \cdot \delta \xi + |\delta \xi|^2,$$

astfel că variația lungimii vectorului ξ e caracterizată de mărimea

$$\delta |\xi|^2 = |\xi^*|^2 - |\xi|^2 = 2\xi \cdot \delta \xi + |\delta \xi|^2. \quad (2)$$

Dacă deformația este infinitezimală, termenul patrat din (2) este neglijabil (vezi formulele (1)).

Dacă avem de a face cu o deplasare rigidă infinitezimală, lungimea vectorilor nu variază, și din (2) obținem

$$\xi \cdot \delta \xi = \xi_i \delta \xi_i = \alpha_{ij} \xi_i \xi_j = 0, \quad (3)$$

ceea ce echivalează cu condiția de antisimetrie

$$\alpha_{ij} + \alpha_{ji} = 0, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (4)$$

Să notăm componentele părții antisimetrice ale matricii α_{ij} cu

$$p_1 = \frac{1}{2}(\alpha_{23} - \alpha_{32}), \quad p_2 = \frac{1}{2}(\alpha_{31} - \alpha_{13}), \quad p_3 = \frac{1}{2}(\alpha_{12} - \alpha_{21}). \quad (5)$$

Ținând seama de relațiile (4), formulele (1) devin acum

$$\delta \xi_1 = p_3 \xi_2 - p_2 \xi_3, \quad \delta \xi_2 = -p_3 \xi_1 + p_1 \xi_3, \quad \delta \xi_3 = p_2 \xi_1 - p_1 \xi_2, \quad (6)$$

sau încă, notînd cu \mathbf{p} vectorul de componente $(p_1, p_2, p_3)^{2)}$:

$$\delta \xi = -\mathbf{p} \times \xi. \quad (7)$$

Dacă ξ este vectorul ce duce de la x_0 la x , așadar $\xi_i = x_i - x_i^0$, urmează evident că $\delta x_i = \delta x_i^0 + \delta \xi_i$; notînd aci $\delta x_i^0 = a_i$, și $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ obținem din (7):

$$\delta \mathbf{x} = \mathbf{a} - \mathbf{p} \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0). \quad (8)$$

Prin urmare, dacă matricea α_{ij} este antisimetrică, deplasarea punctului \mathbf{x} se reduce la o translație (caracterizată de \mathbf{a}) și o rotație (caracterizată de $-\mathbf{p}$), așadar la o *deplasare rigidă infinitezimală a domeniului \mathcal{V} în ansamblul său*, aceeași în orice punct, întrucît \mathbf{a} , \mathbf{p} sînt vectori constanți.

b) Variația distanțelor

Să presupunem acum că transformarea (3.5) e definită de o matrice de componente infinitezimale oarecare α_{ij} . Să descompunem această matrice în suma componentei sale simetrice cu cea antisimetrică:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji} = \frac{1}{2}(\alpha_{ij} + \alpha_{ji}), \quad (9)$$

$$\omega_{ij} = -\omega_{ji} = \frac{1}{2}(\alpha_{ij} - \alpha_{ji}), \quad (10)$$

²⁾ Pentru ceea ce am notat aci cu p_i , se folosesc frecvent notațiile $-p_i$, ceea ce conduce la apariția semnelui $+$ în formule ca (7), (8), (5.7), (5.13.1) etc. Preferăm notațiile alese, dată fiind semnificația acestor mărimi așa cum au fost ele introduse în (5); vezi și mai departe (9)–(11).

astfel încît

$$\alpha_{ij} = \varepsilon_{ij} + \omega_{ij}. \quad (11)$$

Întrucît deformația este infinitezimală, putem face uz de principiul superpoziției și afirma că matricea ω_{ij} din (10) descrie o roto-translație rigidă infinitezimală a domeniului \mathcal{V} . Evident, relațiile (3)–(8) își pierd acum valabilitatea.

Introducînd (11) în (1), obținem

$$\delta \xi_i = (\varepsilon_{ij} + \omega_{ij}) \xi_j. \quad (12)$$

Dacă deformația e infinitezimală, putem neglija termenii patratici și vom căpăta — în loc de (2), (3) — expresia

$$\delta |\xi|^2 = 2 \varepsilon_{ij} \xi_i \xi_j, \quad (13)$$

(unde am ținut seama că $\omega_{ij} \xi_i \xi_j = 0$). Din (5) și (10) deducem acum

$$p_1 = \omega_{23}, \quad p_2 = \omega_{31}, \quad p_3 = \omega_{12}. \quad (14)$$

Prin urmare, cele 6 componente ale părții simetrice a matricii α_{ij} caracterizează variația distanțelor, iar cele 3 componente ale părții sale antisimetrice, rotația rigidă.

c) Matricea deformație

Pentru a stabili semnificația mărimilor ε_{ij} , să calculăm alungirea relativă a unui vector oarecare ξ . Vom nota cu \mathbf{m} versorul

$$\mathbf{m} = \xi / |\xi|, \quad (15)$$

ale cărui componente m_1, m_2, m_3 sînt cosinuşii directori ai lui ξ .

Cantitatea ce ne interesează este deci

$$\varepsilon = \delta |\xi| / |\xi| = (|\xi^*| - |\xi|) / |\xi|. \quad (16)$$

Ea poate fi pozitivă sau negativă (alungire sau scurtare). Obținem ușor

$$|\xi^*|^2 - |\xi|^2 = (|\xi^*| - |\xi|)(|\xi^*| + |\xi|) = \varepsilon |\xi| (\varepsilon |\xi| + 2|\xi|)$$

sau încă, ținînd seama de (13) și (15) :

$$\varepsilon_m \left(1 + \frac{1}{2} \varepsilon_m \right) = \varepsilon_{ij} m_i m_j, \quad (17)$$

unde notația ε_m arată faptul că alungirea relativă depinde de \mathbf{m} și nu de $|\xi|$.

Întrucît deformația este infinitezimală, termenul în ε_m^2 trebuie neglijat. Dar întrucît formula (17) rămîne valabilă și într-un caz mai general

(vezi § 10, Nota la pag. 59), o menținem în această formă. Soluția ecuației (17) se scrie

$$\varepsilon_m = -1 + \sqrt{1 + 2 \varepsilon_{ij} m_i m_j}, \quad (18)$$

unde semnul pozitiv corespunde faptului că $|\xi^*|/|\xi| > 0$.

Fie date acum două elemente liniare $\xi = |\xi| m$, $\eta = |\eta| l$ de componente ξ_i , respectiv η_j . Ținând seama de (12) și (16), obținem pentru cosinul unghiului format de ele după deformare :

$$\cos(\widehat{\xi^*, \eta^*}) = \frac{\xi^* \cdot \eta^*}{|\xi^*| |\eta^*|} = \frac{(\delta_{ij} + \varepsilon_{ij} + \omega_{ij})(\delta_{ik} + \varepsilon_{ik} + \omega_{ik}) \xi_j \eta_k}{|\xi| |\eta| (1 + \varepsilon_m)(1 + \varepsilon_l)}, \quad (19)$$

sau încă, efectuind calculele și reținând termenii de primul ordin :

$$\cos(\widehat{\xi^*, \eta^*}) = \cos(\widehat{\xi, \eta}) (1 - \varepsilon_m - \varepsilon_l) + 2 \varepsilon_{ij} m_i l_j. \quad (20)$$

Întrucît variația distanțelor și a unghiurilor — variație independentă de orice deplasare rigidă — constituie însăși esența procesului de deformare, se spune că cele 6 cantități ε_{ij} caracterizează starea de deformare în \mathcal{V} . Matricea simetrică E^3 de componente ε_{ij} , poartă numele de *matrice a deformăției* (pure și infinitezimale).

Primul termen din (12) reprezintă deci contribuția deformăției pure, iar cel de al doilea, contribuția deplasării rigide la variația componentelor vectorului ξ .

Caracterul infinitezimal al deformăției a fost sistematic folosit (începînd cu (3) și (13)), și deci cele de mai sus nu pot fi extinse la alt tip de deformare fără un prealabil examen critic.

d) Alungiri și alunecări

Componentele matricii E au semnificații geometrice simple. Să considerăm astfel un element ξ paralel cu una din axe, de pildă Ox_1 . Notînd cu ε_{x_1} alungirea relativă a elementelor paralele cu Ox_1 , obținem din (18) : $\varepsilon_{x_1} = -1 + \sqrt{1 + 2 \varepsilon_{11}}$ și în general³⁾

$$\varepsilon_{x_i} = -1 + \sqrt{1 + 2 \varepsilon_{ii}}, \quad (21)$$

sau încă, ținînd seama că componentele ε_{ii} sînt suficient de mici :

$$\varepsilon_{x_i} = \varepsilon_{ii}. \quad (22)$$

Componentele diagonale ε_{ii} sînt deci egale cu *alungirile* relative, după direcții paralele cu axele de coordonate.

³⁾ A se citi ca „epsilon majuscul”, și nu ca „e majuscul”.

⁴⁾ Fără (!), întrucît indicele i apare în ambii membri din (21).

Să considerăm acum un al doilea element η , paralel cu axa Ox_j ($j \neq i$). Întrucît avem $\widehat{(\xi, \eta)} = \frac{1}{2} \pi$, vom nota $\widehat{(\xi^*, \eta^*)} = \frac{1}{2} \pi - \varphi_{ij}$, unde φ_{ij} este modificarea, în urma deformației, a unghiului drept dintre axele Ox_i și Ox_j . Suma din (20) se reduce la un singur termen și obținem — întrucît φ_{ij} este o cantitate mică :

$$\cos \widehat{(\xi^*, \eta^*)} = \sin \varphi_{ij} \cong \varphi_{ij} = 2\varepsilon_{ij}. \quad (23)$$

Componentele ne-diagonale ε_{ij} ale matricii deformației sînt deci egale cu jumătatea modificărilor unghiurilor drepte dintre axele inițiale. Aceste componente poartă numele de *deformații unghiulare* sau *forfecări* sau încă *alunecări*.

Pentru a justifica această ultimă denumire, să considerăm de pildă vectorii $\xi(\xi_1, 0, 0)$, și $\eta(0, \eta_2, 0)$, și să presupunem că singura componentă nenulă a deformației este ε_{12} . Abstracție făcînd de o deplasare rigidă, obținem din (12) vectorii $\xi^*(\xi_1, \varepsilon_{12}\xi_1, 0)$ și $\eta^*(\varepsilon_{12}\eta_2, \eta_2, 0)$.

Avem evident

$$|\xi^* - \xi| = \varepsilon_{12}\xi_1 = \varepsilon_{12}|\xi|, \quad |\eta^* - \eta| = \varepsilon_{12}\eta_2 = \varepsilon_{12}|\eta|,$$

și deci

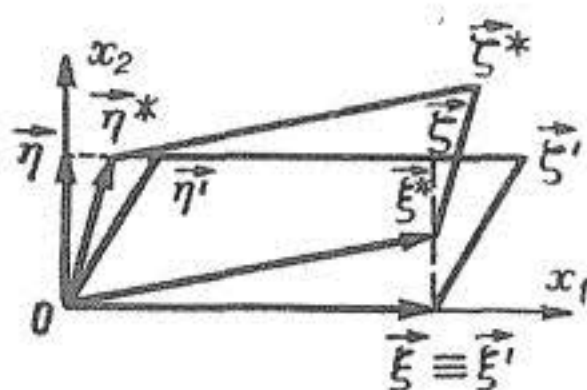


Fig. 1.4.1

$$\varepsilon_{12} = \operatorname{tg} \widehat{\xi^* O \xi} \cong \widehat{\xi^* O \xi},$$

$$\varepsilon_{12} = \operatorname{tg} \widehat{\eta^* O \eta} \cong \widehat{\eta^* O \eta}.$$

Prin urmare, rotind paralelogramul $O\xi^*\eta^*\zeta^*$

în jurul lui O de un unghi $\widehat{\xi^* O \xi}$ așa fel încît latura $O\xi^*$ să cadă pe $O\xi$, atunci, abstracție făcînd de mărimi de ordinul al doilea, punctele η^* , ζ^* , ξ^* trec respectiv în η' , ζ' , $\xi' \cong \xi$. Deformarea dreptunghiului $O\xi\eta\zeta$ poate fi obținută dacă fixăm baza $O\xi$ și facem să *alunece* paralelele la $O\xi$ cu cantități proporționale

cu depărtarea lor la $O\xi$. Același rezultat se obține prin rabaterea paralelogramului $O\xi^*\eta^*\zeta^*$ pe axa $O\eta$: cele două poziții diferă între ele numai printr-o deplasare rigidă.

Orice stare de deformație infinitezimală poate fi deci privită ca rezultat al *suprapunerii* a trei *alungiri* după axele de coordonate și a trei *deformații unghiulare* ale unghiurilor inițial drepte între aceste axe (sau a trei *alunecări* ale straturilor de material paralele cu planele de coordonate).

§ 5. TEORIA GENERALĂ A DEFORMAȚIEI INFINITEZIMALE. ECUAȚIILE GEOMETRICE

Să revenim acum la cazul unei legi oarecare de transformare

$$x_i^* = f_i(x) = x_i + u_i(x), \quad (1)$$

(vezi (2.1) sau (2.2)), care conduce la relațiile

$$\delta \xi_i = u_{i,j} \xi_j, \quad \xi_i^* = (\delta_{ij} + u_{i,j}) \xi_j \quad (2)$$

(vezi (2.6) și (2.7)), unde $u_i \in C^2(\mathcal{V})$. Notînd

$$\alpha_{ij} = u_{i,j} \quad (3)$$

(vezi pag. 40), căpătăm din (4.9) — (4.11):

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}), \quad (4)$$

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} - u_{j,i}), \quad (5)$$

$$u_{i,j} = \varepsilon_{ij} + \omega_{ij}. \quad (6)$$

Pentru vectorul de rotație avem din (5) și (4.14):

$$\mathbf{p} = -\frac{1}{2} \operatorname{rot} \mathbf{u}, \quad (7)$$

astfel că relația (4.7) (valabilă acum numai pentru componentele rotației rigide!) devine

$$\delta \xi = \frac{1}{2} \operatorname{rot} \mathbf{u} \times \xi. \quad (8)$$

În ce privește deformația pură, componentele ei sînt date de (4). Aceste relații, în număr de șase, alcătuiesc sistemul de *ecuații geometrice*. Acesta e un sistem de ecuații cu derivate parțiale, *liniar*, cu coeficienți constanți, de primul ordin în raport cu componentele deplasării și în care componentele deformației intervin numai sub formă întreagă.

O problemă în care parametrii geometrici sînt legați prin relațiile (4) se zice a fi cu *liniaritate geometrică*.

Relațiile (4) pot fi scrise pe scurt sub forma simbolică

$$\mathbf{E} = \operatorname{def} \mathbf{u}, \quad (9)$$

înțelegînd prin aceasta că matricea de componente ε_{ij} este matricea-deformație corespunzătoare unei deplasări \mathbf{u} . Operatorul def este un operator a cărui expresie rezultă din (4); el e definit pe mulțimea tuturor vectorilor de clasă C^2 (formal, chiar C^1); co-domeniul său este o mulțime de matrici simetrice cu doi indici (vezi mai jos § 9). Acest operator joacă aici un rol analog celui al operatorului grad în teoria ecuației lui Laplace. Dacă extindem definiția operatorului grad asupra vectorilor:

$$\operatorname{grad} \mathbf{u} = [u_{i,j}], \quad (10)$$

(i — indice de coloană; j — indice de linie), atunci marcînd cu semnul (T) transpunerea matricilor, urmează că

$$\operatorname{def} \mathbf{u} = \frac{1}{2} [\operatorname{grad} \mathbf{u} + \operatorname{grad}^T \mathbf{u}]. \quad (11)$$

Această scriere e utilă dacă facem uz de coordonate curbilinii.

Dacă înțelegem derivatele parțiale ce apar în (2)–(8) ca fiind calculate într-un punct dat, recădem peste teoria deformației omogene, valabile într-o vecinătate a acelui punct. Coeficienții α_{ij} , ε_{ij} , ω_{ij} , sînt deci funcții de punct. Toate cele spuse despre deformația omogenă rămîn valabile, nu însă în întreg domeniul \mathcal{V} , ci numai pentru fiecare vecinătate, suficient de mică, a fiecărui punct al acestuia.

Dacă ne-am da parametrii ε_{ij} și ω_{ij} ca funcții arbitrare de punct, există riscul ca aceste vecinătăți să nu poată fi „relipite” după deformare în așa fel încît să asigure continuitatea materiei din \mathcal{V} . (Vezi § 9.) Dacă însă ε_{ij} , ω_{ij} sînt definite de (4), (5), atunci transformarea lui \mathcal{V} în \mathcal{V}^* respectă continuitatea.

Vectorul ξ din raționamentele de pînă aci trebuie să fie infinitezimal. Relațiile (2) dau noile sale componente; relațiile (4) dau componentele deformației; în fine, din (4.18) și (4.20) obținem alungirea relativă și deformația unghiulară — totul numai pentru elemente liniare infinitezimale.

Axele de coordonate nu mai trec după deformare în trei axe rectilinii. Într-adevăr, considerînd de pildă o paralelă la Ox_3 :

$$x_1 = x_1^0, \quad x_2 = x_2^0, \quad (12)$$

rezultă că punctele situate pe această dreaptă trec pe curba de ecuații

$$\begin{aligned} x_1^* &= x_1^0 + u_1(x_1^0, x_2^0, x_3); & x_2^* &= x_2^0 + u_2(x_1^0, x_2^0, x_3); \\ x_3^* &= x_3 + u_3(x_1^0, x_2^0, x_3). \end{aligned} \quad (13)$$

Relațiile (4.23) vor da unghiurile — în general diferite de $\frac{1}{2}\pi$ — formate de curbele în care trec axele. Rețeaua (materializată) de coordonate carteziane rectangulare e antrenată de deformare și trece într-un sistem de coordonate curbilinii, în general neortogonale. Pentru cunoașterea acestuia, e necesară cunoașterea funcțiilor $u_i(x)$.

OBSERVAȚIE. Nu există un standard unanim acceptat pentru notarea deformației. Astfel, componentele deformației se notează de către unii autori cu $(e_{xx}, \dots, e_{xy}, \dots)$; de către alții cu $(\varepsilon_x, \dots, \gamma_{xy}, \dots)$ sau încă cu (x_x, \dots, x_y, \dots) . Termenii nediagonali ai deformației sînt adesea luați egali cu $2\varepsilon_{ij}$ — ceea ce complică formulele de transformare tensorială (vezi § 6) și îngreunează stabilirea paralelismului între teoria deformației și cea a tensiunii.

Lucrările ce tind spre utilizarea mijloacelor — sau cel puțin a notațiilor — analizei tensoriale folosesc notații apropiate de cele din text. O informare amplă asupra celor mai uzuale notații se poate găsi în A. Love [1], anexa A. Vezi și mai jos § 2.3, pag. 68.

§ 6. TENSORUL DEFORMAȚIE

Prezintă importanță evidentă posibilitatea de a determina componentele deformației în axe oarecare, dacă ele sînt cunoscute într-un sistem de axe dat. Ne vom limita la cazul unor axe carteziane ortogonale, obținute printr-o rotație din cele inițiale. (O translație nu modifică componentele vectorilor.)

Fie deci că poziția sistemului $Ox'_1x'_2x'_3$ față de sistemul $Ox_1x_2x_3$ e dată de cei 9 cosinuși directori

$$n_{ij} = \cos(x'_i, x_j), \quad (1)$$

sau, mai explicit, de matricea (evident nesimetrică)

	x_1	x_2	x_3
x'_1	n_{11}	n_{12}	n_{13}
x'_2	n_{21}	n_{22}	n_{23}
x'_3	n_{31}	n_{32}	n_{33}

Mărimile n_{ij} sînt legate prin relațiile de normare și ortogonalitate :

$$n_{ik}n_{kj} = n_{ik}n_{jk} = \delta_{ij}^1, \quad i, j, k = 1, 2, 3. \quad (2)$$

Dacă vectorul ξ are componentele ξ_i în sistemul inițial $Ox_1x_2x_3$ și componentele ξ'_i în sistemul $Ox'_1x'_2x'_3$, prin proiecție pe axele noi deducem ușor $\xi'_i = \cos(x'_i, x_j)\xi_j$, adică

$$\xi'_i = n_{ij}\xi_j. \quad (3)$$

Ținînd seama de (2), deducem și relațiile inverse

$$\xi_i = n_{ji}\xi'_j. \quad (4)$$

Întrucît primul membru al relației (4.13) care definește componentele ε_{ij} este evident independent de alegerea axelor, deducem

$$\varepsilon_{ij}\xi_i\xi_j = \varepsilon'_{ij}\xi'_i\xi'_j, \quad (5)$$

unde am notat cu ε'_{ij} componentele *aceleiași* deformații, în noile axe. Introducînd acum (4) în (5), obținem pe rînd

$$\varepsilon'_{ij}\xi'_i\xi'_j = \varepsilon_{ik}\xi_i\xi_k = \varepsilon_{hk}\xi_h\xi_k = \varepsilon_{hk}n_{ih}\xi'_in_{jk}\xi'_j,$$

de unde urmează

$$\varepsilon'_{ij} = n_{ik}n_{jk}\varepsilon_{hk}. \quad (6)$$

Prin urmare componentele ε_{ij} formează un *tensor* (afin ortogonal) simetric de ordinul al doilea : tensorul deformație⁵⁾.

Acest fapt esențial poate conduce la o definiție invariantă a deformației și sluji la transcrierea relațiilor geometrice în coordonate curbilinii oarecare (vezi §4.1, pag. 121). Ca punct de plecare se poate lua de asemenea studiul lungimii elementului liniar într-o metrică oarecare.

Relațiile (6) rămîn evident valabile pentru coordonate curbilinii ortogonale — numai că atunci n_{ij} sînt funcții de punct.

⁵⁾ Întrucît raționamentele se desfășoară într-un spațiu euclidian, noțiunile de covarianță și contravarianță sînt lipsite de conținut, iar așezarea indicilor e indiferentă.

Caracterul tensorial al deformației (și al tensiunii) a fost pus în evidență sub formă geometrică în lucrările lui A. Cauchy cu mult înainte de însăși introducerea denumirii de *tensor* (de către W. Voigt [2]).

Pentru a ușura utilizarea relațiilor (6), explicităm aici două din ele :

$$\begin{aligned}\varepsilon'_{11} &= n_{1k} n_{1k} \varepsilon_{kk} = n_{11}^2 \varepsilon_{11} + n_{12}^2 \varepsilon_{22} + n_{13}^2 \varepsilon_{33} + \\ &\quad + 2 n_{11} n_{12} \varepsilon_{12} + 2 n_{12} n_{13} \varepsilon_{23} + 2 n_{13} n_{11} \varepsilon_{31}, \\ \varepsilon'_{12} &= n_{1k} n_{2k} \varepsilon_{kk} = n_{11} n_{21} \varepsilon_{11} + n_{12} n_{22} \varepsilon_{22} + \\ &\quad + n_{13} n_{23} \varepsilon_{33} + (n_{11} n_{22} + n_{12} n_{21}) \varepsilon_{12} + \\ &\quad + (n_{12} n_{23} + n_{13} n_{22}) \varepsilon_{23} + (n_{13} n_{21} + n_{11} n_{23}) \varepsilon_{31}.\end{aligned}\tag{7}$$

§ 7. DIRECȚIILE PRINCIPALE ALE DEFORMAȚIEI

Cînd vectorul $\xi = y - x$ parcurge tripla infinitate de poziții posibile în jurul punctului x , valorile alungirii relative ε_m (vezi (4.16), (4.18)) variază. Cunoașterea extremelor lui ε_m ca funcție de m poate da o imagine globală a stării de deformație în vecinătatea lui x .

Să luăm originea sistemului de coordonate în x , și să presupunem că am găsit o direcție în lungul căreia ε_m își atinge maximul⁶⁾.

Alegînd această direcție ca axă x'_1 într-un nou sistem de axe, obținem din (4.21)

$$\varepsilon_{x'_1} = -1 + \sqrt{1 + 2 \varepsilon'_{11}},\tag{1}$$

astfel că problema de extremum pentru $\varepsilon_{x'_1}$, este echivalentă cu problema de extremum pentru ε'_{11} ca funcție de parametrii directori (necunoscuți) ai axei x'_1 .

Din (6.7) rezultă că acești parametri sînt n_{11} , n_{12} , n_{13} ; întrucît ei verifică condiția (6.2) pentru $i = j = 1$, adică

$$\sum_{k=1}^3 n_{1k}^2 = 1,\tag{2}$$

vom introduce multiplicatorul lui Lagrange ε și vom căuta soluția problemei de extremum liber pentru funcția

$$F(n_{11}, n_{12}, n_{13}) \equiv n_{1k} n_{1k} \varepsilon_{kk} - \varepsilon \left(\sum_{k=1}^3 n_{1k}^2 - 1 \right).\tag{3}$$

Egalînd cu zero derivatele în raport cu n_{1i} , obținem

$$\partial F / \partial n_{1i} \equiv 2 n_{1k} \varepsilon_{ik} - 2 \varepsilon n_{1i} = 0,\tag{4}$$

⁶⁾ Mărimea ε_m este o funcție continuă de m_i și deci există cel puțin o direcție pentru care ε_m își atinge marginea superioară.

așadar un sistem de trei ecuații omogene

$$(\varepsilon_{ik} - \varepsilon \delta_{ik}) n_{ik} = 0, \quad i, k = 1, 2, 3. \quad (5)$$

Soluția trivială $n_{ik} = 0$ nu e admisibilă, întrucât nu satisface (2). Prin urmare, determinantul principal al sistemului e nul:

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_{11} - \varepsilon & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} - \varepsilon & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} - \varepsilon \end{vmatrix} = 0. \quad (6)$$

Aceasta este o ecuație de grad 3 în ε . Întrucât matricea ε_{ij} este simetrică urmează că toate rădăcinile ecuației (6) sînt reale ⁷⁾.

Dacă cunoaștem componentele ε_{ij} , putem deci rezolva ecuația (6) și apoi și sistemul (2), (5), găsind pentru fiecare din valorile ε , cîte un sistem de valori n_{ik} .

Să notăm cu ε' o soluție oarecare a ecuației (6). Relația (6.6) dă

$$\varepsilon'_{ij} = n_{1i} n_{jk} \varepsilon_{ik}. \quad (7)$$

Dacă n'_{ik} e sistemul de soluții al ecuațiilor (5), corespunzător lui ε' , urmează că

$$\varepsilon_{ik} n'_{ik} = \varepsilon' n'_{1i}. \quad (8)$$

Intervertind în (7) indicii muți i și k , ținînd seama că $\varepsilon_{ik} = \varepsilon_{ki}$, și introducînd aici (8), obținem

$$\varepsilon'_{ij} = n'_{1i} n'_{jk} \varepsilon_{ik} = n'_{1k} n'_{ji} \varepsilon_{ik} = n'_{ji} n'_{1i} \varepsilon'. \quad (9)$$

Întrucît din (6.2) avem $n'_{ji} n'_{1i} = \delta_{j1}$, relația (9) devine

$$\varepsilon'_{1j} = \varepsilon' \delta_{j1}, \quad (10)$$

de unde

$$\varepsilon'_{11} = \varepsilon', \quad (11)$$

$$\varepsilon'_{12} = \varepsilon'_{13} = 0. \quad (12)$$

⁷⁾ Pentru orice matrice patrată cu componente reale a_{ij} ($i, j = 1, 2, \dots, n$), ecuația

$$\text{Det } [a_{ij} - a \delta_{ij}] = 0 \quad (a)$$

are n rădăcini, eventual complexe. Rădăcinile sînt cantitățile a_1, a_2, \dots, a_n pentru care sistemul de ecuații liniare omogene

$$(a_{ij} - a \delta_{ij}) x_j = 0 \quad (b)$$

are soluții nenule, deci pentru care avem

$$a_{ij} x_j = a x_i, \quad (c)$$

unde a este o soluție oarecare a ecuației (a).

Înmulțind relația (c) cu \bar{x}_i și sumînd în raport cu i , obținem

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \bar{x}_i x_j = a \sum_{i=1}^n |x_i|^2. \quad (d)$$

Dacă matricea a_{ij} este simetrică, cantitățile $a_{ij} \bar{x}_i x_j + a_{ji} \bar{x}_j x_i$ sînt reale, deci ambele sume din (d) sînt reale, și orice soluție a ecuației (a) rezultă a fi reală.

După cum se vede, valoarea maximă căutată este egală cu cea mai mare dintre rădăcinile ecuației (6), și ea se determină fără a mai trebui să calculăm în prealabil cantitățile n'_{1i} . Iar dacă axa Ox'_1 corespunde unei rădăcini a ecuației (6), alunecările în raport cu ea sînt nule.

Direcțiile corespunzătoare la două rădăcini distincte ale ecuației (6) sînt ortogonale. Într-adevăr, fie că unor soluții ε' , ε'' le corespund parametrii n'_{1k} , respectiv n''_{1k} . Din relația (5) obținem

$$\varepsilon_{ik} n'_{1k} = \varepsilon' n'_{1i}, \quad \varepsilon_{ik} n''_{1k} = \varepsilon'' n''_{1i}. \quad (13)$$

Înmulțind prima din aceste relații cu n''_{1i} , a doua cu n'_{1i} , sumînd în raport cu indicele i , scăzîndu-le termen cu termen și ținînd seama că $\varepsilon_{ik} = \varepsilon_{ki}$, căpătăm

$$(\varepsilon' - \varepsilon'') n'_{1i} n''_{1i} = 0 \quad (14)$$

de unde, dacă $\varepsilon' \neq \varepsilon''$, urmează relația de ortogonalitate

$$n'_{1i} n''_{1i} = 0. \quad (15)$$

Direcția extremală x'_1 odată determinată, direcțiile x'_2 , x'_3 trebuie deci căutate în planul normal pe x'_1 .

Fiind deci dat sistemul $Ox'_1 x'_2 x'_3$, în care deocamdată numai axa x'_1 e determinată, să introducem un nou sistem de axe $Ox''_1 x''_2 x''_3$ păstrînd neschimbată axa x'_1 . Acest sistem se obține evident prin rotirea planului $x'_1 = 0$ în jurul axei x'_1 de un anumit unghi ϑ .

Notînd prin analogie cu (6.1)

$$n'_{ij} = \cos(x''_i, x'_j) \quad (16)$$

(a nu se confunda cu n'_{ij} din (8)!) obținem matricea

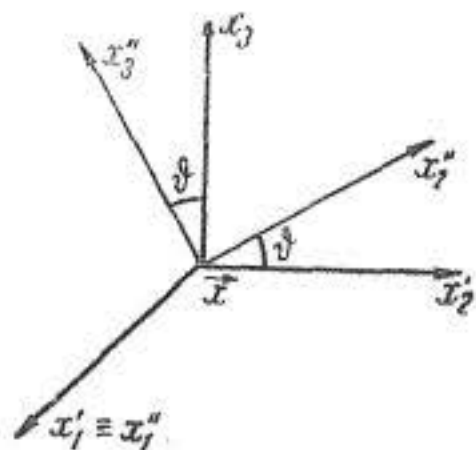


Fig. 1.7.1

	x'_1	x'_2	x'_3
x''_1	1	0	0
x''_2	0	$\cos \vartheta$	$\sin \vartheta$
x''_3	0	$-\sin \vartheta$	$\cos \vartheta$

Din (6.6) deducem și

$$\varepsilon''_{ij} = n'_{ih} n'_{jk} \varepsilon'_{hk},$$

și deci, ținînd seama de valorile n'_{ij} și de (12):

$$\begin{aligned} \varepsilon''_{11} &= \varepsilon'_{11}, \quad \varepsilon''_{12} = \varepsilon''_{13} = 0, \\ \varepsilon''_{22} &= \varepsilon'_{22} \cos^2 \vartheta + 2 \varepsilon'_{23} \cos \vartheta \sin \vartheta + \varepsilon'_{33} \sin^2 \vartheta, \\ \varepsilon''_{33} &= \varepsilon'_{22} \sin^2 \vartheta - 2 \varepsilon'_{23} \cos \vartheta \sin \vartheta + \varepsilon'_{33} \cos^2 \vartheta, \\ \varepsilon''_{23} &= \frac{1}{2} (\varepsilon'_{33} - \varepsilon'_{22}) \sin 2 \vartheta + \varepsilon'_{23} \cos 2 \vartheta, \end{aligned} \quad (17)$$

astfel încît componentele ε'_{1i} rămîn nemodificate.

Să alegem unicul parametru de care mai dispunem, unghiul ϑ , în așa fel încît ε''_{22} să aibă caracter staționar. Anulînd derivata lui ε''_{22} din (17) în raport cu ϑ , obținem pentru ϑ valoarea

$$\vartheta = \frac{1}{2} \arctg [2 \varepsilon'_{23} / (\varepsilon'_{22} - \varepsilon'_{33})], \quad (18)$$

ceea ce are întotdeauna sens.

Cu aceasta sistemul de axe e complet determinat.

Ne rămîne să găsim valorile ε''_{33} și ε''_{23} . Or, derivînd în raport cu ϑ expresia lui ε''_{33} din (17) și punînd condiția ca această derivată să fie nulă, obținem din nou (18). Introducînd această valoare în expresia lui ε''_{23} obținem

$$\varepsilon''_{23} = 0. \quad (19)$$

Prin urmare: în sistemul de axe $Ox''_1 x''_2 x''_3$, componentele de alungire iau valori staționare (printre ele: un maxim și un minim), în timp ce componentele de alunecare se anulează. În orice punct există deci un sistem de axe pentru care deformația e caracterizată de numai trei alungiri. Aceste axe rămîn (local) triortogonale, ele deplasîndu-se ca un ansamblu rigid.

Deformația oarecare se reduce deci la *suprapunerea a trei alungiri*. Cele trei direcții astfel determinate se numesc *direcții principale* (sau *axe principale*) ale deformației infinitezimale în punctul dat. Valorile componentelor ε''_{ii} pe aceste direcții, care coincid cu rădăcinile ecuației (6), se numesc *deformații principale* și se vor nota cu indici simpli: $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$.

OBSERVAȚIE. În definitiv, aceasta revine la a găsi axele principale și valorile proprii ale tensorului deformației. Se știe că dacă reducem o matrice oarecare la axele principale, ea ia forma diagonală. Acesta e sensul relațiilor (12) și (19).

Dacă cunoaștem cele șase componente ale deformației într-un sistem de axe oarecare, putem deci găsi deformațiile principale și direcțiile principale. Reciproc, dacă cunoaștem poziția axelor principale (determinată de trei parametri, de pildă, de unghiurile lui Euler) și deformațiile principale, putem calcula componentele deformației în orice sistem de axe. În ambele cazuri trebuie să cunoaștem șase parametri, funcții de punct.

§ 8. CUADRICELE DEFORMAȚIEI. INVARIANTI

a) Cuadricele deformației

Esențialul din raționamentele anterioare rezidă în caracterul tensorial al deformației. Întrucît în \mathcal{L}_3 componentele unui tensor simetric de al doilea ordin permit construirea unei quadrice, e firesc să căutăm analogul (sau imaginea geometrică) a celor de pînă aci (A. Cauchy [2], [4]).

Să reluăm relația (4.13) și să definim quadricele

$$e(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \equiv \varepsilon_{ij} \xi_i \xi_j = \pm c^2, \quad (1)$$

unde c este o constantă arbitrară, dar fixă.

Aceasta permite să transcriem relația (4.17) sub forma ⁸⁾

$$\varepsilon_m \left(1 + \frac{1}{2} \varepsilon_m \right) = \pm c^2 / |\xi|^2, \quad (2)$$

care e invariantă la o schimbare de axe ortogonale, întrucît atît lungimea $|\xi|^2$, cît și forma patrată e sînt invariante.

Să considerăm acum un vector de direcție ξ și de origine O ; pentru simplitate, îl vom nota tot cu ξ . Să rotim pe ξ în jurul lui x , și să calculăm valorile ε_m corespunzătoare, desigur independente de $|\xi|$. Pentru fiecare astfel de poziție, să alegem acum lungimea $|\xi|$ în așa fel încît

$$|\xi|^2 = \pm c^2 / \varepsilon_m \left(1 + \frac{1}{2} \varepsilon_m \right). \quad (3)$$

Locul geometric al extremităților vectorilor de origine O și de lungime (3) este, în virtutea relațiilor (1), (2), suprafața

$$\varepsilon_m \left(1 + \frac{1}{2} \varepsilon_m \right) |\xi|^2 \equiv e(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \pm c^2, \quad (4)$$

așadar ansamblul a două quadrice cu centru: *quadricele deformației*. Dublul semn arată că avem de a face cu un elipsoid (real) sau cu doi hiperboloizi conjugați.

Cuadricele (4) odată construite, alungirea ε_m corespunzătoare unei direcții oarecare ce trece prin x , se găsește determinînd punctul în care ξ înțeapă quadrica. Calculînd lungimea $|\xi|$, deducem din (4) valoarea produsului $\varepsilon_m \left(1 + \frac{1}{2} \varepsilon_m \right)$, și deci și pe cea a alungirii ε_m , cu semnul său.

Aceasta este imaginea geometrică a rezultatelor din paragrafele anterioare.

Întrucît deformațiile sînt infinitezimale, relațiile ce-și au originea în (4.17) pot fi simplificate prin neglijarea termenului în ε_m^2 . Obținem astfel în loc de (2):

$$\varepsilon_m = \pm c^2 / |\xi|^2. \quad (5)$$

Pentru a determina axele principale ale quadricii (1), sîntem conduși la a rezolva o ecuație care coincide cu (7.6) (vezi G. Vrănceanu [1], § 11.4).

Raportînd quadrica (1) la axele principale, obținem ecuația

$$\varepsilon_1 \xi_1^2 + \varepsilon_2 \xi_2^2 + \varepsilon_3 \xi_3^2 = \pm c^2. \quad (6)$$

⁸⁾ Vezi cele spuse relativ la formula (4.17).

Semi-axele corespunzătoare au lungimile $1/\sqrt{\varepsilon_i}$. Dacă cele trei deformații principale sînt de același semn, obținem deci un elipsoid; în caz contrar, doi hiperboloizi.

OBSERVAȚIE. Aceste quadrice nu au nimic comun cu domeniul în care se transformă, de pildă, o bulă cu centrul în punctul considerat. O astfel de bulă elementară trece într-un elipsoid de semiaxe proporționale cu $(1 + \varepsilon_i)$.

b) Stări particulare de deformație

Dacă două din deformațiile principale sînt egale, se obțin quadrice de revoluție. Dacă toate deformațiile principale sînt egale, quadrica este o sferă și poziția axelor este indiferentă.

Dacă una din deformațiile principale — de exemplu ε_3 — se anulează, (6) se reduce la

$$\varepsilon_1 \xi_1^2 + \varepsilon_2 \xi_2^2 = \pm c^2, \quad (7)$$

ceea ce reprezintă un *cilindru* de generatoare paralele cu Ox_3 .

Pentru $\varepsilon_3 \rightarrow 0$, lungimea semiaxe corespunzătoare din (6) crește la infinit. În cazul (7), deformația după direcția Ox_3 este nulă; după direcții apropiate de Ox_3 , ea e foarte mică (vezi (5)). Din această cauză, starea în care una din deformațiile principale este nulă, poartă numele de *stare de deformație plană*, paralelă cu planul celorlalte două axe principale.

Pentru a trece la axe arbitrare, în așa fel încît să conservăm axa în raport cu care deformația principală este nulă, ne rămîne să rotim axele în jurul acesteia. Un calcul similar celui din (7.17) arată că în noile axe căpătăm $\varepsilon_{31} = \varepsilon_{32} = \varepsilon_{33} = 0$. Prin urmare, starea de deformație plană în raport cu direcția Ox_3 este caracterizată de o matrice

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Se numește *stare de deformație antiplană*, starea descrisă de o matrice

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \varepsilon_{13} \\ 0 & 0 & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Starea în care nu există submatrici, linii sau coloane cu elemente identic nule se numește *stare de deformație spațială* (sau *tridimensională*)⁹⁾.

⁹⁾ Aceste definiții au caracter punctual. Pentru un corp în ansamblul său, nu trebuie să credem că orice stare ar putea fi redusă la o simplă suprapunere de stări antiplane și de stări plane în fiecare punct.

Definiții similare pentru starea de tensiune vor fi date în capitolul 2. Capitolul 5 va fi consacrat studiului unor stări care sînt antiplane în fiecare punct; capitolul 6 — anumitor stări plane; iar capitolele 7—10 — unor stări de deformare spațială.

c) Invarianți

Deși exprimă o realitate de natură mecanică, componentele deformăției sînt mărimi raportate la un sistem de coordonate. Este firesc să căutăm un mod invariant de a caracteriza starea de deformare. Pentru aceasta, dezvoltînd determinantul din (7.6), obținem ¹⁰⁾

$$\varepsilon^3 - E_1 \varepsilon^2 + E_2 \varepsilon - E_3 = 0, \quad (10)$$

unde am notat

$$\begin{aligned} E_1 &= \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}, \\ E_2 &= \varepsilon_{11} \varepsilon_{22} + \varepsilon_{22} \varepsilon_{33} + \varepsilon_{33} \varepsilon_{11} - \varepsilon_{12}^2 - \varepsilon_{23}^2 - \varepsilon_{31}^2, \\ E_3 &= \text{Det } [\varepsilon_{ij}]. \end{aligned} \quad (11)$$

Cel mai adesea vom nota $E_1 = \theta$. Se demonstrează cu ușurință (vezi § 10, pag. 60), că θ evaluează *dilatarea de volum*.

Întrucît $1/\sqrt{\varepsilon_i}$ sînt lungimile semiaxelor cuadrice deformăției, rezultă că soluțiile ε_i ale ecuației (10) sînt invariante la o schimbare de axe.

Relațiile dintre rădăcinile și coeficienții ecuației (10) conduc la

$$\begin{aligned} E_1 &= \theta = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3, \\ E_2 &= \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_2 \varepsilon_3 + \varepsilon_3 \varepsilon_1, \\ E_3 &= \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3, \end{aligned} \quad (12)$$

de unde conchidem că și mărimile E_1, E_2, E_3 sînt invariante. Ele se numesc respectiv *invariantul liniar, patrat și cubic* al deformăției. (Orice alt invariant al deformăției se exprimă sub formă rațională prin intermediul acestora.)

În particular, din (11) și (5.4) obținem relația simplă și importantă

$$\theta = u_{j,j} = \text{div } u. \quad (13)$$

Relațiile (12) pot fi privite drept un caz particular al relațiilor (11). „Cazul particular” este însă echivalent cu cel general: orice relație scrisă sub formă invariantă poate fi ușor transcrisă într-un sistem oarecare de axe. (Vezi de exemplu, § 10, pag. 61.)

Cunoașterea axelor cuadrice este echivalentă cu cunoașterea invariantilor, astfel că starea de deformare e deplin determinată dacă cunoaștem poziția axelor principale și cei trei invarianti.

¹⁰⁾ A se citi E ca „epsilon majuscul”.

Amintim că toate cantitățile cu care avem de a face în acest paragraf sînt funcții de x_1, x_2, x_3 .

Pentru o mai largă informare asupra teoriei invariantilor, vezi de pildă I. Goldenblatt [1], sau V. Novojilov [1], [3].

Aceste noțiuni joacă un rol esențial în teoria neliniară a elasticității și în teoria plasticității.

§ 9. ECUAȚIILE DE COMPATIBILITATE

Pentru a cunoaște starea corpului deformat, trebuie să dispunem de componentele deformației și ale rotației rigide locale — așadar de cele nouă cantități $u_{i,j}$. Întrucît mărimile $\varepsilon_{ij}, \omega_{ij}$ dau numai informații cu caracter local, trebuie să cunoaștem chiar componentele u_i ale deplasării.

Pentru ca raporturile dintre deplasări și deformații să fie clarificate, trebuie să putem reconstitui cu ajutorul deformațiilor, tabloul stării de deplasare. Cu acest prilej, vom putea da răspuns și la chestiunea pusă în § 5, pag. 46 : problema *compatibilității* deformațiilor și a deplasărilor rigide elementare, sau încă a *continuității* procesului de deformație în ansamblul său.

Dacă în ecuațiile (5.4) cunoaștem componentele lui u , putem calcula imediat cele șase componente ale lui E . Dacă însă cunoaștem cele șase componente ale unui tensor simetric de al doilea ordin, fie ele ε_{ij} , cele șase relații (5.4) constituie un sistem de ecuații supradeterminat (în număr mai mare decît cel al funcțiilor necunoscute), și el nu poate deci avea soluție pentru ε_{ij} *arbitrari*. Cu alte cuvinte, nu orice tensor simetric de al doilea ordin poate fi pus sub forma *def u*.

Condiții *necesare* pentru ca un tensor E să fie de forma *def u* au fost formulate de către B. de Saint-Venant. Rezolvarea generală a problemei o dă următoarea teoremă a lui G. Kirchhoff ([3], § 27.4), pusă la punct de V. Volterra [1] și E. Cesaro [1] :

Condiția necesară și suficientă pentru ca un tensor simetric de al doilea ordin E , definit într-un domeniu simplu conex \mathcal{V} , să poată fi pus sub forma

$$E = \text{def } u, \quad (1)$$

este ca componentele sale ε_{ij} să satisfacă condițiile lui Saint-Venant (12).

Pentru a demonstra teorema, să punem sistemul (5.4) sub forma

$$u_{i,j} + u_{j,i} = 2 \varepsilon_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (2)$$

Fie dat un punct x^0 și fie cunoscute aci valorile deplasării u_i^0 și ale rotației ω_{ij}^0 . Dacă valorile $u_{i,j}$ ar fi cunoscute peste tot în \mathcal{V} , deplasările u_i^1 într-un punct oarecare x^1 ar fi de forma

$$u_i^1 = u_i^0 + \int_{x^0 x^1} u_{i,j} dx_j, \quad (3)$$

integrala depinzînd numai de capetele drumului de integrare.

Introducînd (5.6) în (3), putem scrie

$$u_i^1 = u_i^0 + \int_{x_j^0 x_j^1} \varepsilon_{ij} dx_j + \int_{x^0 x^1} \omega_{ij} dx_j. \quad (4)$$

Întrucît u_i^0 și ε_{ij} sînt cunoscute, ne rămîne să calculăm

$$I_i = \int_{x^0 x^1} \omega_{ij} dx_j. \quad (5)$$

Înlocuind dx_j prin $d(x_j - x_j^1)$, unde x_j^1 sînt valori fixe, avem

$$I_i = -\omega_{ij}^0(x_j^0 - x_j^1) - \int_{x^0 x^1} (x_j - x_j^1) d\omega_{ij}. \quad (6)$$

Dar diferențialele $d\omega_{ij}$ depind de $\omega_{ij,k}$ și găsim ușor

$$\omega_{ij,k} = \varepsilon_{ik,j} - \varepsilon_{jk,i}. \quad (7)$$

Introducînd (7) în integrala din (6), obținem deci

$$\int_{x^0 x^1} (x_j^1 - x_j) d\omega_{ij} = \int_{x^0 x^1} (x_j^1 - x_j) (\varepsilon_{ik,j} - \varepsilon_{jk,i}) dx_k,$$

astfel că (4) conduce la *formula lui Kirchhoff-Cesaro*

$$u_i^1 = u_i^0 + \omega_{ij}^0(x_j^1 - x_j) + \int_{x^0 x^1} U_{ik} dx_k, \quad (8)$$

unde

$$U_{ik} = \varepsilon_{ik} + (x_j^1 - x_j) (\varepsilon_{ik,j} - \varepsilon_{jk,i}). \quad (9)$$

Din considerente mecanice evidente, să admitem că vectorul-deplasare este o funcție *uniformă* (funcție de punct)¹¹⁾. Aceasta cere ca (8) să nu depindă de drumul de integrare, de unde urmează (condiție necesară și suficientă!)

$$U_{ik,h} = U_{ih,k}. \quad (10)$$

Introducînd aci expresia U_{ik} din (9), obținem

$$(x_j^1 - x_j) (\varepsilon_{ik,jh} - \varepsilon_{jh,ik}) = (x_j^1 - x_j) (\varepsilon_{ih,jk} - \varepsilon_{jk,ih}), \quad (11)$$

unde trebuie să presupunem $h \neq k$ (pentru $h = k$, (10) se reduce la o identitate) și $i \neq j$ (pentru $i = j$, parantezele din (11) sînt nule).

Dat fiind că relația (11) trebuie să fie valabilă pentru orice valori ale diferenței $x_j^1 - x_j$, obținem în definitiv *condițiile lui Saint-Venant*

$$\varepsilon_{ik,jh} - \varepsilon_{jh,ik} = \varepsilon_{ih,jk} - \varepsilon_{jk,ih}. \quad (12)$$

¹¹⁾ Există probleme importante în care această presupunere își pierde valabilitatea.

Acestea au fost găsite de B. de Saint-Venant (în 1861) ca condiții *necesare*, prin diferențierea ecuațiilor geometrice. Teorema de mai sus dovedește că ele sînt și condiții *suficiente*, dacă \mathcal{V} este simplu conex.

Apărent, există $3^4 = 81$ astfel de relații. Dar întrucît avem $i \neq j$ și $h \neq k$, și întrucît putem interverti indicii i cu h și j cu k , sau perechea i, j cu h, k , fără a obține relații noi, numărul total de relații distincte se reduce la șase. Notînd cu (i, j, k) indicii 1, 2, 3 sau o permutare circulară a lor, obținem din (12), luînd $h = i$, trei relații de tipul

$$\varepsilon_{ii,jk} + (\varepsilon_{jk,i} - \varepsilon_{ki,j} - \varepsilon_{ij,k})_{,i} = 0 \quad (!). \quad (13)$$

Dacă luăm aci $k = j$, căpătăm încă trei relații de tipul

$$\varepsilon_{ii,jj} + \varepsilon_{jj,ii} - 2\varepsilon_{ij,ij} = 0 \quad (!!). \quad (14) \quad \}$$

Introducînd (5.4) în (13) și (14), acestea rezultă identic verificate.

Relațiile lui Saint-Venant pot fi interpretate cu ajutorul unui operator liniar de al doilea ordin înk aplicat componentelor tensorului E :

$$\text{ink } E = 0. \quad (15)$$

Un vector v este gradientul unui scalar φ , dacă și numai dacă $\text{rot } v = 0$. Condițiile lui Saint-Venant au un rol similar în raport cu operatorul def : un tensor simetric de al doilea ordin E este de forma $E = \text{def } u$, dacă și numai dacă $\text{ink } E = 0$.

Dacă $\text{ink } E \neq 0$, valorile ce se obțin în primul membru din (15) pot fi privite ca o măsură a *incompatibilității* sistemului geometric. Astfel de stări se numesc *dislocații*.

Luînd $\varepsilon_{ij} \equiv 0$, formulele (8), (9) se reduc la

$$u_i^1 = u_i^0 + \omega_{ij}^0 (x_j^1 - x_j^0), \quad (16)$$

ceea ce descrie o deplasare rigidă a corpului în ansamblu. În cadrul condițiilor lui Saint-Venant, cunoașterea deformațiilor echivalează deci cu cunoașterea deplasărilor, abstracție făcînd de o deplasare rigidă (16). Cunoașterea valorilor u_i^0 și ω_{ij}^0 într-un punct x^0 determină și această din urmă deplasare.

Dacă \mathcal{V} este multiplu-conex, condițiile lui Saint-Venant rămîn condiții *necesare* de integrabilitate. Formulele (8) rămîn și ele valabile, cu condiția ca drumul de integrare să nu traverseze nici una din tăieturile ce transformă pe \mathcal{V} într-un domeniu simplu conex. Dar, notînd cu u^+ , respectiv u^- , vectorul deplasare pe bordurile unei asemenea tăieturi, trebuie să impunem condiția suplimentară

$$u^+ = u^-, \quad (17)$$

pentru a ne asigura de uniformitatea lui u în domeniul \mathcal{V} inițial. În caz contrar, u va fi determinat numai abstracție făcînd de anumite *perioade*, date de integralele din (8) pe componentele interioare ale frontierei.

Relativ la studiul condițiilor lui Saint-Venant în cazul deformației infinitezimale, vezi A. Lurie [1] și [4], § 1.4. Pentru discutarea cazului

în care aceste condiții nu sînt satisfăcute, vezi indicații în A. Seeger [1], § 2.53. Problema dislocațiilor e studiată în detaliu în lucrările citate în § 4.1, pag. 125.

În cadrul condițiilor lui Saint-Venant (eventual completate cu condițiile (17)), cunoașterea deplasărilor și a deformațiilor devin deci *echivalente*. (Ceea ce explică rațiunea pentru care relațiile (5.5) nu sînt incluse printre relațiile geometrice ale problemei.) În definitiv, aceasta provine din faptul că fiecare punct al continuului este privit ca dispunînd de numai 3 grade de libertate. (În teoria dislocațiilor, acest punct de vedere își pierde valabilitatea: vezi E. Kröner [4], finele § 1.5, și [6]; vezi și E. și F. Cosserat [4], cap. 4.)

Pe viitor, ne putem deci mărgini la a căuta fie numai deformațiile, fie numai deplasările. Acest rezultat nu depinde nici de sarcină, nici de proprietățile mecanice ale corpului (dacă acesta este elastic).

§ 10. DEFORMAȚII NELINIARE

Raționamentele din paragrafele precedente pot fi repetate cuvînt cu cuvînt, dar fără a mai neglija termenul $|\delta\xi|^2$ în expresia (4.2) — ceea ce conduce la o teorie *neliniară* a deformației.

Întrucît avem de considerat acum cantități în care produse de mărimi α_{ij} , ε_{ij} , ω_{ij} apar alături de termeni liniari, *principiul superpoziției* își pierde valabilitatea.

Din (4.2) obținem acum — în loc de (4.13) — relația mai generală

$$\delta|\xi|^2 = \sum_{i=1}^3 [(\delta_{ij} + \alpha_{ij}) \xi_j]^2 - \sum_{i=1}^3 \xi_i^2 = 2\tilde{\varepsilon}_{ij} \xi_i \xi_j. \quad (1)$$

Calculînd aci coeficientul termenului în ξ_i^2 , căpătăm

$$\tilde{\varepsilon}_{ii} = \alpha_{ii} + \frac{1}{2} (\alpha_{1i}^2 + \alpha_{2i}^2 + \alpha_{3i}^2) \quad (!). \quad (2)$$

Pentru coeficientul termenului în $\xi_i \xi_j$, ($i \neq j$), avem

$$\tilde{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2} (\alpha_{ij} + \alpha_{ji}) + \frac{1}{2} (\alpha_{1i} \alpha_{1j} + \alpha_{2i} \alpha_{2j} + \alpha_{3i} \alpha_{3j}). \quad (3)$$

Evident, (3) se reduce la (2) ~~dacă~~ luăm $i = j$, astfel că în definitiv

$$\tilde{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2} (\alpha_{ij} + \alpha_{ji}) + \frac{1}{2} \alpha_{ki} \alpha_{kj}, \quad i, j, k = 1, 2, 3, \quad (4)$$

sau încă, ținînd seama de (4.9) și (4.11):

$$\tilde{\varepsilon}_{ij} = \varepsilon_{ij} + \frac{1}{2} (\varepsilon_{ki} + \omega_{ki}) (\varepsilon_{kj} + \omega_{kj}). \quad (5)$$

Matricea $\tilde{\epsilon}$ de componente $\tilde{\epsilon}_{ij}$ este prin definiție simetrică: componentele ei se numesc *componentele deformației finite* (sau *neliniare*).

Pentru a calcula aceste mărimi, sînt necesare cele 9 componente α_{ij} , sau cele 6 componente ϵ_{ij} și cele 3 componente ω_{ij} . Legea liniară (3.5) de transformare a domeniului \mathcal{V} în \mathcal{V}^* conduce deci în general la o legătură *neliniară* între componentele deformației și coeficienții transformării. Separarea ce apăsăra în § 4 între rolurile componentelor ϵ_{ij} și ω_{ij} , ca și liniaritatea legăturii dintre componentele deformației și coeficienții transformării (consecințe ale neglijării termenului $|\delta \xi|^2$ în expresia $\delta|\xi|^2$) nu se mențin.

Definiția (4.16) a alungirii relative și formula (4.18) își păstrează valabilitatea ¹²⁾, dacă înlocuim ϵ_m , ϵ_{ij} prin $\tilde{\epsilon}_m$, $\tilde{\epsilon}_{ij}$:

$$\tilde{\epsilon}_m = -1 + \sqrt{1 + 2\tilde{\epsilon}_{ij} m_i m_j}. \quad (6)$$

Formula (4.19) rămîne valabilă. Ținînd seama de relația (5), obținem de aci

$$\cos(\widehat{\xi^*, \eta^*}) = \frac{\delta_{ij} + 2\tilde{\epsilon}_{ij}}{(1 + \tilde{\epsilon}_m)(1 + \tilde{\epsilon}_l)} m_i l_j. \quad (7)$$

Formula (4.21) se înlocuiește cu

$$\tilde{\epsilon}_{x_i} = -1 + \sqrt{1 + 2\tilde{\epsilon}_{ii}}. \quad (8)$$

Pentru un element ξ_i paralel cu axa Ox_i , și un element η_j paralel cu axa Ox_j , suma din (7) se reduce la un singur termen și obținem

$$\cos(\widehat{\xi_i^*, \eta_j^*}) = \sin \varphi_{ij} = \frac{2\tilde{\epsilon}_{ij}}{\sqrt{1 + 2\tilde{\epsilon}_{ii}} \sqrt{1 + 2\tilde{\epsilon}_{jj}}} \quad (!!). \quad (9)$$

Comparînd relațiile (4.22), (4.23) cu (8), (9), se vede că mărimile $\tilde{\epsilon}_{ii}$ și $2\tilde{\epsilon}_{ii}$ nu mai sînt *egale*, dar *caracterizează* totuși aceleași modificări ca și ϵ_{ii} și $2\epsilon_{ij}$: trei alungiri și trei deformații unghiulare (fără a mai putea însă vorbi despre „alunecări”, nici despre *suprapunerea* acestor șase deformații). Cunoașterea mărimilor $\tilde{\epsilon}_{ij}$ echivalează cu cunoașterea stării de deformație în jurul punctului considerat.

Întreg cuprinsul §§ 5—7 își păstrează cuvînt cu cuvînt valabilitatea — cantitățile ϵ_{ij} fiind peste tot înlocuite cu $\tilde{\epsilon}_{ij}$. În particular, ecuațiile (5.4) sînt înlocuite cu

$$\tilde{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) + \frac{1}{2} u_{k,i} u_{k,j}. \quad (10)$$

Acesta e tot un sistem de ecuații cu derivate parțiale, cu coeficienți constanți, întreg în raport cu componentele deformației, și de primul ordin, dar *neliniar*, în raport cu cele ale deplasării.

¹²⁾ Acesta a fost motivul pentru care am menținut termenul patrat în (4.17).

Condiția ca deplasarea să se reducă la o deplasare rigidă conduce la căutarea soluțiilor sistemului neliniar $\tilde{\varepsilon}_{ij} = 0$, rezultatele simple din (4.8) sau (9.16) pierzându-și sensul. (Nu trebuie uitat că o deplasare rigidă care nu este infinitezimală, *nu se reduce* în general la suprapunerea unei translații și a unei rotații).

Relațiile (10) pot fi scrise sub forma (compară cu (5.9)):

$$\tilde{\mathbf{E}} = \text{def } \mathbf{u}. \quad (11)$$

Axele principale și deformațiile principale se definesc în același mod. Relațiile (4.22) își pierd valabilitatea, dar relațiile (4.21) rămân adevărate, ceea ce dă, în axe principale:

$$\tilde{\varepsilon}_{x_i} = -1 + \sqrt{1 + 2\tilde{\varepsilon}_i}. \quad (12)$$

Rezultatele din § 8 se păstrează pentru cuadricele

$$\tilde{e}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \equiv \tilde{\varepsilon}_{ij} \xi_i \xi_j = \pm c^2. \quad (13)$$

Rămân valabile și formulele (8.2)–(8.9), exceptînd (8.5). Invarianții deformației neliniare se notează $\tilde{E}_1, \tilde{E}_2, \tilde{E}_3$ și au forma ce decurge imediat din (8.11) sau (8.12). Formula (8.13) își pierde însă valabilitatea.

EXEMPLU. Să calculăm dilatarea de volum — cantitate care desigur nu depinde de alegerea axelor. Considerînd transformarea (2.9), notînd cu $\tilde{\theta}$ dilatarea de volum în cazul deformației neliniare și ținînd seama că raportul volumelor $1 + \tilde{\theta}$ este egal cu jacobianul transformării, obținem

$$1 + \tilde{\theta} = \begin{vmatrix} 1 + u_{1,1} & u_{1,2} & u_{1,3} \\ u_{2,1} & 1 + u_{2,2} & u_{2,3} \\ u_{3,1} & u_{3,2} & 1 + u_{3,3} \end{vmatrix}. \quad (14)$$

Cu ajutorul formulelor (10), deducem de aci

$$(1 + \tilde{\theta})^2 = \begin{vmatrix} 1 + 2\tilde{\varepsilon}_{11} & 2\tilde{\varepsilon}_{12} & 2\tilde{\varepsilon}_{13} \\ 2\tilde{\varepsilon}_{12} & 1 + 2\tilde{\varepsilon}_{22} & 2\tilde{\varepsilon}_{23} \\ 2\tilde{\varepsilon}_{13} & 2\tilde{\varepsilon}_{23} & 1 + 2\tilde{\varepsilon}_{33} \end{vmatrix}. \quad (15)$$

Ținînd seama de definițiile analoge cu (8.11) în cazul deformației neliniare, căpătăm

$$(1 + \tilde{\theta})^2 = 1 + 2\tilde{E}_1 + 4\tilde{E}_2 + 3\tilde{E}_3,$$

de unde rezultă valoarea căutată

$$\tilde{\theta} = \sqrt{1 + 2\tilde{E}_1 + 4\tilde{E}_2 + 3\tilde{E}_3} - 1. \quad (16)$$

Introducînd aci expresiile similare cu (8.12), obținem încă

$$\tilde{\theta} = \sqrt{(1 + 2\tilde{\varepsilon}_1)(1 + 2\tilde{\varepsilon}_2)(1 + 2\tilde{\varepsilon}_3)} - 1, \quad (17)$$

și în fine, folosind relațiile (12):

$$\tilde{\theta} = (1 + \tilde{\varepsilon}_{x_1})(1 + \tilde{\varepsilon}_{x_2})(1 + \tilde{\varepsilon}_{x_3}) - 1. \quad (18)$$

Sensul acestei formule e ușor de înțeles: un paralelipiped dreptunghic elementar, cu muchiile paralele cu axele principale, se transformă tot într-un paralelipiped dreptunghic, de muchii alungite în raportul $(1 + \varepsilon_{x_i})/1$. Formula (18) poate fi dedusă și direct, apoi transcrisă cu ajutorul invariantilor și astfel obținută și forma (16), valabilă în axe oarecare.

Chestiunea condițiilor de compatibilitate se pune în același fel, dar caracterul neliniar al ecuațiilor (10) complică considerabil problema. Condiții analoge cu (9.12) pot fi obținute, cerînd ca spațiul să rămînă euclidian și după deformare, așadar anulînd tensorul său de curbura. (Vezi V. Z. Vlasov [1]; A. Green și W. Zerna [1], § 2.3; V. Novojilov [1], § 39; C. Truesdell și R. Toupin [1], § 34).

După cum deformarea neliniară este omogenă sau nu, cantitățile cu care avem de a face (invarianti, cuadrice ale deformăției, axe principale etc.) sînt aceleași sau variază de la punct la punct.

Teoria neliniară conține drept caz particular teoria deformăției infinitezimale. Pentru a ne convinge de aceasta, să începem prin a presupune că componentele $\tilde{\varepsilon}_{ij}$ sînt suficient de mici pentru a putea neglija produse de astfel de componente față de termeni liniari în raport cu ele. Teoria astfel simplificată poartă numele de *teoria micilor deformății*. În acest caz, din (8) și (9) obținem relații de tipul (4.22), (4.23). Prin urmare, componentele matricii micilor deformății sînt pur și simplu egale cu modificările (de lungime sau unghiulare) corespunzătoare. Pentru cuadricele deformăției, se poate face uz de o expresie similară cu (8.5). Din (18) obținem aci cu ușurință

$$\tilde{\theta} = (1 + \tilde{\varepsilon}_1)(1 + \tilde{\varepsilon}_2)(1 + \tilde{\varepsilon}_3) - 1 \cong \tilde{\varepsilon}_1 + \tilde{\varepsilon}_2 + \tilde{\varepsilon}_3 = \tilde{E}_1 \quad (19)$$

(ceea ce nu coincide cu (8.13)!).

Teoria micilor deformății nu coincide însă cu teoria deformăției infinitezimale, întrucît ea limitează numai valorile $\tilde{\varepsilon}_{ij}$, permițînd apariția de termeni neliniari în ε_{ij} , ω_{ij} . Pentru a evita astfel de termeni, trebuie deci să presupunem că nu numai deformățiile, ci și rotațiile rigide locale sînt suficient de mici. În acest caz, termenii neliniari din (10) pot fi neglijați și obținem

$$\tilde{\varepsilon}_{ij} = \varepsilon_{ij}. \quad (20)$$

Prin urmare, *teoria micilor deformății și rotații* coincide cu *teoria deformăției infinitezimale*, liniare deci. Această chestiune e tratată în detaliu de V. Novojilov [1], [3].

Adesea, deformățiile sînt suficient de mici pentru ca teoria micilor deformății (încă neliniară!) să fie aplicabilă. Există însă probleme în care pasul de aci spre teoria deformăției liniare nu mai poate fi făcut: de pildă, putem îndoi mult o lamă subțire de oțel, obținînd rotații locale mari, fără ca deformățiile să fie mari (fapt de care ne convinge absența

deformației remanente după descărcare). Dimpotrivă, în cazul corpurilor elastice masive, rotații mari nu pot coexista cu deformații mici și teoria micilor deformații se reduce firesc la teoria liniară.

Teoria liniară prezintă avantajele simplității, permițând totodată examinarea unor cazuri din cele mai importante. Dar teoria neliniară nu este simplul rezultat al unei dorințe de generalizare. La anumite configurații și solicitări ale mediului continuu (tije, plăci, solicitate într-un anumit mod), precum și pentru anumite materiale (cauciuc, polimeri înalți etc.) presupunerile asupra liniarității relațiilor geometrice nu mai reprezintă nici măcar o primă aproximare a fenomenului.

Studiul acestor chestiuni se lovește de mari dificultăți: domeniul de valabilitate al fiecărui tip de ecuații geometrice nu e încă destul de clar, iar ecuațiile neliniare obținute sînt greu abordabile.

Pentru indicații bibliografice privind problemele neliniare, vezi § 4.1, pag. 125.

În cele ce urmează, ne vom situa sistematic în cadrul teoriei deformației infinitezimale, așadar al liniarității geometrice.

CAPITOLUL 2

STAREA DE TENSIUNE A MEDIULUI CONTINUU

§ 1. FORȚE EXTERIOARE

Să ne fixăm acum atenția asupra forțelor ce acționează dinafară asupra corpului continuu și a celor ce iau naștere în interior, ca efect al acestei acțiuni. Vom părăsi deci cadrul clasic al mecanicii solidului rigid pe o cale pur *statică*. Ca și în capitolul 1, proprietățile materialului nu ne vor interesa.

Nu ne vom preocupa de semnificația noțiunii de „forță”. Ne limităm la a spune că o forță poate fi evaluată numai prin intermediul efectelor sale — în cazul nostru prin intermediul deplasărilor cauzate de ea.

a) Forțe de volum și forțe superficiale

Se numește *forță exterioară* orice forță ce caracterizează acțiunea unui corp exterior lui \mathcal{V} , asupra punctelor din $\mathcal{V} + \mathcal{S}$. Acele forțe ce acționează asupra punctelor dintr-un domeniu $\mathcal{V}' \subseteq \mathcal{V}$ se numesc *forțe de volum*. Cele ce acționează asupra punctelor dintr-un domeniu $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$ se numesc *forțe superficiale*.

Să considerăm rezultanta $\mathcal{R}(\mathcal{S}')$ și momentul resultant $\mathcal{M}(\mathcal{V}')$, al forțelor exterioare acționând asupra lui \mathcal{V}' . În general, atât $\mathcal{R}(\mathcal{V}')$ cât și $\mathcal{M}(\mathcal{V}')$ tind către zero o dată cu volumul $\text{mes}(\mathcal{V}')$; în general, momentul resultant tinde spre zero mai repede decât rezultanta, dacă centrul de reducere este ales în \mathcal{V}' .

Se numește *forță de volum* F (de componente F_1, F_2, F_3) în $x \in \mathcal{V}$, limita

$$F(x) = \lim_{\substack{\mathcal{V}' \ni x \\ \text{mes}(\mathcal{V}') \rightarrow 0}} \frac{\mathcal{R}(\mathcal{V}')}{\text{mes}(\mathcal{V}')}, \quad \text{pentru } x \in \mathcal{V}' \subset \mathcal{V}, \quad d(\mathcal{V}') \rightarrow 0, \quad (1)$$

dacă această limită (unică) există și e finită (compară și cu (1.1.9)).

Dacă pentru $d(\mathcal{V}') \rightarrow 0$, momentul resultant în $x \in \mathcal{V}'$ nu este neglijabil în comparație cu rezultanta, atunci avem de a face cu o *teorie asimetrică a continuului* (vezi § 4, pag. 72; vezi și § 4.1, pag. 125).

În cele ce urmează, acțiunea exterioară asupra punctelor din \mathcal{V} va fi întotdeauna caracterizată *numai* prin forța (1). Cele mai simple exemple de forțe de volum sînt cele gravitaționale și cele inerțiale. E ușor de

arătat că efectul unor astfel de forțe provenite din puncte $\xi \in \mathcal{V}'$, $\xi \in \mathcal{V}$, este neglijabil.

Denumirea de „forță de volum” e improprie: în fapt, F este *densitatea* cîmpului forțelor de volum în punctul considerat. Avem evident $[F] = FL^{-3} = ML^{-2}T^{-2}$, și modulul acestei densități de forță se măsoară în kgf/cm^3 . Forța ce acționează asupra unui element de volum dV se va scrie $F dV$; evident, ea are dimensiunea unei forțe.

Definiția (1) poate fi reluată pentru *forțele superficiale*. Anume, o m scrie

$$f(x) = \lim_{\text{mes}(\mathcal{S}') \rightarrow 0} \frac{\mathcal{R}(\mathcal{S}')}{\text{mes}(\mathcal{S}')}, \quad \text{pentru } x \in \mathcal{S}' \subset \mathcal{S}, \quad d(\mathcal{S}') \rightarrow 0. \quad (3)$$

Cel mai frecvent caz de apariție a unor forțe superficiale este cel în care corpul se află în contact cu alt corp, solid sau fluid: contact dintre o fundație și sol, presiunea fluidului asupra pereților unui rezervor etc. Dimensiunea densității forței superficiale este $[f] = FL^{-2}$, și ea se măsoară în kgf/cm^2 . Pe orice element de arie dS acționează forța $f dS$.

Forța superficială f nu e în general dirijată după normala n la \mathcal{S} . Se spune că avem în $x \in \mathcal{S}$ *întindere* sau *compresiune*, după cum unghiul $\widehat{(f, n)}$ e mai mic, respectiv mai mare decât $\frac{1}{2}\pi$. Dacă \mathcal{S} este o suprafață închisă orientabilă, n va fi întotdeauna normala *externă* în raport cu \mathcal{V}^+ .

Forțele exterioare pentru care limitele din (1) sau (2) există se numesc *forțe exterioare* (sau *sarcini*) *repartizate* (sau *distribuite*).

b) Forțe concentrate

Definițiile (1), (2) își pierd sensul dacă rezultanta \mathcal{R} nu tinde spre zero o dată cu diametrul domeniului considerat. Dacă această rezultantă are o limită care nu este nulă, se spune că în x e aplicată o *forță concentrată* (de volum sau superficială), egală cu limita rezultantei. Dimensiunea sa este evident aceea a unei forțe.

Cel mai adesea, avem de a face cu sarcini repartizate. Totuși, apar frecvent și forțe exterioare concentrate (de ex.: explozie în interiorul unui corp masiv; forțe de reacțiune în puncte ale frontierei în care un corp masiv e rezemat pe piloni etc.).

Un mod unitar de a trata împreună sarcinile concentrate și cele repartizate e sugerat de ideea de *distribuție* sau *funcție generalizată* (vezi § A.2). În acest scop, să considerăm un șir de domenii $\mathcal{V}_\varepsilon \subset \mathcal{V}$, funcții de un parametru ε (de ex.: un șir de bule $B(x, \varepsilon)$, sau un șir de cuburi cu centrele în x și de laturi 2ε), pentru care $d(\mathcal{V}_\varepsilon) \rightarrow 0$ pentru $\varepsilon \rightarrow 0$. Dacă pentru $\varepsilon' < \varepsilon''$ avem și $\mathcal{V}_{\varepsilon'} \subset \mathcal{V}_{\varepsilon''}$, se poate arăta că aceste domenii conțin un singur punct comun, care este x .

Să presupunem acum că rezultanta $\mathcal{R}(\mathcal{V}_\varepsilon)$ există pentru orice ε . Dacă există un vector Q astfel încât

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{R}(\mathcal{V}_\varepsilon) = \begin{cases} Q & \text{dacă } x \in \mathcal{V}_\varepsilon \text{ pentru orice } \varepsilon, \\ 0 & \text{dacă } x \notin \mathcal{V}_\varepsilon \text{ de la un anumit } \varepsilon, \end{cases} \quad (4)$$

atunci se spune că în x este aplicată o *forță concentrată* Q . (Pentru o definiție mai detaliată, vezi de ex. E. Sternberg și S. Al-Khozaie [1], § 2.)

Există o legătură evidentă între această definiție și definiția (A.2.7), (A.2.8) a funcției δ a lui Dirac (adaptată pentru cazul tridimensional). Aceasta permite să se scrie orice forță de volum concentrată, aplicată într-un punct $\xi (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, sub forma

$$F(x_1, x_2, x_3) = Q \delta(x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2, x_3 - \xi_3), \quad (5)$$

ceea ce se poate înțelege precum urmează: Q este o densitate de forță, nulă pentru $x \neq \xi$, infinită pentru $x = \xi$, și a cărei integrală pe \mathcal{L}_3 este Q .

O definiție similară poate fi dată pentru forțele concentrate superficiale; aci se impune însă un studiu special al funcției δ definite pe o suprafață (vezi de ex. I. Ghelfand și G. Șilov [1], vol. 1, § 3.1). În cazul particular în care \mathcal{S} conține o porțiune plană (fie $x_3 = 0$), forța concentrată aplicată în $(\xi_1, \xi_2, 0)$ se scrie

$$f(x_1, x_2) = q \delta(x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2), \quad (6)$$

unde q este un vector constant de componente q_1, q_2 . Pentru $Q = i_j$, respectiv $q = i_j$, avem de a face cu forțe concentrate *unitare*, aplicate în punctul ξ , și dirijate paralel cu axa Ox_j .

Pentru studiul problemelor privitoare la forțele concentrate, vezi de exemplu C. Pearson [2], capitolul 5; G. Neidhardt și E. Sternberg [1]; E. Sternberg și R. Eubanks [1], [2].

§ 2. FORȚE INTERIOARE. TENSIUNI

a) Vectorul tensiune

Sub acțiunea forțelor exterioare iau naștere *forțe interioare* între particulele ce alcătuiesc corpul \mathcal{V} . Natura fizică a acestor forțe nu ne interesează. Pentru a le studia, se face uz de *metoda secțiunilor imaginare* propusă de Cauchy.

Să presupunem că corpul \mathcal{V} este în echilibru și să separăm (imaginar) din el o porțiune \mathcal{V}_1 (a cărei frontieră poate fi interioară lui \mathcal{V} sau nu) și porțiunea complementară \mathcal{V}_2 . Vom nota cu \mathcal{S}_i acea parte a lui \mathcal{S} care aparține frontierei lui \mathcal{V}_i ($i = 1, 2$) și cu \mathcal{S}_{12} frontiera comună a domeniilor $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2$, presupusă a fi cu plan tangent și cu două fețe.

Pentru ca porțiunea \mathcal{V}_1 să-și păstreze nealterat echilibrul după separare, trebuie ca acțiunea părții \mathcal{V}_2 (care transmite lui \mathcal{V}_1 efectul forțelor exterioare ce acționează asupra lui \mathcal{V}_2 și a frontierei sale, precum și acțiunea forțelor interioare ce iau naștere în \mathcal{V}_2) să fie înlocuită prin

acțiunea anumitor forțe aplicate pe \mathcal{S}_{12} . Aceste forțe trebuie deci alese în așa fel încât \mathcal{V}_1 să rămână în echilibru, fără nici o schimbare a configurației sale, sub acțiunea tuturor forțelor exterioare aplicate anterior asupra sa, plus forțele de interacțiune dintre \mathcal{V}_1 și \mathcal{V}_2 introduse mai sus. Acestea au rolul unor forțe de coeziune și considerarea lor echivalează cu utilizarea ipotezei rigidizării părților (§ 0.4, e).

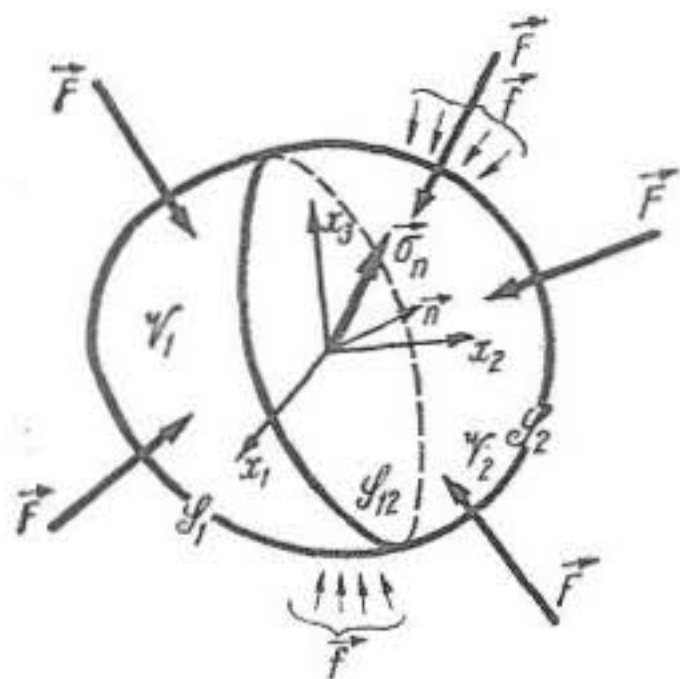


Fig. 2.2.1

Definind o densitate a forțelor de interacțiune pe \mathcal{S}_{12} , ajungem printr-un raționament similar celui din § 1, la noțiunea de tensiune internă sau pur și simplu *tensiune*:

$$\sigma(x) = \lim_{\text{mes}(\mathcal{S}'_{12}) \rightarrow 0} \frac{\mathcal{R}(\mathcal{S}'_{12})}{\text{mes}(\mathcal{S}'_{12})} \quad \text{pentru } x \in \mathcal{S}'_{12} \subset \mathcal{S}_{12}, \quad d(\mathcal{S}'_{12}) \rightarrow 0. \quad (1)$$

Aceasta apare a fi deci o mărime vectorială (*vectorul tensiune*), de dimensiune FL^{-2} ; modulul său se măsoară în kgf/cm^2 . Într-o formă deplin conturată, introducerea acestei noțiuni aparține lui Cauchy (pentru istoricul chestiunii, vezi C. Truesdell [6]).

Subliniem aci — odată pentru totdeauna — că tensiunile σ repartizate pe frontiera \mathcal{S}' a unui subdomeniu $\mathcal{V}' \subseteq \mathcal{V}$, joacă rolul de forțe superficiale exterioare în raport cu \mathcal{V}' .

b) Proprietățile vectorului tensiune

Vectorul tensiune σ este o funcție de punct. Dar în primul rând, el depinde de suprafața de separație aleasă; în al doilea rând, atâta timp cât se cere ca orice parte separată din \mathcal{V} să fie în echilibru ca *solid rigid*, (adică numai din punctul de vedere al sistemului de forțe aplicat asupra sa), rezultă că tensiunile distribuite pe suprafețele de separație nu sînt determinate decît abstracție făcînd de un sistem de forțe static echivalent cu zero.

Pentru a elimina prima din aceste dificultăți, să arătăm că vectorul tensiune σ este funcție de punct și de normala la suprafața de separație în acel punct. În acest scop să împărțim domeniul mărginit \mathcal{V} în

trei subdomenii $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \mathcal{V}_3$. Să considerăm mai întâi suprafața $\mathcal{S}_{13} + \mathcal{S}_{23}$. Pe suprafețele \mathcal{S}_{13} și \mathcal{S}_{23} — frontiere ale domeniilor \mathcal{V}_1 și \mathcal{V}_2 — apar, în virtutea principiului acțiunii și reacțiunii, tensiuni egale și de semne contrare tensiunilor ce iau naștere pe aceleași suprafețe, privite ca mărginind domeniul \mathcal{V}_3 (aflat și el — separat — în echilibru).

Sectionînd acum \mathcal{V} după $\mathcal{S}_{13} + \mathcal{S}_{12}$, tensiunile ce apar pe \mathcal{S}_{13} rămîn aceleași, deoarece în starea de echilibru a lui \mathcal{V}_3 nu s-a schimbat nimic.

Prin urmare, tensiunea pe o porțiune oarecare a suprafeței de separație nu depinde de forma acesteia în restul ei.

Fie în particular un element dS' al unei suprafețe de separație, deplin caracterizat de poziția centrului său x și de normala sa n . Raționamentele de mai sus impun să notăm vectorul tensiune cu σ_n , iar componentele sale cu σ_{ni} ($i = 1, 2, 3$) — subînțelegînd că el depinde și de x .

Pentru a dovedi însă că σ_n depinde numai de x și n , trebuie să putem alege dintre toate acele sisteme de forțe static echivalente, repartizate pe o suprafață imaginară de separație, pe acela care corespunde echilibrului lui \mathcal{V} ca corp deformabil. În virtutea semnificației sale mecanice, acest sistem este, în fapt, unic. Determinarea sa va fi posibilă abia după stabilirea legăturii dintre deplasări, deformații și tensiuni și după demonstrarea unei teoreme de unicitate (vezi § 4.5).

Elementul dS' posedă două fețe, așadar două sensuri pozitive ale normalei — după cum îl privim ca aparținînd lui \mathcal{V}_1 sau \mathcal{V}_2 ; de aci rezultă

$$\sigma_{-n}(x) = -\sigma_n(x). \quad (2)$$

În general, σ_n nu are același suport cu n . Componenta sa dirijată după n se numește *componentă normală*: $N = \sigma_n \cdot n$. Orice componentă dispusă în planul elementului dS' se numește *componentă tangențială* sau încă *de alunecare*.

Elementul considerat este supus la *întindere* (tracțiune) sau *compresiune*, după semnul — pozitiv sau negativ — al lui N . (Evident, este vorba de întindere sau compresiune asupra acelei părți din \mathcal{V} pentru care n e normală exterioară.) Dacă $N = 0$, elementul este supus numai la o tensiune tangențială.

Determinarea lui $\sigma_n(x)$ rezolvă problema forțelor interioare ce apar în \mathcal{V} sub acțiunea forțelor exterioare F și f . Legătura dintre vectorii σ_n și f rezultă din chiar definiția lor: tensiunea pe un element de suprafață al frontierei este chiar tensiunea superficială

$$\sigma_n|_{\mathcal{S}} = f, \quad (3)$$

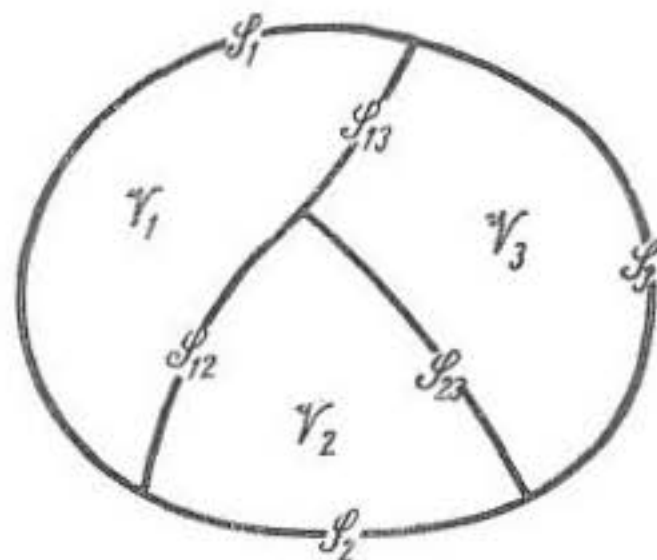


Fig. 2.2.2

unde n este normala exterioară la \mathcal{S} , iar cantitatea $\sigma_n|_{\mathcal{S}}$ este înțeleasă în sensul valorii la limită definite în (1.1.6) — (1.1.8).

Relația dintre vectorii σ_n și F va fi dată în § 4.

§ 3. STAREA DE TENSIUNE ÎN VECINĂTATEA UNUI PUNCT. COMPONENTELE TENSIUNII

a) Matricea tensiune

A cunoaște starea de tensiune în vecinătatea unui punct înseamnă a cunoaște tensiunile ce acționează pe toate elementele de suprafață ce trec prin el. Să reținem deocamdată trei elemente paralele cu planele de coordonate, așadar de normale paralele cu direcțiile pozitive ale axelor. Vectorii tensiune corespunzători se vor nota σ_i , iar componentele lor, cu σ_{ij} .

În modul acesta definim în fiecare punct o matrice Σ de componente σ_{ij} , numită *matricea tensiune*, sau pur și simplu *tensiune* în punctul considerat. Mărimile σ_{ij} se numesc *componentele tensiunii*. (Dacă există risc de confuzie, se va folosi semnul (;); de ex., $\sigma_{-1;2}$.)

O imagine geometrică asupra componentelor tensiunii se obține considerînd un cub elementar cu centrul în x și cu fețele paralele cu planele de coordonate. (În fig. 2.3.1. am trasat *versorii* direcțiilor σ_{ij} pe fețele de normale pozitive.)

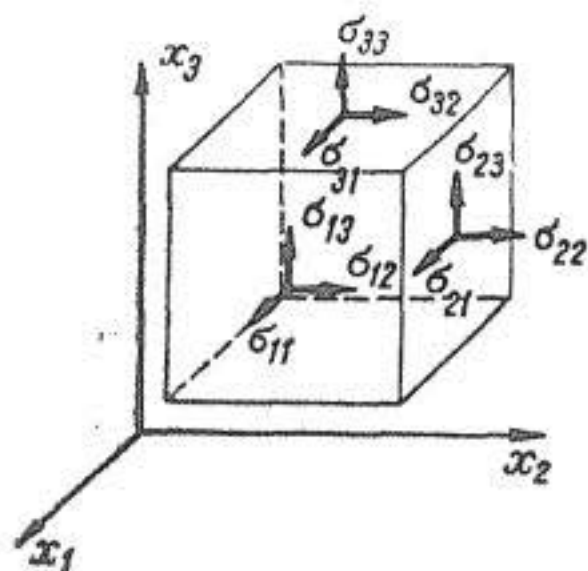


Fig. 2.3.1

Componentele σ_{ii} se numesc *componente normale*, iar celelalte, *componente tangențiale* ale tensiunii.

OBSERVAȚIE. Notățiile cele mai frecvente în literatura clasică sînt cele propuse de G. Kirchhoff [3], § 11.2: (X_x, \dots, X_y, \dots) , unde majuscula indică axa de proiecție, iar indicele — normala la elementul considerat. Des folosite sînt și notațiile lui Th. von Karman [1]: $(\sigma_x, \dots, \tau_{xy}, \dots)$.

Notăția σ_{ij} este compactă și simplă. Aproape toate lucrările contemporane folosesc această notație — sau variantele ei — întrucît ea este indispensabilă cînd se tinde spre folosirea mijloacelor analizei tensoriale. Noi

facem uz de ea aci numai pentru simplificarea scrierii și pentru evidențierea paralelismului cu teoria deformațiilor. (Vezi și observația de la finele § 1.5, pag. 46.)

Pentru ceea ce numim *tensiuni*, se folosește adesea (mai ales în literatura tehnică) și denumirea de *eforturi unitare*.

b) Relațiile lui Cauchy

Alegerea componentelor σ_{ij} implică un mare grad de arbitrar, provenit din alegerea axelor. Este firesc deci să căutăm vectorul σ_n pe un element de normală oarecare n , ca funcție de componentele σ_{ij} .

Să considerăm deci un element de normală n caracterizat de mărimile $n_i = \cos(n, x_i)$ — notație pe care o vom păstra de acum încolo — și să construim un tetraedru dreptunghic PABC (fig. 2.3.2, unde am ales normala în așa fel încît $n_i > 0$; ca urmare, elementele PBC, PAC, și PAB au normalele paralele cu direcțiile negative ale axelor).

Dacă componentele forțelor de volum și ale vectorilor tensiune sînt funcții continue, putem calcula toate aceste mărimi în același punct (fie el $P \equiv x$): valorile lor reale se abat de la valoarea în P cu cantități (pe care le vom nota cu η cu diferiți indici) care tind la zero o dată cu dimensiunile tetraedrului, de pildă o dată cu înălțimea h coborîată din P.

Notînd cu D aria elementului ABC, avem pentru ariile PBC, PAC, PAB și pentru volumul V , valorile

$$D_1 = Dn_1, \quad D_2 = Dn_2, \quad D_3 = Dn_3, \quad V = \frac{1}{3} hD. \quad (1)$$

Tetraedrul se găsește în echilibru sub acțiunea forțelor de volum și a tensiunilor aplicate pe fețele sale. Proiectînd pe axa Ox_i condiția ca rezultanta forțelor exterioare să fie nulă, și ținînd seama că vectorii tensiune pe fețele paralele cu planele de coordonate sînt egali respectiv cu $-\sigma_1$, $-\sigma_2$, $-\sigma_3$, obținem

$$(F_i + \eta) \frac{1}{3} hD + (\sigma_{ni} + \eta') D + (-\sigma_{ji} + \eta_j) Dn_j = 0. \quad (2)$$

Împărțind la aria D și trecînd la limită pentru $h \rightarrow 0$ obținem

$$\sigma_{ni} = \sigma_{ji} n_j, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (3)$$

toate mărimile fiind calculate în punctul $P \equiv x$.

Relația (3) rămîne valabilă, oricare ar fi orientarea elementului de normală n . Într-adevăr, fie de pildă $n_1 < 0$. Tetraedrul corespunzător are în acest caz drept normală la fața paralelă cu Ox_2x_3 , chiar axa pozitivă Ox_1 , astfel că în (2) trebuie să înlocuim vectorul $-\sigma_1$ cu $+\sigma_1$. Pe de altă parte, prima din relațiile (1) trebuie înlocuită acum cu $D_1 = -Dn_1$, întrucît aria D_1 este pozitivă. Produsul $-\sigma_{1i} Dn_1$ din (2) rămîne deci neschimbat, astfel că și relația (3) nu depinde de poziția elementului ales.

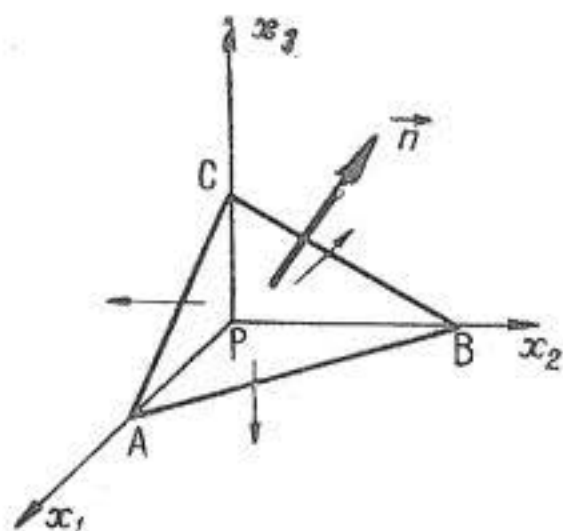


Fig. 2.3.2

Relațiile (3) — stabilite de A. Cauchy [1] — sînt relații *întregi*. Aceasta se datorește faptului că în definirea tensiunilor s-a făcut abstracție de variația componentelor σ_{ij} de la o față la alta a cubului elementar, variație care va interveni în alte ecuații.

În sensul furnizat de (3), matricea Σ *caracterizează* deci starea de tensiune în punctul considerat (compară cu § 1.4, pag. 43).

Totodată, relațiile (3) restring gradul de arbitrar despre care am vorbit la pag. 66, impunînd anumite legături între vectorii tensiune pe elemente de suprafață ce trec prin același punct. Acest pas înainte e datorat faptului că, în timp ce metoda secțiunilor imaginare introduce ideea de tensiune prin considerarea echilibrului (rigid) al unei porțiuni *finite* a corpului \mathcal{V} , relațiile (3) provin din considerarea echilibrului (de asemenea ca solid rigid, și numai în primă aproximație) al unor elemente *infinitesimale*.

Absența forțelor de volum din (3) nu înseamnă că forțele de volum nu influențează asupra stării de tensiune — ci numai că această influență nu apare în expresia lui σ_n ca funcție de direcția n ; în fapt, ea se exercită prin intermediul mărimilor σ_{ij} , în a căror determinare aceste forțe intervin explicit.

Totuși, adesea se petrece chiar pentru ansamblul corpului un fenomen analog: influența forțelor de volum este neglijabilă, față de factorul esențial, constituit de forțele superficiale (ca aci de componentele σ_{ij}) și de legături. (Vezi și § 4.10.)

§4. ECUAȚIILE DE ECHILIBRU

a) Asupra ecuațiilor statice ale teoriei liniare

Întrucît putem exprima acum orice vector tensiune prin anumite componente standard, ecuațiile de echilibru pentru un domeniu oarecare trebuie să conducă la relații între forțele exterioare și componentele tensiunii.

Întrucît echilibrul se stabilește în corpul *deformat*, toate mărimile relative la starea de tensiune ar trebui scrise nu în coordonatele inițiale, ci în coordonatele finale $Ox_1^* x_2^* x_3^*$. Revenind la coordonatele inițiale, rezultă că parametrii geometrici trebuie să intervină și ei: componentele deplasării și deformației vor apare în coeficienții ecuațiilor de echilibru, în coordonatele în raport cu care se efectuează derivări etc. De aci va proveni caracterul esențialmente *neliniar* al acestor ecuații.

Obținerea lor nu e dificilă, dar rezolvarea lor e practic imposibilă cu mijloacele actuale ale matematicii.

Se poate însă demonstra că, în cadrul *liniarității geometrice*, termenii care introduc deplasările și deformațiile în ecuațiile de echilibru și în condițiile la limită care le însoțesc, sînt neglijabili față de cei independenți de deplasări și deformații. (Aceasta nu înseamnă că *soluția* ecuațiilor astfel simplificate este suficient de apropiată de cea a ecuațiilor exacte: studiul acestei probleme dificile e deschis.) Pentru detalii, vezi de exemplu V. Novojilov [1], capitolul 2; [3], capitolul 2.

În cele ce urmează, ne vom situa în cadrul liniarității geometrice, ceea ce va permite studiul ecuațiilor de echilibru în coordonatele inițiale. Așadar, deși domeniul trece în starea \mathcal{V}^* ca stare de echilibru, vom studia această stare în primă aproximație tot pentru domeniul \mathcal{V} . Același lucru e valabil și pentru condițiile la limită, *chiar dacă ele implică modificări ale frontierei* (vezi de ex. § 10.2).

Prin urmare, eventuala neliniaritate a ecuațiilor de echilibru e de natură geometrică și dispare o dată cu neliniaritatea geometrică. Neliniaritate „statică” nu există: dacă forțele ce intervin în problemă depășesc anumite limite, ecuațiile de echilibru rămân liniare în coordonatele deformate, și devin neliniare în coordonatele inițiale numai datorită deplasărilor și deformațiilor mari pe care ele le provoacă. (Uneori — ca de pildă în problemele de stabilitate a echilibrului elastic, unde deformații mici coexistă cu rotații mari — prezintă utilitate scrierea acestor ecuații *liniare* în coordonatele deformate.)

Acesta este motivul pentru care studiul stării de tensiune trebuia să urmeze *după* cel al stării de deformare: un studiu pur static al echilibrului corpului deformabil este în principiu cu neputință. Numai în cadrul liniarității geometrice, se obțin ecuații „pur” statice, așa cum ecuațiile (1.5.4) sau (1.10.10) sînt „pur” geometrice.

b) Ecuațiile lui Cauchy

Să considerăm un domeniu $\mathcal{V}' \subset \mathcal{V}$ a cărui frontieră \mathcal{S}' e suficient de regulată pentru a permite folosirea formulei lui Gauss-Ostrogradskii (7.2.9). Domeniul \mathcal{V}' este în echilibru sub acțiunea forțelor F și a tensiunilor σ_n pe \mathcal{S}' . Condiția ca *rezultanta* acestor forțe să fie nulă este

$$\iint_{\mathcal{S}'} \sigma_{ni} dS + \iiint_{\mathcal{V}'} F_i dV = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad (1)$$

de unde, introducînd relațiile (3.3):

$$\iint_{\mathcal{S}'} \sigma_{ji} n_j dS + \iiint_{\mathcal{V}'} F_i dV = 0, \quad (2)$$

și încă, făcînd uz de formula lui Gauss-Ostrogradskii:

$$\iiint_{\mathcal{V}'} (\sigma_{ji,j} + F_i) dV = 0. \quad (3)$$

Dacă întărim presupunerile din § 3 și cerem ca $\sigma_{ij} \in C^1(\mathcal{V})$, integrandul din (3) este o funcție continuă în \mathcal{V} . Din caracterul arbitrar al domeniului $\mathcal{V}' \subset \mathcal{V}$ rezultă că relația (3) este posibilă dacă și numai dacă

$$\sigma_{ji,j} + F_i = 0, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (4)$$

ceea ce reprezintă legătura dintre componentele tensiunii și forțele de volum sub forma unor relații *diferențiale*.

OBSERVAȚIA 1. Acesta este momentul esențial, care permite trecerea de la ecuațiile *finite* de echilibru ale solidului rigid, la ecuațiile *diferențiale* de echilibru ale mediului continuu deformabil, echivalente în fond cu condițiile de echilibru scrise pentru un element *infinitesimal* de volum arbitrar. La baza acestui raționament stă atât ipoteza mediului continuu, cât și cea a rigidizării.

Ecuațiile (4) sînt adevărate și în cazul solidului rigid — dar rămîn inutile. Ele dau anumite legături între forțele exterioare și cele interioare, legături totuși insuficiente pentru a alege dintre sistemele static echivalente menționate în § 2, pag. 66, pe cel potrivit — alîta timp cît nu facem uz de ideea de deformație.

Mai departe, condiția ca *momentul resultant* al tuturor forțelor exterioare aplicate asupra porțiunii $\mathcal{V}' \subset \mathcal{V}$ să fie nul, este

$$\iint_{\mathcal{S}'} (x_k \sigma_{nh} - x_h \sigma_{nk}) dS + \iiint_{\mathcal{V}'} (x_k F_h - x_h F_k) dV = 0, \quad (5)$$

(unde am presupus că nu apar momente de volum; vezi § 1, pag. 63). Introducînd aci (3.3), căpătăm

$$\iint_{\mathcal{S}'} (x_k \sigma_{jh} - x_h \sigma_{jk}) n_j dS + \iiint_{\mathcal{V}'} (x_k F_h - x_h F_k) dV = 0, \quad (6)$$

și mai departe, cu ajutorul formulei lui Gauss-Ostrogradskii:

$$\iiint_{\mathcal{V}'} [x_k (\sigma_{jh,j} + F_h) - x_h (\sigma_{jk,j} + F_k) + \sigma_{kh} - \sigma_{hk}] dV = 0. \quad (7)$$

În virtutea relațiilor (4), parantezele din (7) sînt nule, ceea ce conduce la

$$\iiint_{\mathcal{V}'} (\sigma_{hk} - \sigma_{kh}) dV = 0; \quad (8)$$

ca și în cazul integralei (3), de aci deducem

$$\sigma_{hk} = \sigma_{kh}. \quad (9)$$

Aceste relații exprimă *legea de reciprocitate* (sau de *dualitate*, sau încă de *simetrie*) a *tensiunilor tangențiale* (vezi fig. 2.2.2). În prezența momentelor de volum, aceste relații își pierd valabilitatea — ceea ce justifică denumirea de „teorie asimetrică” dată teoriei menționate în § 1, pag. 63.

Ultimele 3 ecuații de echilibru arată că matricea Σ e simetrică, rezultat similar celui privitor la matricea E .

Ecuațiile de echilibru iau deci forma finală

$$\sigma_{ij,j} + F_i = 0, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (10)$$

(unde vom ține încă seama, dacă va fi cazul, de simetria matricii Σ). Acestea se numesc *ecuațiile statice* ale mecanicii mediului continuu (scrise

în cazul liniarității geometrice). Ele au fost stabilite de A. Cauchy [3], [4] și poartă frecvent numele de *ecuațiile lui Cauchy*.

OBSERVAȚIA 2. Ecuațiile (10) se pot obține și scriind condițiile de echilibru ale cubului elementar din figura 2.2.2 și ținând seama de variația componentelor tensiunii de la o față la alta a cubului — variație ce se datorează tocmai acțiunii forțelor de volum. (Vezi și § 3, pag. 70.)

OBSERVAȚIA 3. Ecuațiile (10) pot fi scrise sub o formă simbolică simplă. Anume, se definește acțiunea operatorului div asupra unei matrice \mathbf{Q} de componente q_{ij} , spunând că $\text{div } \mathbf{Q}$ este mărimea cu trei componente $q_{ij,j}$. Ecuațiile (10) iau acum forma (compară cu (1.5.9)) :

$$\text{div } \Sigma + F = 0. \quad (11)$$

Evident, ecuațiile de echilibru (10) apar însoțite de anumite condiții la limită. Dacă acestea reprezintă legături între componentele tensiunii și forțele superficiale, ele se obțin din (2.3), (3.3) sub forma

$$\sigma_{ij} n_j|_{\mathcal{S}} = f_i, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (12)$$

(unde primul membru poate fi interpretat ca produs scalar al tensorului Σ cu vectorul n).

În consecință, am obținut pentru cele 6 funcții necunoscute σ_{ij} , un sistem de numai trei ecuații cu derivate parțiale de primul ordin, liniare, cu coeficienți constanți, și trei condiții la limită, de asemenea liniare. Rezultă că problemele mecanicii mediului continuu nu pot fi rezolvate numai ca probleme în tensiuni, ele furnizându-ne astfel un model netrivial de problemă static nedeterminată.

Acest fapt trebuie legat și de observația din § 2, pag. 67, asupra imposibilității de a determina componentele tensiunii fără a fi stabilit în prealabil legătura dintre tensiuni și deformații (în teoria elasticității), fără a considera anumite relații suplimentare în tensiuni (cum se procedează în unele variante ale teoriei plasticității) etc.

Forma sistemului (10) justifică raționamentele de la începutul paragrafului : în cazul neliniarității geometrice, tensiunile ar trebui raportate la elemente de suprafață modificate iar derivările ar trebui efectuate în raport cu variabilele $x_i^* = x_i + u_i$. Deși aparent „pur” statice, ecuațiile (10) sînt în fapt numai ecuații simplificate ; sistemul ce ar corespunde relațiilor geometrice (1.10.10) ar cuprinde și parametrii geometrici.

Liniaritatea ecuațiilor (10) și a condițiilor (12) permite folosirea principiului superpoziției (§ 4.2, pag. 129), iar mijloacele de investigare matematică a unui astfel de sistem sînt relativ bine puse la punct.

c) Teorema de reciprocitate

Relația (9) poate fi generalizată într-un mod semnificativ. Să considerăm într-un punct două elemente de suprafață de normale n' și n'' . Ținînd seama de (9) în (3.3), obținem

$$\sigma_{n'i} = \sigma_{ij} n'_j, \quad \sigma_{n''i} = \sigma_{ij} n''_j. \quad (13)$$

Proiecția vectorului σ_n pe direcția n'' este

$$\text{pr}_{n''} \sigma_n = \sigma_{n'i} n_i'' = \sigma_{ij} n_j' n_i'' . \quad (14)$$

Analog avem și

$$\text{pr}_{n'} \sigma_{n''} = \sigma_{n''i} n_i' = \sigma_{ij} n_j'' n_i' . \quad (15)$$

Intervertind în (15) indicii i, j și ținînd din nou seama de relația (9), obținem *teorema de reciprocitate* a lui A. Cauchy [5]:

$$\text{pr}_{n'} \sigma_{n''} = \text{pr}_{n''} \sigma_{n'} . \quad (16)$$

Luînd pentru n' și n'' direcții paralele cu axele, obținem din nou egalitatea (9).

§ 5. TENSORUL TENSIUNE. PROPRIETĂȚI

a) Tensorul tensiune

Ca și în § 1.6, să considerăm o rotație a axelor, poziția noilor axe $Ox'_1 x'_2 x'_3$ fiind caracterizată de matricea n_{ij} din (1.6.1) și de relațiile (1.6.2).

Componenta normală a lui σ_n se obține luînd $n' = n'' = n$ în (4.14):

$$N = \text{pr}_n \sigma_n = \sigma_{ij} n_i n_j . \quad (1)$$

Să considerăm un vector ξ paralel cu n :

$$\xi_i = |\xi| n_i , \quad (2)$$

și să construim forma patrată analogă cu cea din (1.6.5):

$$s(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \sigma_{ij} \xi_i \xi_j . \quad (3)$$

Relația (1) se scrie acum

$$N |\xi|^2 = s(\xi_1, \xi_2, \xi_3) , \quad (4)$$

unde atât componenta normală N , cât și modulul $|\xi|^2$, sînt invarianți. Ca și în § 1.6, ajungem astfel la analogul relației (1.6.6):

$$\sigma'_{ij} = n_{ih} n_{jk} \sigma_{hk} , \quad (5)$$

ceea ce arată că componentele tensiunii alcătuiesc un tensor simetric de al doilea ordin, numit *tensorul tensiune*. (Denumirea e tautologică — cuvîntul „tensor” venind chiar de la „tensiune”. Acesta a fost, istoricește

vorbind, primul exemplu de sistem de mărimi ce se supun unei legi mai complicate decât legea de transformare vectorială, dar care o generalizează direct.)

b) Vectorul tensiune

Ceea ce am numit în §2 „vector tensiune” este o mărime alcătuită deci cu ajutorul componentelor acestui tensor. Se verifică ușor că σ_n este un vector. Într-adevăr, pentru componentele n_i avem din (1.6.3):

$$n'_i = n_{ij} n_j. \quad (6)$$

Relația (3.3) scrisă pentru σ'_n (același vector, în noul sistem de axe) dă prin urmare, folosind și (5):

$$\sigma'_{ni} = \sigma'_{ij} n'_j = n_{ih} n_{jk} \sigma_{hk} n_{il} n_l,$$

de unde, utilizând (1.6.2) și din nou (3.3), obținem

$$\sigma'_{ni} = n_{ih} \sigma_{hk} n_k = n_{ih} \sigma_{nh}, \quad (7)$$

astfel că σ_n respectă legea de transformare vectorială. Mărimea

$$\sigma_{ni}^2 = \sigma_{ij} \sigma_{ih} n_j n_h \quad (8)$$

este un invariant: pătratul modulului vectorului tensiune. Într-adevăr, avem pe rînd

$$\begin{aligned} \sigma_{ni}^2 &= \sigma'_{ij} n'_j \sigma'_{ih} n'_h = n_{i\alpha} n_{j\beta} \sigma_{\alpha\beta} n_{j\rho} n_\rho n_{i\gamma} n_{h\delta} \sigma_{\gamma\delta} n_{h\epsilon} n_\epsilon = \\ &= \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\rho} \delta_{\epsilon\delta} n_\rho n_\epsilon \sigma_{\alpha\beta} \sigma_{\gamma\delta} = \sigma_{\alpha\beta} n_\beta \sigma_{\alpha\delta} n_\delta. \end{aligned}$$

Mărimile σ_1 , σ_2 , σ_3 sînt vectori. Trebuie să distingem însă între aceste mărimi — și liniile matricei Σ . Astfel de pildă, cantitatea $\sigma_{11}^2 + \sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2$ nu este un invariant la o schimbare de axe, dacă înlocuim σ_{ij} prin σ'_{ij} . Pentru a sublinia — dacă e cazul — caracterul de componentă a unui vector a mărimii σ_{11} , de pildă, o vom nota $(\sigma_1)_1$. La o schimbare de axe, σ'_{11} înseamnă componenta pe axa x'_1 a tensiunii pe elementul de normală x'_1 , în timp ce $(\sigma_1)'_1$ este componenta pe axa x'_1 a tensiunii pe elementul de normală neschimbată x_1 .

c) Direcții principale

Consecințele ce decurg din caracterul tensorial al tensiunii pot fi expuse în deplin paralelism cu cele din teoria deformației. În particular, acest caracter tensorial poate sluji la transcrierea invariantă a tuturor relațiilor teoriei.

Studiul direcțiilor principale repetă cele spuse în §1.7. Există deci trei direcții triortogonale, numite *axe principale ale tensiunii*, pentru care tensiunile tangențiale σ_{ij} ($i \neq j$) sînt nule, iar tensiunile normale

σ_{ii} au caracter staționar. (Dat fiind că tensiunile tangențiale sînt nule, rezultă că pe aceste trei direcții vectorul tensiune coincide cu componenta sa normală, pentru care s-a pus problema de extremum.) Valorile staționare ale tensiunii normale se obțin rezolvînd o ecuație analogă cu (1.7.6):

$$\begin{vmatrix} \sigma_{11} - \sigma & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - \sigma & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - \sigma \end{vmatrix} = 0, \quad (9)$$

ale cărei rădăcini $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ se numesc *tensiuni (normale) principale*. Matricea tensiunilor redusă la axe principale ia, evident, forma diagonală.

Cunoașterea stării de tensiune este asigurată de cunoașterea celor 6 componente σ_{ij} . Reducerea tensorului tensiune la axe principale arată că cunoașterea celor șase componente σ_{ij} este echivalentă cu cunoașterea celor trei tensiuni σ_i și a celor trei unghiuri ale lui Euler care caracterizează poziția axelor principale.

Liniaritatea relațiilor (3.3) și (4.10) ne asigură că starea de tensiune într-un punct poate fi reprezentată ca sumă a trei tensiuni de întindere (sau compresiune) după axe, și a trei tensiuni de alunecare în planele coordonate corespunzătoare. Orice stare de tensiune poate fi redusă la suprapunerea a numai trei tensiuni de întindere (compresiune) după axe principale.

d) Cuadricele tensiunii

Analog celor din § 1.8, se poate construi o cuadrică (sau două cuadrice) ale tensiunii. Rolul formei patratice $e(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ îl are aci forma $s(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, iar rolul alungirii ε_m pe direcția ξ îl are aci componenta normală N a tensiunii. În felul acesta ajungem la relația (4), care joacă aci rolul relației (1.8.5).

Construind cuadricele

$$s(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \pm c^2, \quad (10)$$

valorile lui N se obțin ducînd din centrul cuadricei o direcție paralelă cu \mathbf{n} , luînd pentru $|\xi|$ distanța dintre centru și punctul în care direcția astfel aleasă înțeapă cuadrica și calculînd raportul

$$N = \pm c^2/|\xi|^2, \quad (11)$$

unde semnele \pm corespund întinderii, respectiv compresiunii.

Pentru a determina vectorul σ_n , să introducem (2) în (3.3), de unde

$$\sigma_{ni} = \sigma_{ij} \xi_j / |\xi| = \frac{1}{2} (\sigma_{kj} \xi_k \xi_j)_{,i} / |\xi|,$$

adică

$$\sigma_{ni} = \frac{1}{2} s_{,i} / |\xi|. \quad (12)$$

(Amintim că x este fix, iar derivările se efectuează în raport cu ξ_i). Vectorul σ_n rezultă deci paralel cu normala la quadricele (10).

Pentru a construi acest vector, trebuie să construim așadar quadrica (10) și să ducem o direcție paralelă cu n , care înțeapă una sau cealaltă din quadrice într-un punct H . Normala la quadrică în H definește direcția lui σ_n . Relația (11) dă valoarea componentei sale normale N . Cunoșcând suportul vectorului σ_n și proiecția sa N pe o direcție dată, putem determina însuși vectorul σ_n .

Faptul că vectorul tensiune este paralel cu normala la quadrică arată că, dacă σ_n este dirijat după n (așadar dacă tensiunea se reduce la componenta ei normală), atunci σ_n și n sînt dirijați după una din axe quadricei. (Amintim că problema găsirii axelor unei quadrice se rezolvă pornind chiar de la condiția ca normala să fie dirijată după raza vectoare. Se ajunge atunci tocmai la ecuația (9) și la analogul ecuațiilor (1.7.5).)

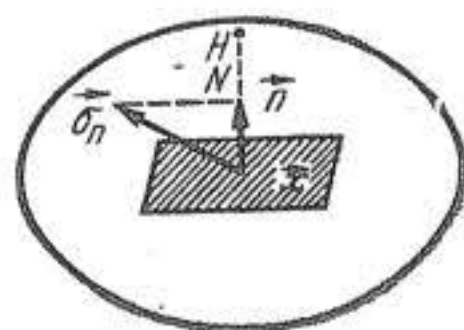


Fig. 2.5.1

Raportînd quadrica la axele principale, obținem din (10):

$$\sigma_1 \xi_1^2 + \sigma_2 \xi_2^2 + \sigma_3 \xi_3^2 = \pm c^2. \quad (13)$$

Se pot repeta acum cuvînt cu cuvînt cele spuse în § 1.8, pag. 53. Aceasta conduce la a considera stări de *tensiune antiplane* (vezi (1.8.9)), în care de exemplu

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{12} = 0; \quad (14)$$

stări de *tensiune plane* (vezi (1.8.8)), în care de exemplu

$$\sigma_{31} = \sigma_{32} = \sigma_{33} = 0; \quad (15)$$

și stări de *tensiune spațiale* (sau *tridimensionale*).

Pentru a ne da seama de caracterul repartiției tensiunilor în jurul unui punct, este suficientă cunoașterea *semnelor* tensiunilor principale. Într-adevăr, dacă toți $\sigma_i > 0$, trebuie să alegem semnul plus în (13), și obținem o singură quadrică reală, un elipsoid; relația (11) ne dă

$$N = c^2 / |\xi|^2 > 0, \quad (16)$$

astfel că pe toate direcțiile apar tensiuni de întindere. Dacă toți $\sigma_i < 0$, trebuie să alegem semnul minus; obținem tot un elipsoid, dar (11) devine

$$N = -c^2 / |\xi|^2 < 0, \quad (17)$$

și pe toate direcțiile apar tensiuni de compresiune.

Dacă mărimile σ_i sînt de semne diferite, întîlnim mai multe posibilități. Să reținem de pildă cazul $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 > 0$, $\sigma_3 < 0$. Relația (13) se scrie acum

$$|\sigma_1|\xi_1^2 + |\sigma_2|\xi_2^2 - |\sigma_3|\xi_3^2 = \pm c^2, \quad (18)$$

și reprezintă ansamblul a doi hiperboloizi conjugați. În interiorul conului asimptotic avem $N < 0$, iar în exterior, $N > 0$. Pe conul asimptotic, $N = 0$, așadar tensiunea se reduce la componenta sa tangențială. Pentru a construi însă efectiv acest con, trebuie să cunoaștem desigur nu numai semnele, ci și valorile tensiunilor principale.

OBSERVAȚIE. Construcția cuadriceilor (13) este practic greu realizabilă, întrucît e vorba de o construcție spațială. Ea ne interesează aci numai pentru sublinierea unor aspecte geometrice ale problemei. Există construcții plane care permit descrierea efectivă a stării de tensiune (și tot astfel, de deformare) în vecinătatea oricărui punct. Pentru cea mai importantă din ele — *diagrama lui Mohr* — vezi de pildă A. Nadai [1], capitolul 10.

e) Invarianți

Pornind de la ecuația (9) se pot studia invarianții tensiunii, tot așa cum ecuația (1.7.6) a condus la studiul invarianților deformației. (Dacă s-ar accepta drept componente ale deformației cantitățile ε_{ii} , $2\varepsilon_{ij}$ — vezi Observația de la finele §1.5 — atunci ecuațiile (1.7.6) și (9), și deci și invarianții corespunzători, ar avea forme diferite.)

Conchidem că există trei invarianți ai tensiunii:

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3; \\ \Sigma_2 &= \sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}\sigma_{33} + \sigma_{33}\sigma_{11} - \sigma_{12}^2 - \sigma_{23}^2 - \sigma_{31}^2 = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1; \\ \Sigma_3 &= \text{Det}[\sigma_{ij}] = \sigma_1\sigma_2\sigma_3. \end{aligned} \quad (19)$$

Cel mai adesea vom nota $\Sigma_1 = \Theta$. Termenii din coloana a treia a acestor egalități reprezintă cazul particular, echivalent însă cu cel general, al celor din coloana a doua. Folosind notațiile (19), ecuația (9) ia forma

$$\sigma^3 - \Sigma_1 \sigma^2 + \Sigma_2 \sigma - \Sigma_3 = 0. \quad (20)$$

§ 6. TENSIUNILE TANGENȚIALE MAXIMALE

Determinarea axelor principale ale tensiunii este legată de chestiunea găsirii valorilor extremale ale componentei *normale* a tensiunii. Să căutăm acum direcțiile în lungul cărora componentele *tangențiale* ale tensiunii au caracter extremal.

Alegînd drept axe de coordonate, axele principale ale tensiunii, relațiile (3.3) devin¹⁾

$$\sigma_{ni} = \sigma_i n_i, \quad (1)$$

de unde

$$|\sigma_n|^2 = \sigma_i^2 n_i^2. \quad (2)$$

Pe de altă parte, relația (5.1) ia forma

$$N = \sigma_i n_i^2. \quad (3)$$

Pentru mărimea T a componentei tangențiale avem deci

$$T^2 = |\sigma_n|^2 - N^2 = \sigma_i^2 n_i^2 - (\sigma_i n_i^2)^2. \quad (4)$$

Ținînd seama aci de relația

$$\sum_{i=1}^3 n_i^2 = 1, \quad (5)$$

obținem

$$T^2 = (\sigma_1^2 - \sigma_3^2) n_1^2 + (\sigma_2^2 - \sigma_3^2) n_2^2 + \sigma_3^2 - \\ - [(\sigma_1 - \sigma_3) n_1^2 + (\sigma_2 - \sigma_3) n_2^2 + \sigma_3]^2. \quad (6)$$

Derivînd aci în raport cu n_i ($i = 1, 2$), obținem din (5), (6) sistemul

$$(\sigma_1^2 - \sigma_3^2) n_1 - 2(A + \sigma_3)(\sigma_1 - \sigma_3) n_1 = 0, \\ (\sigma_2^2 - \sigma_3^2) n_2 - 2(A + \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_3) n_2 = 0, \\ n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1, \quad (7)$$

unde am notat

$$A = (\sigma_1 - \sigma_3) n_1^2 + (\sigma_2 - \sigma_3) n_2^2. \quad (8)$$

Să presupunem acum că ecuația (5.9) are rădăcinile distincte. Simplificînd în (7) cu $(\sigma_1 - \sigma_3)$, respectiv cu $(\sigma_2 - \sigma_3)$, obținem

$$(\sigma_1 - \sigma_3 - 2A) n_1 = 0, \quad (\sigma_2 - \sigma_3 - 2A) n_2 = 0, \quad \sum_{i=1}^3 n_i^2 = 1. \quad (9)$$

Soluția banală $n_1 = n_2 = 0, n_3 = 1$, nu convine, întrucît ea dă pentru n direcția uneia dintre axele principale, așadar *minimumul* $T^2 = 0$. Dimpotrivă, alegînd $n_1 \neq 0, n_2 \neq 0$, putem simplifica primele două ecuații (9) și conchide apoi prin scădere că $\sigma_2 = \sigma_1$, ceea ce contrazice presupunerea inițială.

Rămîne posibilitatea $n_1 = 0, n_2 \neq 0$, și cele analoge care se obțin prin permutări circulare ale indicilor 1, 2, 3. Ecuația a doua din (9) devine

$$\sigma_2 - \sigma_3 - 2(\sigma_2 - \sigma_3) n_2^2 = 0,$$

¹⁾ În (1) fără semnul sumă, dar și fără (!) — întrucît indicele i apare și în primul membru. În (2) și (3), indicele i este indice de sumare.

ceea ce dă $n_2 = \pm \sqrt{2}/2$. Ținând seama și de a treia ecuație (9), deducem

$$n_1 = 0, \quad n_2 = n_3 = \pm \sqrt{2}/2, \quad (10)$$

și prin permutări circulare, încă două soluții de același tip.

Întrucât $n_1 = 0$, direcția \mathbf{n} este normală pe axa Ox_1 . Așadar, \mathbf{n} este situat în planul Ox_2x_3 , și anume pe bisectoarea unghiului format de axele Ox_2 și Ox_3 . Elementul de suprafață având normala \mathbf{n} va conține deci axa Ox_1 , fiind egal înclinat pe planele $x_2 = 0$ și $x_3 = 0$.

În definitiv, în sistemul de axe principale, planele de coordonate sînt plane de tensiuni *normale* staționare (în particular, extremale), iar planele bisectoare ale diedrelor coordonate sînt plane de tensiuni *tangențiale* staționare (în particular, extremale).

Să evaluăm tensiunile ce acționează pe planele bisectoare. Introducînd (10) în (4), avem

$$T_1^2 = \frac{1}{2} \sigma_2^2 + \frac{1}{2} \sigma_3^2 - \left(\frac{1}{2} \sigma_2 + \frac{1}{2} \sigma_3 \right)^2,$$

de unde — pentru primul plan, și apoi similar pentru celelalte :

$$T_1 = \pm \frac{1}{2} (\sigma_2 - \sigma_3), \quad T_2 = \pm \frac{1}{2} (\sigma_3 - \sigma_1), \quad T_3 = \pm \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_2). \quad (11)$$

Componentele normale ale tensiunii pe aceleași plane se obțin introducînd (10) în (3), de unde — prin permutări circulare — :

$$N_1 = \frac{1}{2} (\sigma_2 + \sigma_3), \quad N_2 = \frac{1}{2} (\sigma_3 + \sigma_1), \quad N_3 = \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_2). \quad (12)$$

Notînd cu σ_1 pe cea mai mare și cu σ_3 pe cea mai mică (în valoare relativă !) dintre tensiunile principale, urmează că tensiunea tangențială maximă este T_2 .

CAPITOLUL 3

LEGĂTURA DINTRE STAREA DE TENSIUNE ȘI STAREA DE DEFORMAȚIE

§ 1. DESPRE IDEEA DE LEGE FIZICĂ PENTRU CORPURILE ELASTICE

Atît teoria geometrică cît și cea statică mai sus examinate fac abstracție de proprietățile mecanice reale ale corpurilor. În aceste condiții nu se poate spune nimic despre *modul* în care forțele exterioare provoacă, datorită proprietăților materialului, anumite deplasări și deformații; altfel spus, despre *modul în care corpul se opune solicitării*.

Pînă în acest moment, modelul corpului solid era mediul continuu și deformabil, caracterizat de primele trei ipoteze din § 0.4 — valabile pentru orice corp solid, și chiar nu numai pentru solide. Pentru a merge mai departe, trebuie să precizăm acest model, stabilind forma dependenței dintre cîmpul deformațiilor și cel al tensiunilor, dependență care poartă numele de *lege fizică*.

Din punct de vedere teoretic, problema legii fizice este o problemă de structură a materiei. Încă la începutul secolului XIX, Cauchy, Poisson și Navier au încercat să fondeze teoria legii fizice cu ajutorul forțelor de atracție și repulsie intermoleculară (vezi A. Love [1], Anexa B, sau G. Müller și A. Timpe [1]). Aceste raționamente au dus la relații apropiate de cele utilizate și azi în teoria liniară.

Ceva mai tîrziu este inițiată cercetarea acestei probleme cu mijloacele termodinamicii: Lord Kelvin [2] (vezi și [4], vol. 3, „On the dynamical theory of heat”, cap. 7) și J. Gibbs [1], [2]. O bibliografie mai amănunțită este dată în § 5, pag. 103.

Către finele secolului trecut, cercetările lui W. Voigt [1], [2] asupra cristalelor deschid drumul spre studiul proprietăților *mechanice* ale corpului solid din punctul de vedere al *fizicii* corpului solid. Indicăm aci lucrările clasice fundamentale ale lui M. Born (vezi M. Born și K. Huang [1]); punctul de vedere al lui Born este analizat și de M. Drăganu [1], vol. 2, cap. 21; vezi de asemenea L. Brillouin [1]). Din lucrările recente, menționăm studiile de sinteză ale lui G. Leibfried [1] (în special secțiunea D), A. Seeger [1] (în special cap. 2, pct. a) și lucrările asupra teoriei dislocațiilor (vezi mai jos § 4.1, pag. 125).

Invariabilitatea distanțelor și unghiurilor epuizează conținutul legii fizice în mecanica solidului rigid. Echilibrul se stabilește ca consecință a anumitor relații între forțele exterioare (inclusiv reacțiuni), fără cheltuire de lucru mecanic. Forțele interioare nu pot fi determinate.

Dimpotrivă, echilibrul solidului deformabil se stabilește în corpul deformat. Starea corpului e cunoscută dacă cunoaștem *poziția* fiecărui punct, și *forțele* ce acționează în oricare punct, așadar deplasările (sau

deformațiile) și tensiunile. Curba caracteristică a materialului pune în evidență (în cazul unidimensional) *pentru zona elastică* o relație simplă între tensiuni și deformații; să ne oprim asupra acesteia, generalizând-o convenabil în cazul tridimensional.

Abstracție făcând de faptul că tensiunile sînt definite în coordonatele antrenate de deformație, ipoteza dependenței locale impune, atît pentru încărcare cît și pentru descărcare, aceleași relații, de forma

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(\varepsilon_{hk}; x; T), \quad (1)$$

unde funcțiile considerate sînt uniforme (fiecărui sistem de deformații îi corespunde *un* sistem de tensiuni), iar temperatura T joacă rol de parametru.

Ipoteza elasticității ideale impune ca relațiile (1) să fie inversabile, așadar ca să putem scrie

$$\varepsilon_{hk} = \varepsilon_{hk}(\sigma_{ij}; x; T). \quad (2)$$

Pentru aceasta, este necesar și suficient ca jacobianul relațiilor (1) sau (2), în raport cu variabilele ε_{hk} (sau σ_{ij}) să fie mărginit și diferit de zero :

$$0 < |D(\sigma_{11}, \dots, \sigma_{31})/D(\varepsilon_{11}, \dots, \varepsilon_{31})| < \infty. \quad (3)$$

În cadrul ipotezelor dependenței locale și elasticității ideale, starea mecanică în fiecare punct și pentru fiecare temperatură este deci determinată prin cunoașterea a numai 6, și nu a 12 cantități. În particular, de aci rezultă că deformația este reversibilă : dacă corpul trece a doua oară printr-o stare de tensiune anumită (inclusiv starea nulă), el trebuie să treacă în același timp și prin starea de deformație corespunzătoare.

Relațiile (1) sînt valabile numai între anumite limite ; ele descriu anumite proprietăți fizice ale corpului și *epuizează*, din punctul de vedere al teoriei elasticității, aceste proprietăți. Dacă se depășesc anumite limite pentru deformații sau tensiuni sau anumite combinații ale lor, sau dacă alți parametri variază în afara unor limite permise, relațiile (1) își pierd valabilitatea : totul se petrece ca și cum din punct de vedere fizic am avea de a face cu alt corp, caracterizat de alte proprietăți.

Pentru diferite tipuri de proprietăți fizice neelastice, dar totuși apropiate de proprietățile elastice, vezi lucrările indicate în § 4.1, pag. 124—126.

§ 2. LEGEA LUI HOOKE

a) Legi liniare

În anul 1660, Robert Hooke a publicat (sub formă de anagramă) legea dependenței dintre tensiuni și deformații : „*ut tensio, sic vis*” — exprimînd astfel proporționalitatea dintre forța ce întinde o epruvetă metalică

(în speță, un resort), și alungirea (deformația) pe care această forță o provoacă. Legea se limita la cazul unidimensional, descris în (0.2.5). Anagrama a fost descifrată în 1678 (R. Hooke [1]). Aceeași lege a fost regăsită independent de către E. Mariotte [1], care a dat și primele ei aplicații la problema încovoierii barelor cilindrice (abordată încă de G. Galilei [1]). *Astăzi, relația lui Hooke și Mariotte pare simplă și evidentă. Dar apariția ei a avut pentru mecanica solidelor deformabile importanța pe care legile lui Newton le-au avut pentru mecanică în ansamblu.*

O generalizare firească a legii lui Hooke din (0.2.5) se obține luând ca punct de pornire relațiile (1.1) și presupunând că funcțiile considerate sînt desfășurabile în serii Taylor (cu coeficienți ce depind în genere de x și T). Se poate ajunge la concluzii similare și pornind de la teorema lui Weierstrass asupra aproximării funcțiilor continue prin polinoame (vezi A. Green și J. Adkins [1], § 1.3). Pentru aceasta este necesar ca fie componentele ε_{ij} , fie coeficienții termenilor de grad superior, să fie suficient de mici, pentru ca să fim îndreptățiți să reținem în aceste serii numai termenii liniari¹). (Subliniem că nu se pune nici o problemă de convergență: aceste relații nu se determină teoretic sub formă compactă, ci experimental, și în fapt tocmai sub forma unor polinoame în ε_{ij} .)

Dacă relațiile (1.1) pot fi liniarizate, se spune că legea fizică este liniară, sau că *problema este liniară din punct de vedere fizic*.

Se poate afirma că liniaritatea fizică este favorizată de cea geometrică, dar ea nu se reduce la aceasta. Relațiile (1.1) pot fi liniare chiar în cadrul unei teorii neliniare geometrice (mărimile ε_{ij} înlocuindu-se atunci cu $\tilde{\varepsilon}_{ij}$ și toate relațiile trebuind să fie scrise într-un sistem determinat de coordonate: cele inițiale, sau cele antrenate de deformație), dacă termenii de grad superior au coeficienți foarte mici. Invers, dacă acești termeni au coeficienți foarte mari, sîntem siliți să ținem seama de ei chiar și în cadrul unei teorii liniare geometrice. Pentru raporturile dintre liniaritatea geometrică și liniaritatea fizică, vezi P. Germain [1], § 5.1. Vezi și mai jos, § 4.1, pag. 126.

O teorie bazată pe relații liniare atît geometric, cît și fizic, se va numi pe scurt *liniară*.

b) Legea lui Hooke

Presupunînd că la deformații nule corespund tensiuni nule (așadar nu există „tensiuni inițiale” — care pot însă apare în unele probleme importante, de pildă în studiul metalelor călite), obținem din (1.1) *legea lui Hooke* (generalizată)

$$\sigma_{ij} = c_{ij}^{hk} \varepsilon_{hk}, \quad i, j, h, k = 1, 2, 3, \quad (1)$$

unde mărimile c_{ij}^{hk} sînt în genere funcții de punct, de alegerea axelor și de temperatură. Dimensiunea lor este FL⁻².

¹) Pentru unele obiecții la acest mod de a raționa, vezi de exemplu A. Clebsch și B. de Saint-Venant [1], nota la pag. 39.

Aparent, în (1) intervin $3^4 = 81$ coeficienți. În fapt, simetria tensorilor tensiune și deformație conduce (făcînd uz și de un evident raționament de simetrizare) la egalitățile

$$c_{ij}^{hk} = c_{ij}^{kh} = c_{ji}^{hk} = c_{ji}^{kh}, \quad (2)$$

astfel că numărul lor se reduce la $6 \times 6 = 36$.

Condiția de biunivocitate (1.3) se scrie acum

$$\text{Det } [c_{ij}^{hk}] \neq 0 \quad (3)$$

Rezolvînd relațiile (1) în raport cu componentele deformației, obținem

$$\varepsilon_{ij} = C_{ij}^{hk} \sigma_{hk} \quad (4)$$

cu egalități analoge cu (2) pentru mărimile C_{ij}^{hk} .

Cantitățile c_{ij}^{hk} se numesc *coeficienți de rigiditate* (elastică): cu cît ele sînt mai mari, cu atît e nevoie de tensiuni mai mari pentru a realiza o anumită stare de deformație. Cantitățile C_{ij}^{hk} se numesc *coeficienți de deformabilitate*: cu cît ele sînt mai mari, cu atît corpul se deformează mai mult la o stare de tensiune dată.

Intrucît funcțiile (1.1) caracterizează pe deplin proprietățile mecanice ale corpului, rezultă că, în cazul liniar, cunoașterea coeficienților de rigiditate echivalează cu cunoașterea acestor proprietăți. Dacă coeficienții de rigiditate sînt funcții de punct, corpul este *neomogen* din punct de vedere mecanic. Dacă ei sînt constanți, corpul este *omogen*.

c) Tensorul lui Hooke

Natura dependenței acestor coeficienți față de alegerea axelor este determinată nu numai de proprietățile eventual diferite ale materialului după diferite direcții, ci și de proprietățile tensoriale ale componentelor σ_{ij} și ε_{ij} . (Din același punct de vedere se pot studia și proprietățile funcțiilor din (1.1).)

Să considerăm relațiile (1) transcrise într-un sistem de axe $Ox'_1x'_2x'_3$:

$$\sigma'_{ij} = c'_{ij}{}^{hk} \varepsilon'_{hk}. \quad (5)$$

Ținînd seama de (1.6.6) și (2.5.5), obținem din (5)

$$n_{i\alpha} n_{j\beta} \sigma_{\alpha\beta} = c'_{ij}{}^{hk} n_{hp} n_{kq} \varepsilon_{pq}.$$

Amplificînd această egalitate cu $n_{il} n_{jm}$, obținem

$$n_{il} n_{jm} n_{i\alpha} n_{j\beta} \sigma_{\alpha\beta} = n_{il} n_{jm} n_{hp} n_{kq} c'_{ij}{}^{hk} \varepsilon_{pq},$$

sau încă, ținînd seama de relațiile de ortogonalitate (1.6.2):

$$\delta_{l\alpha} \delta_{m\beta} \sigma_{\alpha\beta} = \sigma_{lm} = n_{il} n_{jm} n_{hp} n_{kq} c'_{ij}{}^{hk} \varepsilon_{pq},$$

de unde, comparînd cu (1), deducem imediat

$$c_{lm}^{pq} = n_{il} n_{jm} n_{hp} n_{kq} c'_{ij}{}^{hk}. \quad (6)$$

Coeficienții de rigiditate elastică formează deci un tensor de ordinul patru : *tensorul lui Hooke*²⁾. Acest rezultat depinde numai de caracterul tensorial al deformației și tensiunii și de caracterul liniar și omogen al relațiilor (1).

§ 3. CAZURI PARTICULARE ALE LEGII LUI HOOKE

a) Anizotropie

Corpurile pentru care relațiile (2.1) sînt valabile se numesc *liniar anizotrope*, sau pe scurt *anizotrope*. Coeficienții c_{ij}^{hk} fiind independenți, comportarea corpului diferă de la o direcție la alta în jurul oricărui punct. Dacă însă corpul posedă anumite proprietăți de simetrie mecanică, acești coeficienți rezultă legați prin anumite relații, și numărul celor independenți dintre ei se micșorează.

Sub o formă generală, această problemă (în teoria neliniară) este studiată de J. Adkins [1], [2]. (Vezi A. Green și J. Adkins [1], cap. 1.) Aci, ne vom limita numai la cîteva cazuri simple de simetrie elastică, în teoria liniară.

b) Un plan de simetrie elastică

Dacă proprietățile mecanice își păstrează forma după direcții simetrice față de un plan — pe care îl vom alege drept plan $x_3 = 0$ — rezultă că, trecînd la axele $Ox'_1 x'_2 x'_3$ caracterizate de relațiile

$$x'_1 = x_1, \quad x'_2 = x_2, \quad x'_3 = -x_3, \quad (1)$$

trebuie ca legea lui Hooke (2.1) să-și păstreze forma.

În noile axe, în loc de (2.5) vom avea deci

$$\sigma'_{ij} = c_{ij}^{hk} \varepsilon'_{hk}. \quad (2)$$

Întrucît (1) nu este o rotație de axe, formulele (1.6.6) nu pot fi utilizate. Avem însă ușor, pornind de la definiția componentelor deformației :

$$\begin{aligned} \varepsilon'_{11} &= \varepsilon_{11}, \quad \varepsilon'_{22} = \varepsilon_{22}, \quad \varepsilon'_{33} = \varepsilon_{33}, \\ \varepsilon'_{12} &= \varepsilon_{12}, \quad \varepsilon'_{23} = -\varepsilon_{23}, \quad \varepsilon'_{31} = -\varepsilon_{31}, \end{aligned} \quad (3)$$

și relații analoge pentru componentele tensiunii.

²⁾ În formula (6) sînt concentrate 81 relații, fiecare conținînd cîte 81 termeni, așa dar în total 6561 termeni. Avantajele notației tensoriale sînt evidente.

Din (2.1) deducem pentru $i = j = 1$:

$$\sigma_{11} = c_{11}^{11} \varepsilon_{11} + c_{11}^{22} \varepsilon_{22} + c_{11}^{33} \varepsilon_{33} + 2c_{11}^{12} \varepsilon_{12} + 2c_{11}^{23} \varepsilon_{23} + 2c_{11}^{31} \varepsilon_{31}, \quad (4)$$

în timp ce din (2) și (3) obținem

$$\sigma'_{11} = c_{11}^{11} \varepsilon_{11} + c_{11}^{22} \varepsilon_{22} + c_{11}^{33} \varepsilon_{33} + 2c_{11}^{12} \varepsilon_{12} - 2c_{11}^{23} \varepsilon_{23} - 2c_{11}^{31} \varepsilon_{31}. \quad (5)$$

Egalitatea $\sigma'_{11} = \sigma_{11}$ (care decurge din relațiile (3) scrise pentru tensiuni) este posibilă dacă și numai dacă $c_{11}^{13} = c_{11}^{23} = 0$. Repetând același raționament pentru toate componentele tensiunii, obținem pe rînd

$$\begin{aligned} c_{11}^{13} &= c_{11}^{23} = c_{22}^{13} = c_{22}^{23} = c_{33}^{13} = c_{33}^{23} = c_{12}^{13} = c_{12}^{23} = \\ &= c_{13}^{11} = c_{13}^{22} = c_{13}^{33} = c_{13}^{12} = c_{23}^{11} = c_{23}^{22} = c_{23}^{33} = c_{23}^{12} = 0, \end{aligned} \quad (6)$$

astfel că un corp elastic (liniar) cu un plan de simetrie are $36 - 16 = 20$ coeficienți de rigiditate independenți.

c) Ortotropie. Trei plane de simetrie triortogonale

Raționamentul de mai sus poate fi repetat și pentru axe ce se obțin schimbînd sensul pe axa x_2 , respectiv x_1 . Relațiile corespunzătoare decurg din (6) prin permutări circulare ale indicilor. În virtutea condițiilor de simetrie (2.2), obținem unele relații ce coincid cu (6), precum și relațiile noi

$$c_{11}^{12} = c_{11}^{13} = c_{12}^{22} = c_{12}^{33} = c_{13}^{23} = c_{22}^{12} = c_{23}^{13} = c_{33}^{12} = 0, \quad (7)$$

astfel că numărul coeficienților de rigiditate independenți se reduce la 12.

Corpurile de acest tip se numesc ortogonal-anizotrope, sau pe scurt *ortotrope*. Legea lui Hooke se scrie în acest caz sub forma

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= c_{11}^{11} \varepsilon_{11} + c_{11}^{22} \varepsilon_{22} + c_{11}^{33} \varepsilon_{33}, \\ \sigma_{22} &= c_{22}^{11} \varepsilon_{11} + c_{22}^{22} \varepsilon_{22} + c_{22}^{33} \varepsilon_{33}, \\ \sigma_{33} &= c_{33}^{11} \varepsilon_{11} + c_{33}^{22} \varepsilon_{22} + c_{33}^{33} \varepsilon_{33}, \\ \sigma_{12} &= 2c_{12}^{12} \varepsilon_{12}, \quad \sigma_{23} = 2c_{23}^{23} \varepsilon_{23}, \quad \sigma_{31} = 2c_{31}^{31} \varepsilon_{31}. \end{aligned} \quad (8)$$

Din (8) urmează că, dacă $\varepsilon_{ij} = 0$ pentru $i \neq j$, atunci avem și $\sigma_{ij} = 0$. Așadar, într-un corp ortotrop, axele principale ale deformației și cele ale tensiunii coincid. De aceea, în teoria liniară a corpurilor ortotrope se vorbește pe scurt despre *axele principale* într-un punct dat.

Categoria corpurilor ortotrope este foarte importantă în practică.

Similar celor de mai sus, se pot considera — în loc de corpuri cu plane de simetrie — corpuri cu diferite tipuri de axe de simetrie.

d) Izotropie

În acest caz, proprietățile elastice trebuie să rămână invariante la orice simetrie și orice rotație a axelor — deci la o permutare circulară a indicilor axelor, precum și la o rotație în jurul unei axe oarecare.

Luând mai întâi

$$x'_1 = x_2, \quad x'_2 = x_3, \quad x'_3 = x_1, \quad (9)$$

obținem evident

$$\varepsilon'_{11} = \varepsilon_{22}, \quad \varepsilon'_{22} = \varepsilon_{33}, \quad \varepsilon'_{33} = \varepsilon_{11}, \quad \varepsilon'_{12} = \varepsilon_{23}, \quad \varepsilon'_{23} = \varepsilon_{31}, \quad \varepsilon'_{31} = \varepsilon_{12}, \quad (10)$$

și relații analoge pentru componentele tensiunii. Avem deci din (8)

$$\sigma'_{11} = c_{11}^{11} \varepsilon_{22} + c_{11}^{22} \varepsilon_{33} + c_{11}^{33} \varepsilon_{11},$$

astfel că relația $\sigma'_{11} = \sigma_{22}$ este posibilă dacă și numai dacă $c_{11}^{11} = c_{22}^{22}$, $c_{11}^{22} = c_{22}^{33}$, $c_{11}^{33} = c_{22}^{11}$. Considerînd și transformarea

$$x'_1 = x_3, \quad x'_2 = x_1, \quad x'_3 = x_2, \quad (11)$$

și calculînd valorile tuturor componentelor σ'_i în ambele transformări (9) și (11), obținem

$$\begin{aligned} c_{11}^{11} = c_{22}^{22} = c_{33}^{33} = a, \quad c_{11}^{22} = c_{22}^{33} = c_{33}^{11} = b, \\ c_{11}^{12} = c_{22}^{23} = c_{33}^{31} = c, \quad c_{11}^{12} = c_{22}^{23} = c_{33}^{31} = d, \end{aligned} \quad (12)$$

astfel că legea lui Hooke (8) devine provizoriu, pentru corpuri ortotrope cu proprietăți echivalente în lungul celor trei axe :

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= a\varepsilon_{11} + b\varepsilon_{22} + c\varepsilon_{33}, \\ \sigma_{22} &= c\varepsilon_{11} + a\varepsilon_{22} + b\varepsilon_{33}, \\ \sigma_{33} &= b\varepsilon_{11} + c\varepsilon_{22} + a\varepsilon_{33}, \\ \sigma_{12} &= 2d\varepsilon_{12}, \quad \sigma_{23} = 2d\varepsilon_{23}, \quad \sigma_{31} = 2d\varepsilon_{31}. \end{aligned} \quad (13)$$

În fine, să presupunem că axele se rotesc de un unghi ϑ în jurul axei x_1 ; componentele deformației sînt date deci de formule analoge cu (1.7.17) (plus încă două formule pentru ε_{23} și ε_{31} , de care nu avem însă nevoie). Componentele tensiunii se transformă în același mod. Avem deci mai întâi

$$\sigma'_{22} = \sigma_{22} \cos^2 \vartheta + \sigma_{23} \sin 2\vartheta + \sigma_{33} \sin^2 \vartheta,$$

de unde, ținînd seama de (13) :

$$\begin{aligned} \sigma'_{22} &= (c\varepsilon_{11} + a\varepsilon_{22} + b\varepsilon_{33}) \cos^2 \vartheta + 2d\varepsilon_{23} \sin 2\vartheta + \\ &\quad + (b\varepsilon_{11} + c\varepsilon_{22} + a\varepsilon_{33}) \sin^2 \vartheta. \end{aligned} \quad (14)$$

Pe de altă parte, a doua relație (13) își păstrează forma în axele noi, astfel că, folosind din nou (1.7.17), obținem

$$\begin{aligned} \sigma'_{22} = c\varepsilon'_{11} + a\varepsilon'_{22} + b\varepsilon'_{33} = c\varepsilon_{11} + a(\varepsilon_{22} \cos^2 \vartheta + \varepsilon_{23} \sin 2\vartheta + \\ + \varepsilon_{33} \sin^2 \vartheta) + b(\varepsilon_{22} \sin^2 \vartheta - \varepsilon_{23} \sin 2\vartheta + \varepsilon_{33} \cos^2 \vartheta). \end{aligned} \quad (15)$$

Comparând relațiile (14) și (15), deducem $b = c$, $2d = a - b$. Nici o altă rotație sau simetrie nu conduce la relații noi. Prin urmare, notînd

$$b = c = \lambda, \quad d = \mu, \quad a = \lambda + 2\mu, \quad (16)$$

și amintind (1.8.11), putem transcrie (13) sub forma

$$\begin{aligned} \sigma_{11} = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_{11}, \quad \sigma_{22} = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_{22}, \quad \sigma_{33} = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_{33}, \\ \sigma_{12} = 2\mu\varepsilon_{12}, \quad \sigma_{23} = 2\mu\varepsilon_{23}, \quad \sigma_{31} = 2\mu\varepsilon_{31}, \end{aligned} \quad (17)$$

adică, mai compact :

$$\sigma_{ij} = \lambda\theta\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}. \quad (18)$$

Din (12) și (16) rezultă acum

$$\begin{aligned} c_{11}^{11} = c_{22}^{22} = c_{33}^{33} = \lambda + 2\mu, \quad c_{12}^{12} = c_{23}^{23} = c_{31}^{31} = \mu, \\ c_{11}^{22} = c_{22}^{11} = c_{22}^{33} = c_{33}^{22} = c_{33}^{11} = c_{11}^{33} = \lambda, \end{aligned}$$

ceilalți 24 coeficienți fiind nuli, sau, mai compact :

$$c_{ij}^{hk} = \lambda\delta_{hk}\delta_{ij} + \mu(\delta_{ih}\delta_{jk} + \delta_{ik}\delta_{jh}). \quad (19)$$

Este evident că existența a 3 plane și a 3 axe de simetrie trirectangulare e suficientă pentru a asigura izotropia. Prin urmare, formulele (18) dau legea lui Hooke pentru un corp elastic *izotrop* (eventual neomogen) în teoria liniară. (Aceasta se poate verifica și cu ajutorul relațiilor (2.6).)

Putem privi așadar în practică mărimile λ , μ drept mărimi *scalare*. De aci rezultă invarianța relațiilor (18) : în orice schimbare de coordonate, coeficienții λ , μ rămîn neschimbați, iar mărimile σ_{ij} , ε_{ij} , δ_{ij} se transformă ca componente ale unor tensori.

Transcriind (18) în axe principale, avem și

$$\sigma_i = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (20)$$

Relațiile (18) reprezintă cazul particular al relațiilor (2.1) pentru corpuri elastice izotrope. Pentru a căpăta și cazul particular al relațiilor (2.4), să luăm $i = j$ în (18); obținem

$$\sigma_{ii} = 3\lambda\theta + 2\mu\varepsilon_{ii}, \quad (21)$$

unde sumele în raport cu i dau invarianții liniari Θ și θ :

$$\Theta = (3\lambda + 2\mu)\theta. \quad (22)$$

În orice material și în orice punct, putem evident realiza o stare de tensiune în care $\Theta \neq 0$. De aci urmează că în orice axe și în orice punct, avem

$$3\lambda + 2\mu \neq 0. \quad (23)$$

Cu aceasta, putem transcrie (18) sub forma

$$\varepsilon_{ij} = - \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \Theta \delta_{ij} + \frac{1}{2\mu} \sigma_{ij}. \quad (24)$$

Toate raționamentele precedente sînt valabile și pentru corpuri neomogene. Pentru corpuri omogene, coeficienții λ , μ se numesc *constantele lui Lamé*. Constanta μ a fost considerată anterior lui Lamé de către Coulomb în experiențele sale asupra torsiunii firelor cilindrice (vezi § 5.15, pag. 239), și e uneori numită *constanta lui Coulomb*. În literatura tehnică ea se notează adesea cu G — ceea ce dă totuși un aspect dezagreabil formulelor (18) și (24).

Ipoteza izotropiei este o ipoteză *puternic limitativă*. Totuși, numeroase materiale uzuale o verifică: în primul rînd corpurile amorfe, precum și cele alcătuite dintr-un mare număr de microcristale, dezordonat dispuse (metalele). Dimpotrivă, monocristalele sînt întotdeauna anizotrope. Există și materiale necristaline care sînt anizotrope, ca de pildă lemnul.

Proprietăți de anizotropie pot apare datorită anumitor procedee de prelucrare (de ex. după laminarea metalelor) sau pot fi admise pentru a descrie o structură geometrică ce favorizează anumite direcții (de ex. plăci cu nervuri de întărire pe anumite direcții). Se deosebește astfel o *anizotropie de material* (anizotropie propriu-zisă) și o *anizotropie constructivă*.

Pentru teoria corpurilor anizotrope, vezi indicațiile din § 4.1, pag. 125. (Diferitele variante de simetrie elastică mai sus considerate sînt însă prezentate mai ales pentru corpuri hiperelastice — vezi mai jos §§ 5—7.)

Studiul legii fizice se poate efectua și în cadrul neliniarității geometrice (vezi de ex. V. Novojilov [1], cap. 3 și [3], cap. 3). Dat fiind caracterul fizic al legii de legătură între tensiuni și deformații, prezintă interes studierea ei cu ajutorul invariantilor tensiunii și deformației (inclusiv în cazul anizotrop, în teoria plasticității etc.). Pentru detalii, vezi de exemplu I. Goldenblatt [1], W. Prager [1], L. Sedov [2].

§ 4. CONSTANTELE ELASTICE ALE TEORIEI LINIARE PENTRU CORPURI OMOGENE ȘI IZOTROPE

a) Modulul lui Young; coeficientul lui Poisson

Proprietățile mecanice ale materialului omogen și izotrop sînt deplin caracterizate de constantele lui Lamé. Vom examina semnificația lor, modul în care ele pot fi obținute experimental, contribuția lor în apariția stării elastice.

Să considerăm mai întâi un corp în care este realizată starea de tensiune

$$\sigma_{11} = c = \text{const.}, \quad \sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma_{12} = \sigma_{23} = \sigma_{31} = 0. \quad (1)$$

Introducând (1) în ecuațiile statice (2.4.10), constatăm că acestea sînt satisfăcute dacă $F = 0$ (forțe de volum neglijabile). Componentele deformației corespunzătoare se obțin din (3.24) sub forma

$$\varepsilon_{11} = \frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)} c, \quad \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} c, \quad (2)$$

$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{31} = 0.$$

Întrucît acestea sînt niște constante, ele satisfac banal condițiile lui Saint-Venant (1.9.12); deci, starea (1), (2) este posibilă, și deplasarea u poate fi determinată.

Să căutăm un model simplu de corp în care această stare se realizează. Pentru aceasta, să considerăm un cilindru de ax Ox_1 . Introducînd (1) în (2.3.3), obținem

$$\sigma_{n1} = c n_1, \quad \sigma_{n2} = \sigma_{n3} = 0. \quad (3)$$

Întrucît pe suprafața laterală \mathcal{S}_l a cilindrului avem $n_1 = 0$, iar pe bazele \mathcal{S}_b avem $n_1 = \pm 1$, relația (3) devine

$$\sigma_n|_{\mathcal{S}_l} = 0, \quad \sigma_{n1}|_{\mathcal{S}_b} = \pm c, \quad \sigma_{n2}|_{\mathcal{S}_b} = \sigma_{n3}|_{\mathcal{S}_b} = 0, \quad (4)$$

astfel că suprafața laterală rezultă a fi liberă, iar bazele sînt supuse unor tensiuni uniform repartizate, egale și opuse.

Dacă $c > 0$ (întindere), experiența arată că cilindrul se alungește, iar secțiunea sa transversală se micșorează. Dacă $c < 0$ (compresiune) cilindrul se scurtează, iar secțiunea transversală crește. Prin urmare, avem :

$$\begin{aligned} \text{pentru } c > 0 : \quad & \varepsilon_{11} > 0, \quad \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} < 0, \\ \text{pentru } c < 0 : \quad & \varepsilon_{11} < 0, \quad \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} > 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Se numește *modulul lui Young* raportul dintre tensiunea longitudinală c și alungirea ε_{11} pe care ea o provoacă pe linia sa de acțiune. Din (2) și (3) căpătăm deci

$$E = c/\varepsilon_{11} = \mu(3\lambda + 2\mu)/(\lambda + \mu) > 0. \quad (6)$$

Semnificația sa e apropiată de cea a coeficientului de rigiditate c_{11}^{11} (vezi (2.1)). Cu cît E este mai mare, cu atît materialul rezistă mai bine la întindere și compresiune.

Mai departe, să notăm cu $-\nu$ (unde $\nu > 0$) raportul dintre efectul tensiunii c pe direcții transversale și efectul ei pe direcția liniei sale de

acțiune. Întrucît, în virtutea izotropiei, putem face uz în mod egal de componentele ε_{22} sau ε_{33} , din (2) și (5) urmează

$$\nu = -\varepsilon_{22}/\varepsilon_{11} = \frac{1}{2} \lambda/(\lambda + \mu) > 0. \quad (7)$$

Mărimea ν se numește *coeficientul lui Poisson*³⁾.

Experiența de întindere-compresiune descrisă în § 0.2 servește la determinare lui E . Coeficientul lui Poisson nu se determină din aceeași experiență, întrucît măsurătorile cer o mare precizie și există de altfel experiențe mai simple care duc la calcularea sa pe cale indirectă (vezi pag. 95).

b) Constanta lui Coulomb

Fie acum un al doilea caz de solicitare: un corp în care

$$\sigma_{12} = c = \text{const.}, \quad \sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma_{23} = \sigma_{31} = 0. \quad (8)$$

Pentru starea de deformare deducem ușor

$$\varepsilon_{12} = c/2\mu, \quad \varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{31} = 0. \quad (9)$$

Starea (8), (9) este posibilă pentru $F = 0$. Constanta μ apare a fi raportul dintre tensiunea de alunecare c , și deformăția unghiulară $2\varepsilon_{12}$ pe care ea o provoacă. Din această cauză, μ mai poartă numele de *modul de rigiditate la alunecare*.

Căutînd — după modelul cazului precedent — să realizăm starea (8), (9) în același cilindru de ax Ox_1 , obținem din (2.3.3)

$$\sigma_{n1} = cn_2, \quad \sigma_{n2} = cn_1, \quad \sigma_{n3} = 0. \quad (10)$$

Prin urmare, suprafața laterală nu e liberă de tensiuni (vezi § 4.2 pag. 128). Rezultatul era de așteptat: în virtutea teoremei de reciprocitate (vezi finele § 2.4), pe elemente paralele cu Ox_1 apar tensiuni tangențiale egale cu cele de pe elementele de normală Ox_1 , așa dar de pe secțiuni.

OBSERVAȚIE. Aceeași stare de tensiune admite și o altă descriere, foarte sugestivă. Considerînd axele $Ox'_1x'_2$ ce se obțin rotind axele Ox_1x_2 de 45° în jurul axei $Ox_3 = Ox'_3$ și făcînd uz de formulele (2.5.5), obținem din (8):

$$\sigma'_{ij} = (n_{i1}n_{j2} + n_{i2}n_{j1})c,$$

unde $n_{ij} = \cos(x'_i, x_j)$ (vezi (1.6.1)). De aci căpătăm

$$\sigma'_{11} = c, \quad \sigma'_{22} = -c, \quad \sigma'_{12} = \sigma'_{23} = \sigma'_{31} = \sigma'_{33} = 0. \quad (11)$$

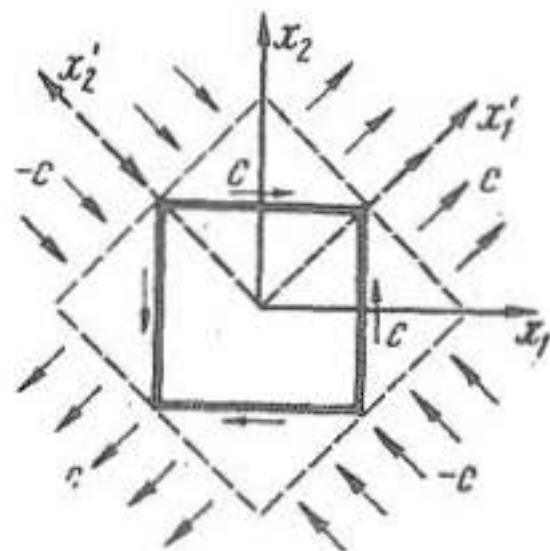


Fig. 3.4.1

³⁾ Uneori se folosește notația σ — care pretează însă la confuzie. Și mai puțin corectă este notația μ . Destul de frecvent se folosește inversul $m = 1/\nu$, numit *numărul lui Poisson*.

Axele nou introduse sînt deci chiar axele principale în punctul considerat, și starea de alunecare pură (8) apare drept rezultat al suprapunerii unor tensiuni egale (în valoare absolută) de întindere, respectiv de compresiune, pe direcții perpendiculare.

c) Modulul de compresiune hidrostatică

Fie acum un al treilea exemplu de stare de tensiune

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}, \quad p > 0. \quad (12)$$

Din (2.3.3) obținem acum

$$\sigma_{ni} = \sigma_{ij} n_j = -pn_i, \quad (13)$$

astfel că vectorul tensiune este dirijat după normală. O astfel de stare se numește *presiune hidrostatică* sau *compresiune uniformă*. Din (3.22) urmează

$$p = -\left(\lambda + \frac{2}{3}\mu\right)\theta. \quad (14)$$

Întrucît pentru $p > 0$ trebuie evident să avem $\theta < 0$, deducem

$$k = \lambda + \frac{2}{3}\mu > 0. \quad (15)$$

Acest coeficient se numește *modul de compresiune hidrostatică*. Calcule elementare dau ușor din (6), (7) și (15):

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad k = \frac{E}{3(1-2\nu)}. \quad (16)$$

Întrucît mărimile E , ν , k sînt pozitive, deducem imediat că

$$0 < \nu < \frac{1}{2}, \quad \lambda > 0, \quad \mu > 0. \quad (17)$$

Din (6) rezultă că modulul lui Young are dimensiunea FL^{-2} ; din (7) urmează că coeficientul lui Poisson este nul-dimensional; în fine, din (16) deducem că λ , μ , k au aceeași dimensiune cu E — așadar se măsoară în kgf/cm^2 .

Dacă ν ar fi nul, aceasta ar însemna că sarcina nu dă nici un efect de contracție pe direcții transversale liniei ei de acțiune. Pe de altă parte, dacă $\nu = 0,5$, din (14)–(16) ar rezulta că pentru orice sarcină hidrostatică θ este nul, așadar deformația s-ar produce fără modificare de volum, la presiuni arbitrar de mari. Valorile $\nu = 0$, $\nu = 0,5$ nu sînt deci accep-

tabile. Totuși, $\nu = 0,5$ poate fi admis ca valoare-limită, pentru procese în care deformația de volum este neglijabilă — ca de exemplu pe pragul trecerii la deformația plastică. (Vezi mai departe pag. 94.)

d) Legea lui Hooke rezolvată în raport cu deformațiile

Constantele lui Lamé permit scrierea simplă a legii lui Hooke (3.18), în timp ce constantele E, ν sînt de preferat în relațiile lui Hooke rezolvate în raport cu deformațiile. Într-adevăr, ținînd seama de (6), (7) și de a doua relație (16) în (3.24), obținem

$$\varepsilon_{ij} = -\frac{\nu}{E} \Theta \delta_{ij} + \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij}, \quad (18)$$

ceea ce se mai scrie și sub forma

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{1}{E} [\sigma_{11} - \nu (\sigma_{22} + \sigma_{33})], & \varepsilon_{22} &= \frac{1}{E} [\sigma_{22} - \nu (\sigma_{33} + \sigma_{11})], \\ \varepsilon_{33} &= \frac{1}{E} [\sigma_{33} - \nu (\sigma_{11} + \sigma_{22})], & \varepsilon_{ij} &= \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} \quad (i \neq j). \end{aligned} \quad (19)$$

e) Tensori sferici și deviatori

Pentru a clarifica rolul constantei k , să separăm din tensorul de deformație \mathbf{E} o componentă \mathbf{E}^0 ce caracterizează *deformația de volum*, și o componentă \mathbf{E} care produce o *deformație de formă* sau *distorsiune*. Vom scrie deci

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^0 + e_{ij}, \quad (20)$$

și vom pune condițiile

$$\theta^0 = \theta, \quad \theta^e = 0. \quad (21)$$

Considerînd așa-numita *deformație medie* ⁴⁾

$$\varepsilon_m = \frac{1}{3} \theta, \quad (22)$$

obținem descompunerea dorită (20), (21) dacă alegem

$$\varepsilon_{ij}^0 = \varepsilon_m \delta_{ij}, \quad e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \varepsilon_m \delta_{ij}. \quad (23)$$

Primul din tensorii astfel introduși se numește *tensorul sferic al deformației* (întrucît cuadrica corespunzătoare este o sferă). Al doilea se numește

⁴⁾ A nu se confunda cu ε_m din (1.4.16) — (1.4.18).

deviatorul deformației. Întrucît $\theta^e = 0$, cuadrica corespunzătoare este evident un hiperboloid.

O descompunere similară se poate realiza și pentru tensorul tensiune. Anume, se consideră *tensiunea medie*

$$\sigma_m = \frac{1}{3} \Theta, \quad (24)$$

și se ia pentru *tensorul sferic* Σ^0 și pentru *deviatorul tensiunilor* S

$$\sigma_{ij}^0 = \sigma_m \delta_{ij} \quad \text{și} \quad s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_m \delta_{ij}. \quad (25)$$

Relația (3.22) devine acum

$$\sigma_m = (3\lambda + 2\mu) \varepsilon_m = 3k \varepsilon_m, \quad (26)$$

și legea lui Hooke (3.18) conduce deci la

$$\sigma_{ij} - \sigma_m \delta_{ij} = 3\lambda \varepsilon_m \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} - (3\lambda + 2\mu) \varepsilon_m \delta_{ij},$$

sau încă

$$s_{ij} = 2\mu e_{ij}. \quad (27)$$

Relațiile (26), (27) exprimă faptul că *tensorul sferic al tensiunii este proporțional cu tensorul sferic al deformației, iar deviatorul tensiunii este proporțional cu deviatorul deformației*. Aceasta se poate scrie și sub forma

$$\Sigma^0 = 3k E^0, \quad S = 2\mu E. \quad (28)$$

Această formă a legii lui Hooke pune în evidență rolul lui k și μ ca coeficienți ce măsoară rezistența opusă de corp la modificarea de volum, respectiv la cea de formă.

Comparînd (26) și prima relație (25) cu definiția (12), se vede ușor că tensorii sferici descriu în fapt stări de tipul compresiunii hidrostatice (eventual cu $p < 0$).

Întrucît este verificat experimental că deformația *elastoplastică* se desfășoară cu modificări de volum neglijabile față de modificările de formă, urmează că această scriere a legii lui Hooke este deosebit de importantă ca punct de pornire în teoria plasticității, unde pe primul plan apar nu tensorii tensiune și deformație, ci deviatorii corespunzători.

f) Concluzii

În definitiv, dispunem de trei forme echivalente ale legii lui Hooke pentru corpuri izotrope: relațiile (3.18), (19) și (28). Fiecare din ele pune în evidență o pereche de constante: (λ, μ) , (E, ν) , (k, μ) . Pentru determinarea acestora este suficientă găsirea (pe cale teoretică sau experimentală) a două din ele.

Aceste raționamente rămân valabile și pentru corpuri neomogene — caz în care mărimile λ , μ , E , ν , k sînt însă funcții de punct și determinarea lor experimentală este mult mai dificilă.

Dacă corpul este omogen, se pot realiza experiențe simple pentru determinarea constantelor elastice. Astfel, problema întinderii cilindrului (primul exemplu de mai sus) furnizează valoarea lui E pentru materialul considerat. Răsucirea (torsionarea) unui astfel de cilindru va da (vezi § 5.15, pag. 239) un model simplu de experiență pentru determinarea lui μ . (Vezi și § 4.12, pag. 162).

Putem deci determina valorile *tuturor* constantelor elastice pentru diferite materiale, executînd epruvete (omogene) din aceste materiale și efectuînd asupra lor anumite experiențe simple. Valorile obținute informează *complet* asupra comportării materialului în chestiune, într-un corp de *orice* configurație, sub *orice* sarcină. Cunoașterea a *doi* parametri, obținuți din *două* experiențe distincte, ne permite să cunoaștem modul de a reacționa al *oricărui* corp realizat din materialul considerat. Pentru aceste motive, teoria corpului izotrop și omogen, aflat în stare de deformație liniară și realizat dintr-un material ce respectă legea lui Hooke, se numește uneori *teorie biconstantă*.

Reproducem aci un tablou al constantelor pentru unele materiale uzuale. (Valorile pentru λ , μ , E , k sînt date în milioane kgf/cm^2 .) Valorile reale pot prezenta mari abateri față de cele informative de aci (vezi § 0.2, pag. 25–26).

	λ	μ	E	k	ν
oțel	0,9 — 1,3	0,8 — 0,9	2 — 2,2	1,5 — 1,9	0,27 — 0,31
fier	1,00	0,8	2	1,6	0,28
alamă	0,85	0,38	1,1	1,1	0,33
cupru	0,9	0,46	1,3	1,2 — 1,7	0,33 — 0,38
plumb	0,35	0,05	0,16	0,37	0,43
sticlă	0,27 — 0,3	0,25	0,6	0,45	0,26

Pentru date mai amănunțite, vezi de exemplu N. Beliaev [2], anexa 7; A. Love [1], § 71; C. Mc Gregor [1]; P. Rieckert [1]. Vezi și K. Hillier [1].

§ 5. NOȚIUNI DE TERMODINAMICA DEFORMAȚIEI

a) Formularea problemei

După cum am arătat în introducere, ne limităm la studiul proceselor pseudostatice; toată informația de care dispunem relativ la starea unui corp deformabil se reduce deci la cunoașterea mărimilor ε_{ij} , σ_{ij} și (pro-

vizoriu) T , ca funcții de punct. (În virtutea condițiilor lui Saint-Venant, cunoașterea deplasărilor nu este necesară.)

Trecerea dintr-o stare (0) într-o stare (1) înseamnă deci înlocuirea unor valori (funcții de punct) $\varepsilon_{ij}^0, \sigma_{ij}^0, T^0$, prin alte valori $\varepsilon_{ij}^1, \sigma_{ij}^1, T^1$. Considerînd un spațiu aritmetic (euclidian) cu 13 dimensiuni, de coordonate $\varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}, T$, este limpede că fiecărei stări posibile într-un punct al corpului deformabil, îi corespunde un punct în acest spațiu; iar fiecărui proces de deformare, o curbă — pe care o vom numi un drum, ducînd de exemplu de la un punct (0) la un punct (1).

Dacă mărimile $\varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}, T$ sînt legate prin anumite relații — ca de pildă cele ce rezultă din ipotezele din § 0.4 — atunci procesele de deformare se pot desfășura numai pe anumite drumuri, situate pe anumite varietăți cu un număr de dimensiuni mai mic. (Vezi de exemplu cazul din § 0.2.) În particular, în cazul corpului elastic, ne putem limita la considerarea unui spațiu cu 7 dimensiuni, de coordonate ε_{ij}, T .

Mulțimea stărilor posibile într-un punct al corpului elastic ocupă un domeniu din acest spațiu, iar o stare este deplin cunoscută dacă cunoaștem mărimile ε_{ij}, T corespunzătoare.

Cu toate că aceste funcții nu depind de timp, putem totuși imagina diferite procese de deformare, diferite moduri de a trece de la o stare (0) la o stare (1).

De pildă, putem presupune că într-un anumit proces, facem ca componenta ε_{11} să treacă de la valoarea ε_{11}^0 la valoarea ε_{11}^1 ; apoi efectuăm aceeași operație cu componenta ε_{12} și așa mai departe. Schimbînd ordinea de trecere a componentelor de la valorile inițiale la valorile finale, obținem procese de deformare — și deci drumuri — diferite. (În exemplul din § 0.2 există numai un singur drum.)

Evident că pentru o teorie care neglijează istoricul procesului de deformare, aceste moduri diferite de trecere de la o stare la alta trebuie să fie echivalente. Să remarcăm însă că, spre deosebire de cazul solidului rigid, pentru a realiza o stare de echilibru elastic este necesară cheltuirea de lucru mecanic al forțelor exterioare: aceste forțe își deplasează punctele de aplicație în așa fel încît lucrul lor mecanic total pe deplasările generate nu este nul.

Considerarea acestui lucru mecanic, precum și a unui eventual aport de energie sub alte forme (termică, electromagnetică) sugerează o cale energetică, principial diferită de cea care a condus la ecuațiile (2.4.10) și la condițiile (2.4.12), pentru a stabili legătura dintre sarcină și efectul ei.

Or, nimic nu ne asigură a priori (chiar în absența unor fenomene termice sau electromagnetice) că lucrul mecanic elementar al forțelor exterioare este o diferențială totală; de aci rezultă că lucrul mecanic cheltuit pentru deformarea corpului depinde nu numai de stările inițială și finală, ci și de modul în care starea finală a fost atinsă, deci de drumul de la starea (0) la starea (1), așadar de istoricul procesului.

Informația asupra stărilor (0) și (1) nu este deci suficientă pentru a calcula acest element evident esențial, lucrul mecanic necesar pentru deformare. În această situație, avem de ales între următoarele două căi:

1° Fie să căutăm o formulare *lărgită* a problemei, în care informațiile asupra stărilor inițială și finală să fie îndestulătoare pentru determinarea în mod univoc a unor parametri de același tip cu lucrul mecanic, dar mai generali;

2° Fie să impunem corpului și procesului de deformare condiții mai *restrictive*, care să permită determinarea univocă a lucrului mecanic necesar deformăției numai cu ajutorul datelor cunoscute pentru stările inițială și finală.

Prima cale conduce la înlocuirea studiului pur mecanic (inclusiv chestiunea transmiterii de lucru mecanic unui corp deformabil) printr-un studiu asupra schimbului de energie între diverse sisteme materiale — și este deci o problemă de *termodinamică fenomenologică*. A doua cale conduce la considerarea unei categorii particulare de corpuri, numite *hiperelastice*, pentru care lucrul mecanic elementar necesar pentru deformare este diferențiala totală a unei funcții ce depinde numai de stările inițială și finală.

Vom aminti aici unele noțiuni de termodinamică, cu ajutorul cărora vom putea formula cazuri simple în care un corp elastic este și hiperelastic — urmînd să ne limităm apoi la studiul acestor din urmă corpuri.

b) Noțiuni fundamentale

Să considerăm un corp sau un sistem de corpuri a cărui stare la un moment dat este deplin caracterizată de cunoașterea unor parametri (independenți sau nu) p_1, p_2, \dots, p_n . Spațiul \mathcal{E}_n al acestor parametri permite reprezentarea stărilor corpului și a proceselor de trecere de la o stare la alta.

Orice funcție care depinde numai de starea corpului la un moment dat și nu și de modul în care această stare a fost atinsă, se numește *funcție de stare*. Întrucît putem măsura sau calcula cel mai adesea numai *variații* ale anumitor funcții în trecerea de la o stare la alta, trebuie să considerăm și o stare-reper (cel mai adesea, arbitrar aleasă), pe care o vom numi stare *normală* (sau *naturală*, sau *nulă*).

Prezintă interes evident reducerea numărului parametrilor p_i , ceea ce este posibil dacă unii din ei pot fi exprimați prin intermediul altora, care rămîn independenți.

Evident, astfel de legături pot fi universale valabile, și atunci unii din parametrii p_i pot fi definitiv eliminați din raționamente (afară de cazuri în care prezența lor este utilă din considerente de comoditate a scrierii, de simetrie a formulelor etc.). Dar chiar presupunînd că parametrii p_i sînt în general independenți, se poate totuși ca pentru (sau între) anumite valori ale acestora să existe relații de dependență, relații care, într-un

anumit cadru precis, permit reducerea numărului total de parametri. Astfel de relații se numesc *ecuații de stare* și stabilirea lor echivalează cu stabilirea unui model al unei categorii *particulare* de corpuri în raport cu cele dintâi.

Parametrii independenți se numesc *coordonate generalizate*, corespunzătoare unei anumite stări, și se notează q_1, q_2, \dots, q_m . Ecuațiile de stare se pot scrie exprimând parametri neindependenți p_i prin intermediul parametrilor q_i . Spațiul aritmetic al coordonatelor generalizate se numește *spațiul figurativ*.

Punctele sale reprezintă stări ale sistemului, *în cadrul de valabilitate al ecuațiilor de stare considerate*; iar drumurile sînt — în același cadru — procese de trecere de la o stare la alta.

Evident, orice funcție de stare se poate scrie acum sub forma

$$f = f(q_1, q_2, \dots, q_m), \quad (1)$$

unde se presupune că funcția f are numărul de derivate continue necesar în raționamente.

Pentru orice funcție de stare avem desigur

$$df = f_{,i} dq_i, \quad (2)$$

și de aci

$$f_{,ij} = f_{,ji}. \quad (3)$$

Pentru orice funcție de stare, integrala $\int_{(0)}^{(1)} df$ este independentă de istoricul trecerii de la o stare (0) la o stare (1), și depinde numai de valorile inițiale și finale q_i^0, q_i^1 .

Dacă mulțimea stărilor posibile ocupă un domeniu simplu conex în spațiul figurativ, atunci condiția necesară și suficientă pentru ca o formă diferențială liniară

$$\delta\Phi = \varphi_i(q_1, q_2, \dots, q_m) dq_i \quad (4)$$

să fie diferențiala unei funcții de stare, este ca pe *orice* drum închis \mathcal{C} din spațiul figurativ, să avem

$$\int_{\mathcal{C}} \delta\Phi = 0. \quad (5)$$

Această condiție integrală este echivalentă cu condițiile diferențiale

$$\varphi_{i,j} = \varphi_{j,i}. \quad (6)$$

Dacă acestea din urmă nu sînt verificate, dar avem cel puțin

$$\varphi_i(\varphi_{j,k} - \varphi_{k,j}) + \varphi_j(\varphi_{k,i} - \varphi_{i,k}) + \varphi_k(\varphi_{i,j} - \varphi_{j,i}) = 0, \quad (7)$$

(pentru $i \neq j \neq k$), atunci există o funcție $I(q_1, q_2, \dots, q_m)$, numită *factor integrant*, așa fel ca $I \delta\Phi$ să fie o diferențială totală. Altfel spus, există o funcție de stare Ψ definită de relația

$$d\Psi = I \delta\Phi. \quad (8)$$

Subliniem că atîta timp cît nu sîntem siguri de existența unei funcții de stare Φ , expresia $\delta\Phi$ nu are sensul unei operații δ aplicate asupra unei funcții Φ , ci trebuie înțeleasă numai ca *definită* de membrul al doilea din (4).

Se poate face uz de aceste noțiuni pentru a studia corpuri pentru care drept parametri p_i putem alege poziția particulelor, forțele ce acționează între particule, și temperatura — așadar corpuri deplin caracterizate de mărimi mecanice și termice (uneori pot interveni și mărimi de natură electromagnetică).

Orice corp continuu (sau sistem) care poate primi sau ceda mediului ambiant lucru mecanic, căldură, sarcini electrice sau magnetice, eventual și materie — se numește *sistem termodinamic*.

Un sistem termodinamic care nu schimbă cu mediul ambiant nici energie, nici materie, se numește *izolat*. Un sistem care schimbă cu mediul ambiant energie, dar nu și materie, se numește *închis*. Un sistem care schimbă atît energie cît și materie, se numește *deschis*.

Mărimile a căror cunoaștere la un moment dat echivalează cu cunoașterea stării sistemului, se numesc *parametri termodinamici*. Orice fenomen care duce la modificarea valorilor lor se numește *proces termodinamic*.

Un proces de trecere de la o stare (0) la o stare (1) se numește *reversibil*, dacă el se poate desfășura și în sensul de la starea (1) la starea (0), *trecînd prin aceleași stări intermediare*. Un proces care nu are această proprietate, se numește *irreversibil*.

O condiție suficientă (dar nu necesară) pentru ca un proces să fie reversibil, este ca el să fie *cvasistatic*. Tot ca reversibile pot fi privite și procese de tipul vibrațiilor, dacă la capătul fiecărei perioade se reproduce starea inițială.

Stabilirea unor ecuații de stare revine la precizarea unui model al unui anumit tip de corpuri, model valabil între anumite limite ale parametrilor. În virtutea acestor ecuații, numărul parametrilor independenți se reduce. Parametrii independenți rămași se numesc *coordonate termodinamice generalizate*.

Astfel, de exemplu, gazele ideale au ecuația de stare $p\nu = nRT$ (unde p este presiunea; ν — volumul; n — numărul de molecule-gram de substanță; R — constanta universală a gazelor; T — temperatura absolută). Această ecuație — valabilă numai între anumite limite ale parametrilor — stabilește o legătură simplă între presiune, volum și temperatură și permite să reținem drept coordonate generalizate, numai două din aceste trei mărimi.

Alt exemplu îl constituie studiul solidului deformabil. Chiar în cazul unidimensional din § 0.2, rezultă limpede că pe diferite porțiuni ale curbei caracteristice în diferite procese (încărcare sau descărcare), legătura dintre tensiune și deformare este alta.

În general ecuațiile (1.1) — (1.3) au deci sensul unor *ecuații de stare ale corpului elastic*, valabile atât la încărcare, cât și la descărcare. Ele permit să reținem drept coordonate generalizate mărimile ε_{ij} , T sau σ_{ij} , T . Odată cu trecerea în zona plastică (adică dacă se depășesc anumite limite pentru ansamblul parametrilor — ceea ce nu e tot atât de ușor de stabilit ca în § 0.2; vezi § 4.3), aceste ecuații își pierd valabilitatea.

În starea elastică, orice funcție de stare se scrie deci sub forma (1), unde rolul mărimilor q_i îl joacă componentele deformației (sau tensiunii) și temperatura.

(Amintim că însăși temperatura este o funcție de stare. Ea poate fi aleasă drept una din coordonatele generalizate — dar aceasta nu este obligatoriu. Temperatura absolută T se măsoară în grade Kelvin, iar $0^\circ\text{C} = 273,15^\circ\text{K}$.)

Un sistem termodinamic este în *echilibru termic*, dacă între punctele sale nu au loc schimburi de căldură. Pentru aceasta este necesar și suficient ca T să fie o constantă (independentă de punct).

c) Principiile termodinamicii

Aceste noțiuni permit formularea celor *două principii ale termodinamicii*. Toate mărimile cu care operăm vor fi înțelese ca mărimi *unitare* sau *specifice* (raportate la unitatea de volum). Evident, ele sînt funcții de punct. Valorile lor globale (pentru întregul corp) se vor obține prin integrare pe domeniul \mathcal{V} . Variațiile elementare de la o stare la alta se vor nota cu d sau cu δ , după cum avem de-a face cu o funcție de stare, sau nu. Variațiile neelementare se obțin integrînd variațiile elementare corespunzătoare pe drumuri din spațiul figurativ (sau din cel al parametrilor termodinamici).

Primul principiu al termodinamicii : există o funcție de stare U , numită *energie internă*; în orice proces termodinamic, creșterea elementară a energiei totale (energia internă U , plus energia cinetică K a mișcării macroscopice, plus energia potențială E a aceleiași mișcări) se compune din suma lucrului mecanic elementar $\delta\Phi$ efectuat asupra sistemului, a aportului elementar de căldură δQ , și a aportului elementar de energie nemecanică și netermică (de exemplu energie electromagnetică) δQ^* :

$$dU + dK + dE = \delta\Phi + \delta Q + \delta Q^* . \quad (9)$$

Mărimile $\delta\Phi$, δQ , δQ^* sînt negative dacă ele reprezintă lucru mecanic, căldură etc., furnizate de corp — mediului ambiant.

În cele ce urmează, ne vom mărgini la cazul proceselor cvasistatice, pentru corpuri aflate în echilibru macroscopic și pentru care aportul de energie nemecanică și netermică este neglijabil. În acest cadru, relația (9) ia forma

$$dU = \delta\Phi + \delta Q , \quad (10)$$

iar pentru întregul corp

$$\iiint_{\mathcal{V}} dU dV = \iiint_{\mathcal{V}} \delta \Phi dV + \iiint_{\mathcal{V}} \delta Q dV. \quad (11)$$

În particular, pentru un sistem izolat, din (11) urmează că pentru orice proces elementar avem $\iiint_{\mathcal{V}} dU dV = 0$, aşadar că energia internă nu

variază. Rezultatul rămâne valabil pentru un proces neelementar, aşadar după integrare pe un drum oarecare (închis sau deschis) în spaţiul figurativ :

$$\int_{\mathcal{C}} \iiint_{\mathcal{V}} dU dV = 0.$$

Primul principiu al termodinamicii este principiul conservării energiei : în orice proces termodinamic în care este posibilă revenirea la starea iniţială, această revenire se face fără variaţia energiei (vezi (5)). Dacă procesul este ireversibil, sau dacă drumul considerat din spaţiul figurativ este deschis, principiul îşi păstrează valabilitatea : faptul că U este o funcţie de stare înseamnă că valoarea energiei interne în orice punct nu depinde de „drumul” parcurs de sistem de la o stare (0) la o stare (1) în acel punct, ci numai de coordonatele generalizate corespunzătoare.

Dacă procesul conduce la valori pentru care ecuaţiile de stare iniţiale trebuiesc înlocuite, variaţia de la starea (0) la (1) trebuie calculată nu în spaţiul coordonatelor generalizate (ce corespund unor anumite ecuaţii de stare), ci în spaţiul parametrilor termodinamici.

Relaţia (9) prezintă energia ca măsură comună a diferitelor forme de mişcare ale materiei. În (10), rolul esenţial este jucat de mişcarea mecanică şi cea termică.

Primul principiu constituie baza experienţelor permiţând stabilirea echivalentului mecanic al căldurii. Amintim că $1 \text{ kcal} = 427 \text{ kgm}$. Prin urmare, în (9) sau (10), mărimea δQ trebuie exprimată în unităţi mecanice, ţinând seama că $1 \text{ cal/cm}^3 = 42,7 \text{ kgf/cm}^2$.

Al doilea principiu al termodinamicii : există o funcţie de stare S , numită *entropie* ; în orice proces termodinamic, variaţia entropiei este cel puţin egală cu variaţia cantităţii de căldură raportată la temperatura absolută :

$$dS \geq \delta Q / T, \quad (12)$$

unde egalitatea caracterizează procesele *reversibile*.

Pentru întregul sistem avem de aci

$$\iiint_{\mathcal{V}} dS dV \geq \iiint_{\mathcal{V}} (\delta Q / T) dV. \quad (13)$$

Faptul că S este o funcţie de stare echivalează cu afirmaţia că în orice proces reversibil, cantitatea de căldură elementară δQ are un factor

integrant, funcție numai de temperatură — și tocmai acest factor e ales pentru a defini temperatura absolută.

Al doilea principiu al termodinamicii stabilește un *sens* de desfășurare a proceselor ireversibile: cel corespunzător *creșterii* entropiei în orice sistem izolat. În particular, aceasta se vede ușor în cazul unui proces ireversibil în regim izotermic ($T = \text{const.}$ în punctul considerat). Într-adevăr, într-un sistem izolat avem $\iiint_V \delta Q dV = 0$, astfel că din (13) urmează

$\iiint_V dS dV > 0$. Relația $dS < 0$ e posibilă numai pentru sisteme neizolate (sau — ceea ce e același lucru — numai în porțiuni ale sistemului dat).

Pentru micro sisteme, sau pentru perioade de timp mari din punct de vedere cosmogonic, al doilea principiu își poate pierde valabilitatea. (Vezi observațiile lui V. Semencenko în J. Gibbs [2], pag. 455.)

Atît entropia cît și energia sînt caracterizate abstracție făcînd de o constantă aditivă S' , respectiv U' . (Valoarea S' poate fi principial determinată cu ajutorul *teoremei lui Nernst*.) În practică, e suficientă cunoașterea diferențelor $U_1 - U_0$ și $S_1 - S_0$, astfel încît constantele U' , S' dispar din calcule.

Orice proces termodinamic se desfășoară în general cu variații de temperatură și deci cu schimburi de căldură. Procesele în care $\delta Q = 0$ se numesc *adiabatic* (în punctele respective). Cele în care $dT = 0$ se numesc *izotermice*. După cum se vede din (12), un proces reversibil și adiabatic este totodată și *izentropic*: $dS = 0$.

Limitîndu-ne la cazul proceselor reversibile, obținem din (12)

$$\delta Q = T dS, \quad (14)$$

ceea ce permite să transcriem (10) sub forma

$$dU = \delta \Phi + T dS. \quad (15)$$

Să considerăm funcția de stare, numită *energie liberă*:

$$F = U - TS. \quad (16)$$

(Produsul TS se numește *energie legată*.) Din (15) și (16) deducem

$$dF = \delta \Phi - S dT. \quad (17)$$

Relațiile (15) și (17) constituie forme echivalente ale primului principiu *pentru procese reversibile*. Din (10) și (17) rezultă că în orice proces *adiabatic*, precum și într-un proces *reversibil și izotermic*, lucrul mecanic elementar este o diferențială totală și prin urmare *există* funcțiile de stare

$$\Phi_{ad} = U \quad \text{pentru } S = \text{const.}, \quad (18)$$

$$\Phi_{is} = F \quad \text{pentru } T = \text{const.} \quad (19)$$

Ambele relații sînt scrise pentru procese reversibile: relația (18) are sens pentru $S = \text{const.}$, ceea ce e posibil numai într-un proces reversibil; iar relația (19) a fost dedusă cu ajutorul egalității (14).

Posibilitatea unui sistem de a efectua lucru mecanic este deci caracterizată în cazul unui proces izentropic de energia sa, iar în cazul unui proces izotermic, de energia sa liberă.

d) Indicații bibliografice

Pentru detalii asupra celor de mai sus, vezi mai întîi tratatele lui M. Leontovici [1], M. Planck [1], M. Roy [3], A. Sommerfeld [2]. Pentru stadiul actual al cercetării, vezi E. Guggenheim [1] (inclusiv notele istorice, cap. H). Pentru axiomatica termodinamicii, vezi G. Falk [1]. Pentru raporturile sale cu teoria generală a cîmpului (inclusiv probleme de mecanica mediului continuu) vezi A. Freudenthal și H. Geiringer [1], cap. A, III și C. Truesdell și R. Toupin [1], cap. E. Pentru termodinamica proceselor ireversibile, vezi S. de Groot [1], J. Prigogine [1] și — cu aplicație specială la mecanica mediilor deformabile — M. Biot [2], [3], H. Ziegler [2].

Studii și expuneri aprofundate privitoare la aplicațiile — din diferite puncte de vedere — ale termodinamicii la mecanica mediilor continue deformabile, aparțin lui P. Chadwick [1]; I. Goldenblatt [1]; Ch. Platrier [1], vol. 2, partea B; M. Roy [1], vol. 1, partea I; L. Sedov [2]. Vezi și G. Grioli [3], cap. 2, 3 și 10 (acesta din urmă, pentru problemele asimetrice); G. Pearson [2], cap. 8; de asemenea unele paragrafe din L. Kaceanov [1] și D. Kutilin [1]. Pentru problemele de termoelasticitate, vezi B. Boley și J. Weiner [1]. Pentru probleme în care intervin cîmpuri electromagnetice, vezi K. Belov [1]; W. Cady [1]; J. Nye [1].

A. Pipkin și R. Rivlin [1] precum și R. Rivlin [2] au studiat chestiunea ecuațiilor de stare în teoria neliniară. Pentru diferite probleme speciale, vezi articolele lui A. Akopian [1]; B. Coleman [1], [2]; B. Coleman și W. Noll [1], [2]; S. Grigorian [1]; M. Gurtin [5]; J. Serrin [1]; A. Vakulenko [1] — pentru a nu cita decît o foarte mică parte. Mai amintim în fine lucrările fundamentale ale lui lord Kelvin [4]; J. Gibbs [1], [2]; E. și F. Cosserat [1]; E. Jouguet [1].

e) Exemplul experienței de tracțiune și compresiune

Pentru a clarifica noțiunile de mai sus în legătură cu mecanica mediului solid deformabil, să reluăm examinarea experienței descrise în § 0.2.

Epruveta supusă întinderii este un sistem termodinamic neizolat, dar închis, care primește lucru mecanic și o cantitate de căldură permițînd menținerea unei temperaturi constante. Pe porțiunea $\sigma < \sigma_s$, procesul este evisstatic și reversibil; pentru $\sigma \geq \sigma_s$, el este numai pseudostatic și ireversibil.

Parametrii termodinamici ai problemei sînt mărimile ϵ , σ , T , a căror cunoaștere echivalează cu cunoașterea stării epruvetei. Ecuația de stare e dată de familia curbelor carac-

teristice pentru diferite valori ale lui T . În general avem $E = E(T)$. Presupunind pentru simplitate că $\sigma_p = \sigma_s$, avem pentru încărcare

$$\sigma = \begin{cases} E(T) \varepsilon & \text{pentru } 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_s; \\ \sigma_s = E(T) \varepsilon_s & \text{pentru } \varepsilon_s \leq \varepsilon \leq \varepsilon_e; \\ \sigma(\varepsilon, T) & \text{pentru } \varepsilon_e \leq \varepsilon. \end{cases} \quad (20)$$

(ε_s este deformația elastică maximă — corespunzătoare aici limitei de plasticitate; ε_e este acea valoare a deformației dincolo de care începe fenomenul de ecrusaj.)

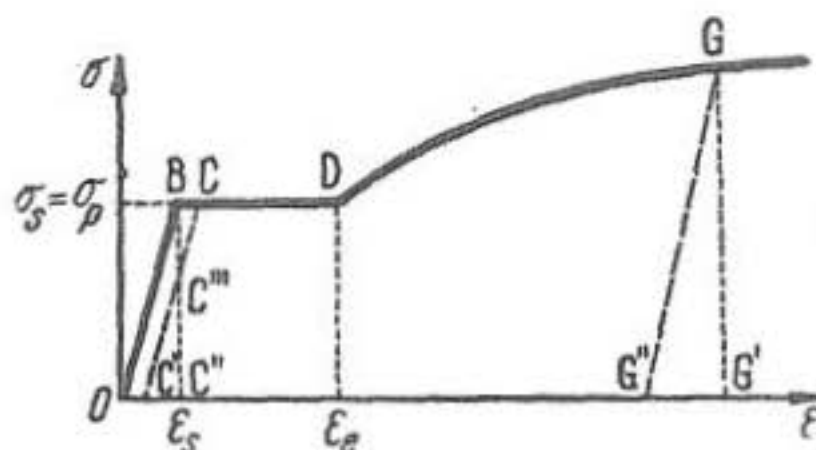


Fig. 3.5.1

Curba de descărcare este un segment de dreaptă de pantă $E(T)$ ce trece prin punctele $(\varepsilon_1, \sigma_1)$ și $(\varepsilon_2, 0)$. Pentru $\varepsilon < \varepsilon_1$, deducem deci

$$\sigma = \begin{cases} E(T) \varepsilon & \text{dacă } 0 \leq \varepsilon_1 \leq \varepsilon_s; \\ \sigma_s + E(T) (\varepsilon - \varepsilon_1) & \text{dacă } \varepsilon_s \leq \varepsilon_1 \leq \varepsilon_e; \\ \sigma(\varepsilon_1, T) + E(T) (\varepsilon - \varepsilon_1) & \text{pentru } \varepsilon_e \leq \varepsilon_1. \end{cases} \quad (21)$$

Relațiile (20), (21) sînt *ecuațiile de stare* care permit ca, în diferite faze ale procesului, să reducem cei trei parametri termodinamici la două coordonate generalizate.

Experimental se constată că la temperaturi mai mari, materialul cedează mai ușor, așadar E este o funcție descrescătoare de T . Se constată de asemenea că în cazul unei deformări de încărcare cvasistatice adiabatică (epruveta izolată termic), temperatura materialului scade; pentru a se realiza o asemenea deformare în regim izotermic, este necesar aport de căldură⁵⁾. Vom vedea că aceste fapte sînt legate între ele.

Să presupunem că epruveta de lungime l și de secțiune de arie D este solicitată de o forță care crește lent de la zero la X . Prin definiție avem (vezi § 0.2):

$$\sigma = X/D, \quad \varepsilon = (l^* - l)/l, \quad l^* = l + l\varepsilon. \quad (22)$$

Forței $X + \delta X$ îi corespunde o lungime $l^* + \delta l^*$, iar lucrul mecanic elementar necesar pentru a realiza această nouă alungire este $\delta L = (X + \delta X) \delta l^* \cong X \delta l^*$. Întrucît din (22) urmează $\delta l^* = l \delta \varepsilon$, deducem $\delta L = D l \sigma \delta \varepsilon$, și prin urmare lucrul mecanic elementar pe unitatea de volum este

$$\delta \Phi = \sigma \delta \varepsilon. \quad (23)$$

⁵⁾ În cazul unui proces care nu este pseudostatic, lucrurile nu se petrec așa, și temperatura poate crește mult.

Lucrul mecanic total necesar pentru a aduce epruveta de la starea naturală ($\varepsilon_0 = 0$) la starea finală ($\varepsilon = \varepsilon_1$) este dat de integrala expresiei (23) între 0 și ε_1 , așadar de suma dreptunghiurilor elementare de baze $\delta\varepsilon$ și înălțimi $\sigma(\varepsilon, T)$ pe figura 3.5.1; aceasta este deci aria cuprinsă între curba caracteristică, axa ε și verticala $\varepsilon = \varepsilon_1$. (Dacă $\varepsilon_0 \neq 0$, se scade desigur aria corespunzătoare.) Prin urmare curba caracteristică poate fi privită ca o *diagramă a lucrului mecanic (unitar) de încărcare*.

Mărimea

$$\delta\Phi_e = \varepsilon \delta\sigma \quad (24)$$

poartă numele de *lucru mecanic elementar complementar* (unitar). Pe porțiunea rectilinie de pantă $E(T)$ a curbei caracteristice, acesta este egal cu lucrul mecanic elementar.

Să presupunem acum că starea (0) este starea normală; că starea (1) este caracterizată de o valoare ε_1 și de ecuațiile (20); iar o stare (2) este caracterizată de valoarea ε_2 a deformației care se obține la descărcarea completă (așadar pentru $\sigma_2 = 0$) pornind de la starea (1), și de ecuațiile de stare (21).

Fie de pildă că $\varepsilon_1 > \varepsilon_e$. Din (21) deducem pentru $\sigma_2 = 0$ valoarea

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_1 - \sigma(\varepsilon_1, T)/E(T). \quad (25)$$

Pentru procesul de încărcare avem deci din (20) și (23)

$$\int_{(0)}^{(1)} \delta\Phi = \int_0^{\varepsilon_1} \sigma d\varepsilon = \frac{1}{2} E(T) \varepsilon_e^2 + E(T) \varepsilon_e (\varepsilon_1 - \varepsilon_e) + \int_{\varepsilon_e}^{\varepsilon_1} \sigma(\varepsilon, T) d\varepsilon, \quad (26)$$

iar pentru procesul de descărcare, folosind (21) și (23):

$$\int_{(1)}^{(2)} \delta\Phi = \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \sigma d\varepsilon = -\frac{1}{2} E(T) (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 = -\frac{1}{2} [\sigma(\varepsilon_1, T)]^2 : E(T). \quad (27)$$

Dacă notăm cu G' punctul de abscisă ε_1 și cu G'' punctul de abscisă ε_2 , lucrul mecanic de încărcare se obține însumând aria triunghiului $OB\varepsilon_e$ (lucrul de încărcare elastic), aria dreptunghiului $\varepsilon_e BD\varepsilon_e$ (lucrul deformației de fluaj), și aria trapezului curbiliniu $\varepsilon_e DGG'$. Lucrul mecanic pe care corpul îl cedează la descărcare este reprezentat de aria triunghiului $G''GG'$.

Pentru $\varepsilon = \varepsilon_2$, corpul nu mai efectuează lucru mecanic: energia acumulată în procesul de deformație nu s-a „pierdut”, dar o mare parte a ei nu mai poate fi recuperată sub formă de lucru mecanic. Integrala (27) reprezintă deci (cu semnul schimbat) energia liberă F a corpului în starea (1), care coincide — după (19) — cu lucrul mecanic recuperabil (funcție de stare!). Restul energiei furnizate în procesul de încărcare (lucrul mecanic (26), plus cantitatea de căldură necesară pentru menținerea temperaturii) reprezintă creșterea energiei legate $T(S_1 - S_0)$ — (vezi (16)); valoarea ei permite calcularea creșterii entropiei în trecerea de la starea (0) la starea (1).

În fond, o mare parte din lucrul mecanic de încărcare (26) a fost deci cheltuit nu pentru a acumula în epruvetă lucru mecanic, ci pentru a modifica proprietățile fizice ale materialului acesteia — ceea ce se exprimă prin modificarea ecuațiilor de stare îndată ce depășim limita ε_e .

Să ne mărginim acum la cazul $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_s$, în regim cvasistatic izotermic. Întrucît în acest caz este valabilă relația (19), urmează că $dF = \sigma d\varepsilon$, și deci

$$F_1 - F_0 = \int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon_1} \sigma d\varepsilon. \quad (28)$$

Introducînd aci prima relație (20) — identică cu prima relație (21) — obținem

$$F_1 - F_0 = \frac{1}{2} E(T) (\varepsilon_1^2 - \varepsilon_0^2). \quad (29)$$

Din (17) deducem $S = -\partial F/\partial T$ (întrucît $\delta\Phi$ nu depinde de T); cu aceasta (16) devine

$$U = F - T(\partial F/\partial T), \quad (30)$$

și prin urmare avem

$$U_1 - U_0 = \frac{1}{2} [E(T) - T E'(T)] (\varepsilon_1^2 - \varepsilon_0^2), \quad (31)$$

unde al doilea termen este deci aportul de căldură necesar pentru a menține temperatura constantă. Întrucît $E'(T) < 0$ pentru $\varepsilon_1 > \varepsilon_0$, acest aport este într-adevăr *pozitiv*.

Relațiile de mai sus sînt valabile pentru orice $\varepsilon_0, \varepsilon_1 \geq 0$. Alegînd $\varepsilon_0 = 0, \varepsilon_1 = \varepsilon$, obținem

$$U - U_0 = \frac{1}{2} [E(T) - T E'(T)] \varepsilon^2, \quad F - F_0 = \frac{1}{2} E(T) \varepsilon^2. \quad (32)$$

Prin urmare, într-un proces de încărcare cu tensiuni pozitive sub limita de proporționalitate, avem $U - U_0 > F - F_0$, și entropia crește. La descărcare, dimpotrivă, entropia revine la valoarea sa inițială. (Evident, aceasta este cu puțință numai pentru că epruveta nu constituie un sistem izolat.)

Trebuie să remarcăm că în cazul unui proces de descărcare ce începe de la $\varepsilon_1 > \varepsilon_s$, entropia *nu revine* la valoarea sa inițială: procesul nu este reversibil, și deci variația entropiei se datorește *nu numai* variației cantității de căldură.

Chiar dacă în procesul de descărcare deformația trece printr-o valoare $\varepsilon < \varepsilon_s$, (vezi linia $CC''C'$ de pe fig. 3.5.1), entropia nu mai este egală cu cea corespunzătoare aceleiași valori ε (și T) la încărcare: într-adevăr, ε și T sînt coordonate generalizate, a căror cunoaștere epuizează cunoașterea stării corpului *numai pentru o ecuație de stare dată*; or, ecuațiile de stare corespunzătoare încărcării și descărcării, pe porțiuni diferite ale curbei caracteristice, sînt și ele diferite.

Dacă însă corpul trece a doua oară prin aceleași valori pentru ε, σ și T , atît energia cît și entropia trebuie desigur să revină la valorile inițiale. Astfel, descărcînd corpul pînă la $\sigma = 0$ pornind de la o valoare $\varepsilon_1 > \varepsilon_s$, și încărcîndu-l apoi din nou pînă la revenirea la valorile ε_1, σ_1 (notate acum ε_3, σ_3), obținem o buclă de hysteresis ale cărei capete definesc

un segment de pantă $E(T)$. Întrucît avem $\varepsilon_1 = \varepsilon_3$, $\sigma_1 = \sigma_3$, trebuie să avem și $U_1 = U_3$, $S_1 = S_3$. Întrucît curba de descărcare este situată *sub* cea de încărcare, rezultă că aria buclei de hysteresis măsoară lucrul mecanic pierdut în cursul acestui proces, care *nu este* un proces reversibil: drumurile de la starea (1) la (2) și apoi de la (2) la (3) \equiv (1) nu pot fi parcurse trecînd prin *aceleași* stări intermediare. Din relația (12) deducem

$$\int_{(1)}^{(3)} \delta(Q)/T < S_3 - S_1 = 0. \quad (33)$$

Întrucît $T = \text{const.}$, urmează $\delta Q < 0$, astfel că în cursul acestui proces, corpul *cedează căldură*.

Bucula de hysteresis oferă deci un exemplu simplu de *degradare* a energiei: energia rămîne constantă, dar o parte a lucrului mecanic cheltuit pentru realizarea acestui ciclu se transformă în căldură, cedată exteriorului. Ținînd seama de valoarea echivalentului mecanic al căldurii, aria buclei de hysteresis permite calcularea acestei cantități de căldură în calorii.

§ 6. POTENȚIALUL ELASTIC

În paragraful precedent am prezentat cazuri simple în care există o funcție de stare a cărei diferențială totală este lucrul mecanic elementar (vezi (5.18), (5.19)). În astfel de cazuri, lucrul mecanic de încărcare nu depinde de drumul de deformare, și este în întregime recuperat la descărcare. Să stabilim legătura dintre aceste rezultate și problema comportării corpului *elastic*.

a) Lucrul mecanic de deformare

Fie că starea corpului elastic, caracterizată de mărimile u_i , ε_{ij} , σ_{ij} la o temperatură T , este determinată de aplicarea unor forțe de volum F și a unor forțe superficiale f . Procesul quasistatic ducînd de la starea normală la starea de echilibru elastic deformat poate fi descompus într-o succesiune de treceri de la o stare de echilibru la altă stare apropiată, corespunzătoare unor forțe $F + \delta F$, $f + \delta f$ care produc deplasări, deformări și tensiuni $u_i + \delta u_i$, $\varepsilon_{ij} + \delta \varepsilon_{ij}$, $\sigma_{ij} + \delta \sigma_{ij}$. (Subliniem că aci δ *nu este* un simbol de diferențiere, ci reprezintă numai variații elementare ale mărimilor considerate în procesul de încărcare.) În cazul stării elastice, aceleași relații rămîn valabile și pentru descărcare. În particular, deplasarea δu poartă numele de *deplasare (elementară) virtuală*, întrucît ea nu corespunde cu necesitate unei deplasări reale în corp.

Dat fiind un domeniu $\mathcal{V}' \subset \mathcal{V}$, de frontieră \mathcal{S}' , să evaluăm *lucrul mecanic elementar virtual* $\delta L'$ al tuturor forțelor exterioare în raport cu \mathcal{V}' (forțele de volum, și tensiunile pe frontiera \mathcal{S}') cheltuit în trecerea de la starea u la starea $u + \delta u$.

Mărginindu-ne la cazul *liniarității geometrice* (nu neapărat și fizice), vom raporta toate cantitățile la coordonatele inițiale, și vom integra pe domeniul nedeformat. Obținem astfel

$$\delta L = \iint_{S'} (\sigma_n + \delta \sigma_n) \cdot \delta u \, dS + \iiint_{V'} (F + \delta F) \cdot \delta u \, dV$$

sau încă, neglijând termenii de ordin superior :

$$\delta L = \iint_{S'} \sigma_n \cdot \delta u \, dS + \iiint_{V'} F \cdot \delta u \, dV. \quad (1)$$

(Amintim că în definiția lucrului mecanic intervine produsul scalar al forței cu deplasarea *finală* a punctului ei de aplicație, astfel că modul în care variază δu în timp nu ne interesează.)

Dimensiunea acestui lucru elementar este desigur $[\delta L'] = FL$.

Introducând (2.3.3) în (1) și utilizând formula lui Gauss—Ostrogradski (7.2.9), obținem

$$\begin{aligned} \delta L' &= \iint_{S'} \sigma_{ij} n_j \delta u_i \, dS + \iiint_{V'} F_i \delta u_i \, dV = \iiint_{V'} [(\sigma_{ij} \delta u_i)_{,j} + F_i \delta u_i] \, dV = \\ &= \iiint_{V'} (\sigma_{ij,j} + F_i) \delta u_i \, dV + \iiint_{V'} \sigma_{ij} (\delta u_i)_{,j} \, dV \end{aligned} \quad (2)$$

de unde, în virtutea ecuațiilor statice (2.4.10) :

$$\delta L' = \iiint_{V'} \sigma_{ij} (\delta u_i)_{,j} \, dV. \quad (3)$$

Vom nota

$$\delta \Phi = \sigma_{ij} (\delta u_i)_{,j}, \quad (4)$$

astfel că $\delta \Phi$ are semnificația unui lucru mecanic elementar virtual *unitar* al forțelor exterioare, pe deplasările virtuale elementare corespunzătoare. Evident, $[\delta \Phi] = FL^{-2}$.

Datorită liniarității geometrice, avem desigur $\varepsilon_{ij}(u + \delta u) = \varepsilon_{ij}(u) + \varepsilon_{ij}(\delta u)$, de unde urmează

$$\delta \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}(\delta u) = \frac{1}{2} [(\delta u_i)_{,j} + (\delta u_j)_{,i}]. \quad (5)$$

Întrucît $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$, obținem din (4) și (5) expresia (compară cu (5.23)) :

$$\delta\Phi = \sigma_{ij} \delta\varepsilon_{ij}, \quad (6)$$

astfel că lucrul mecanic elementar virtual căutat este

$$\delta L' = \iiint_{V'} \sigma_{ij} \delta\varepsilon_{ij} dV. \quad (7)$$

Lucrul mecanic $\delta\Phi$ este deci egal cu produsul contractat al tensorului tensiune cu tensorul variației deformației. Din această cauză, el poartă și numele de lucru mecanic elementar virtual unitar al tensiunii în câmpul variațiilor deformației, sau încă, pe scurt, *lucru (mecanic) elementar de deformație*.

OBSERVAȚIE Rezultatul poate fi extins și la cazul deformației geometrice neliniare, și la cel al deformației plastice.

Compararea relațiilor (1) și (7) este sugestivă.

Subliniem că $\delta\Phi$ nu conține variația δT . Nu avem nici un motiv să presupunem că $\delta\Phi$ ar fi o diferențială totală: într-adevăr, absența termenului în δT arată că în acest caz din (5.6) ar trebui să urmeze $\partial\sigma_{ij}/\partial T = 0$, ceea ce în general este fals. Din această cauză nu putem încă vorbi despre lucrul mecanic de deformație, ci numai despre lucrul mecanic *elementar* de deformație, subînțelegînd caracterul elementar al deformației.

Simbolul $\delta\Phi$ este *definit* de membrul al doilea din (6) și această expresie a lucrului de încărcare rămîne valabilă pentru *orice* stare a corpului (inclusiv starea elasto-plastică).

Expresia duală lui (6) :

$$\delta\Phi_e = \varepsilon_{ij} \delta\sigma_{ij} \quad (8)$$

nu are deocamdată nici un sens fizic. Întrucît însă este evident că

$$\delta\Phi + \delta\Phi_e = d(\sigma_{ij} \varepsilon_{ij}), \quad (9)$$

unde σ_{ij} și ε_{ij} sînt priviți ca parametri independenți, vom spune că mărimea $\delta\Phi_e$ definită pe (8) este *lucrul mecanic elementar complementar de deformație*. (Compară cu (5.24).)

b) Energia elastică

Să reducem acum numărul de parametri, presupunînd că există relații

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(\varepsilon_{hk}, T), \quad i, j, h, k = 1, 2, 3, \quad (10)$$

ceea ce repetă (1.1) — argumentul x fiind subînțeles — și corespunde ipotezelor dependenței locale, elasticității ideale și liniarității geometrice. Acestea sînt deci *ecuațiile de stare*, valabile numai între anumite limite, și permițînd considerarea a numai 7 coordonate generalizate. (Dacă relația (1.3) nu este verificată, această reducere a numărului parametrilor nu e posibilă.) Spre deosebire de relația (6), raționamentele ce urmează

sînt deci valabile numai în cazul unui proces de deformare *elastică* (cu liniaritate geometrică). Ne vom limita la procesele *cvasistatice* (cazul dinamic va putea fi studiat ulterior, făcînd uz de principiul lui d'Alembert), și vom presupune că nu există cîmpuri electromagnetice de natură să influențeze parametrii mecanici.

Introducînd (6) în (5.15) și (5.17), obținem primul principiu al termodinamicii pentru procese de deformare *elastică cvasistatică* (deci reversibilă) sub formele echivalente

$$dU = \epsilon_{ij} \delta \epsilon_{ij} + T dS, \quad dF = \sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij} - S dT, \quad (11)$$

unde există numai 7 variabile independente, astfel că termenii pentru $i = j$ apar cu coeficientul 1, iar ceilalți, cu coeficientul 2.

Prezintă adesea avantaj să considerăm ca argumente toate cele *nouă* componente ale deformăției. Pentru aceasta, dată fiind de exemplu o funcție $G(\epsilon_{ij})$, $i \leq j$, vom defini o prelungire a ei $\hat{G}(\epsilon_{ij})$ (pentru $i, j = 1, 2, 3$) supusă condițiilor

$$G(\epsilon_{ij}) = \hat{G}(\epsilon_{ij}), \quad \partial \hat{G} / \partial \epsilon_{ij} = \partial \hat{G} / \partial \epsilon_{ji}. \quad (12)$$

Vom folosi accentul circumflex pentru a indica prezența a 9 argumente (renunțînd ulterior la această convenție, cînd numărul argumentelor rezultă din formule, sau e indiferent). Vom proceda analog și pentru funcții de componentele tensiunii.

În felul acesta găsim

$$\begin{aligned} \partial \hat{G} / \partial \epsilon_{ij} &= \partial G / \partial \epsilon_{ij}, & i &= j; \\ \partial \hat{G} / \partial \epsilon_{ij} &= \partial \hat{G} / \partial \epsilon_{ji} = \frac{1}{2} \partial G / \partial \epsilon_{ij}, & i &\neq j. \end{aligned} \quad (13)$$

Pentru un proces elastic cvasistatic, avem mai întîi din (11):

$$\sigma_{ij} = \partial U / \partial \epsilon_{ij}, \quad i = j; \quad \sigma_{ij} = \frac{1}{2} \partial U / \partial \epsilon_{ij}, \quad i \neq j; \quad T = \partial U / \partial S,$$

și relații similare pentru funcția F . Ținînd seama de (13), putem scrie

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{ij} &= \partial \hat{U} / \partial \epsilon_{ij}, \quad T = \partial \hat{U} / \partial S, \\ \hat{\sigma}_{ij} &= \partial \hat{F} / \partial \epsilon_{ij}, \quad S = - \partial \hat{F} / \partial T. \end{aligned} \quad (14)$$

Întrucît $\delta \Phi$ nu este o diferențială totală, atît lucrul mecanic cît și cantitatea de căldură absorbită de corp depind în general de istoricul procesului. Din (5.18), (5.19) — sau din (11) — urmează că, pentru ca $\delta \Phi$ să fie, într-un anumit punct, o diferențială totală, este suficient ca procesul să se desfășoare *adiabatic* sau *izotermic* în acel punct. În aceste

două cazuri-limită există deci câte o funcție de stare, a cărei diferențială totală este $\delta\Phi$: anume, avem

$$\Phi_{ad} = U(\varepsilon_{11}, \dots, \varepsilon_{31}; S_0), \quad (15)$$

$$\Phi_{iz} = F(\varepsilon_{11}, \dots, \varepsilon_{31}; T_0), \quad (16)$$

unde S_0 , respectiv T_0 sînt valorile constante ale entropiei, respectiv ale temperaturii, la care se desfășoară procesul.

Primul caz este cel al proceselor suficient de rapide pentru ca schimbul de căldură să nu fie posibil (de pildă cazul vibrațiilor elastice, cînd $\delta K = \delta Q = 0$ *pe un ciclu*). Al doilea caz este cel al proceselor quasistatice, cînd există timp suficient pentru absorbție sau degajare de căldură, astfel ca temperatura să rămînă constantă.

În ambele cazuri există deci — la regimul $S = S_0$ sau $T = T_0$ — o funcție de stare Φ , denumită *energie potențială unitară de deformare elastică*, sau, pe scurt, *potențial elastic*, sau încă *energie elastică*. Dimensiunea ei este $[\Phi] = FL^{-2}$.

Ca stare-reper se alege (ca și în §2), starea în care atît deformațiile cît și tensiunile sînt nule, la o anumită temperatură $T = T_0$.

Aparent, orice proces de deformare necesită cheltuire de lucru mecanic; așadar, dacă considerăm că în starea naturală $\Phi_0 = 0$, în orice stare diferită de aceasta urmează $\Phi > 0$. În fapt însă, pot exista procese izotermice în cursul cărora corpul primește din mediul ambiant lucru mecanic și căldură. Pentru atingerea unei anumite stări este deci cu puțința ca pentru $\delta Q > 0$ să avem $\delta\Phi < 0$. În cele ce urmează, ne vom limita însă la cazurile în care deformarea se face cu *cheltuire* de lucru mecanic, astfel că pentru orice stare diferită de cea naturală, vom presupune $\Phi > 0$.

c) Corpuri elastice și corpuri hiperelastice

Corpurile pentru care sînt satisfăcute relațiile (1.1) — (1.3) sînt corpurile *elastice*. Corpurile elastice pentru care — în condiții date — există un potențial elastic, se numesc *hiper-elastice*.

În cazul unidimensional de la finele § 5, distincția nu are sens: lucrul elementar $\delta\Phi$ este diferențiala ariei delimitate de curba caracteristică, axa ε , și verticala corespunzătoare. Dimpotrivă, în cazul a 6 sau 7 variabile independente, cînd sînt deci posibile *diferite* drumuri din starea naturală într-o anumită stare finală, această deosebire este esențială: condiția (1.3) asigură numai corespondența biunivocă între tensiuni și deformații, *nu însă* și reversibilitatea procesului ca proces termodinamic, inclusiv posibilitatea de a recupera după descărcare *întreg* lucrul mecanic cheltuit la încărcare.

Prin urmare, în cazul deformăției elastice, putem alege drept coordonate generalizate mărimile ε_{ij} , T sau mărimile σ_{ij} , T . Deformația elastică este reversibilă, sînt deci posibile cicluri (drumuri închise) în spațiul parametrilor ε_{ij} , σ_{ij} , T — așadar procese cu revenire la valoarea inițială a energiei și entropiei. Aceste cicluri pot fi reprezentate

tot ca cicluri în spațiul figurativ al coordonatelor generalizate alese. Sensul de parcurs pe orice drum (închis sau deschis) este indiferent.

Dacă procesul de descărcare se desfășoară pe același drum cu cel de încărcare, atunci variația lucrului mecanic pe întregul ciclu este nulă. În general însă, pentru procese de descărcare pe *alt* drum decât cel de încărcare avem, în virtutea primului principiu al termodinamicii și a faptului că $\delta\Phi$ nu este o diferențială totală :

$$\int_{\mathcal{C}} \delta\Phi = - \int_{\mathcal{C}} \delta Q \neq 0. \quad (17)$$

Aci este posibilă atât transformarea unei părți din lucrul mecanic în căldură, cât și procesul invers, de transformare a căldurii în lucru mecanic (spre deosebire de cazul gazelor, deocamdată cel puțin fără utilitate practică).

Odată cu depășirea limitei de valabilitate a relațiilor (1.1)–(1.3), reducerea la numai 7 coordonate generalizate nu mai este posibilă, deformarea nu mai este reversibilă, drumurile din spațiul parametrilor ε_{ij} , σ_{ij} , T nu mai pot fi parcurse în orice sens, și orice drum închis în spațiul celor 7 coordonate ε_{ij} , T sau σ_{ij} , T e inevitabil însoțit de creșterea entropiei, așadar de scăderea energiei libere, de transformarea unei părți din lucrul mecanic de încărcare, în căldură (disipația energiei).

În cazul deformăției **hiperelastice** în schimb, existența funcției de stare Φ arată că pentru *orice* ciclu avem, mai particular decât (17) :

$$\int_{\mathcal{C}} \delta\Phi = \int_{\mathcal{C}} \delta Q = 0, \quad (18)$$

și procesul poate fi descris numai în termeni mecanici, desigur identici pentru încărcare și descărcare.

Ca și starea elastică, starea hiperelastice depinde atât de material, cât și de condițiile procesului de deformare.

Unele rezultate importante ale teoriei elasticității sînt valabile pentru corpuri în stare elastică; totuși, *în forma ei actuală, teoria elasticității este încă o teorie a corpurilor în stare hiperelastice.*

OBSERVAȚIE. Se cer a fi menționate aci și cazurile de relații mai generale între factorii geometrici și cei statici (sau dinamici). Notăm astfel importanța corpurilor *hipoelastice* (caracterizate de o dependență biunivocă între variațiile tensiunii și deformăției în fiecare moment), precum și a corpurilor *anelastice* (pentru care deformările sînt reversibile și legate liniar de tensiuni, dar în care, datorită prezenței factorului timp, corespondența dintre tensiuni și deformății nu este biunivocă). Indicații bibliografice pentru astfel de tipuri de corpuri vor fi date în § 4.1.

Existența potențialului Φ permite scrierea efectivă a relațiilor (10) sub forma sub care ele rezultă din (14). Întrucît $\Phi_{,i} \neq \Phi_{,id}$, urmează că și relațiile fizice (10) diferă de la un caz la celălalt. Chestiunea a fost

abordată experimental de lord Kelvin [2] (retipărit în [4], vol. 3). Vezi și L. Brillouin [2]; A. Love [1], § 65, nota 3.

Dacă procesul nu e nici adiabatic, nici izotermic în fiecare punct, nu se poate afirma existența potențialului elastic. Dacă însă variațiile de temperatură și entropie au o contribuție mică în raport cu termenul $\delta\Phi$, se admite existența potențialului chiar dacă condițiile de integrabilitate ale formei $\delta\Phi$ nu sînt riguros îndeplinite. De asemenea, atunci cînd termenul TS e mic în raport cu U , se admite $F \cong U$, identificîndu-se potențialul adiabatic cu cel izotermic și admițîndu-se că *fenomenul nu depinde de factorii termici*. Spre deosebire de cazul gazelor, în cazul deformării corpurilor solide ordinul de mărime al erorii astfel comise nu depășește 1%.

Dacă însă procesul de deformare nu este cvasistatic, sau nu are caracter adiabatic ori izotermic, fiind însoțit de aporturi importante de căldură sau de schimbări mari de temperatură, problema nu mai poate fi studiată în termeni pur mecanici, ci *trebuie abordată ca o veritabilă problemă de termodinamică*.

d) Notă istorică

Ideea considerării potențialului elastic aparține lui G. Green [1] (vezi și A. Clebsch și B. de Saint-Venant [1], notă finală la § 16). Primul care a folosit mijloacele termodinamicii pentru a dovedi *existența* unei funcții de stare Φ a fost Kelvin [2]. Este semnificativ faptul că Kirchhoff, unul din creatorii termodinamicii, dar mecanicist convins, construiește potențialul Φ pe o cale pur formală, pornind de la postularea dependenței liniare între tensiuni și deformări (vezi G. Kirchhoff [3], § 11.7; vezi și A. Clebsch și B. de Saint-Venant [1], pag. 61). Elaborarea amănunțită a problemelor termodinamicii deformăției începe în fapt cu J. Gibbs [1], [2] — și este încă departe de o soluție definitivă.

§ 7. CORPURI HIPERELASTICE

a) Formulele lui Green

În cele ce urmează, ne vom limita la cazul în care există un potențial Φ care depinde numai de componentele deformăției și de punct:

$$\Phi = \Phi(\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{23}, \varepsilon_{31}; x_1, x_2, x_3). \quad (1)$$

Acesta se numește *potențialul lui Green*. Forma obținută subliniază caracterul reversibil al deformăției și implică ipoteza dependenței locale.

Utilizînd (6.12), (6.13) și introducînd (1) în (6.14), obținem *formulele lui Green*:

$$\hat{\sigma}_{ij} = \partial \hat{\Phi} / \partial \varepsilon_{ij}, \quad (2)$$

sau încă

$$\sigma_{ii} = \partial\Phi/\partial\varepsilon_{ii}, \quad \sigma_{ij} = \frac{1}{2} \partial\Phi/\partial\varepsilon_{ij} \quad (i \neq j). \quad (3)$$

Formulele lui Green dau deci conținutul legii fizice (1.1) pentru corpuri hiperelastice, în teoria deformației liniare. (Relații similare se obțin în teoria deformației neliniare: vezi A. Green și J. Adkins [1]; V. Novojilov [1], [3].)

Întrucât Φ este funcție de cele 6 componente ale deformației, avem în fiecare punct (așa dar pentru $x_i = \text{const.}$):

$$d\Phi = (\partial\Phi/\partial\varepsilon_{ij}) d\varepsilon_{ij}, \quad i \leq j; \quad (4)$$

condiția $i \leq j$ arată că aci apar numai diferențialele celor 6 variabile independente. Ținând seama de (6.13) și (2), obținem

$$d\Phi = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}, \quad (5)$$

unde suma se face pentru toate valorile i, j . Obținem astfel din nou expresia (6.6), de data aceasta însă pentru o funcție de stare Φ .

Din (5) se deduc ușor relațiile (2) — sau (3) — mărimile σ , fiind pur și simplu coeficienții diferențialelor $d\varepsilon_{ij}$.

Întrucât cunoașterea componentelor ε_{ij} este echivalentă cu cea a invariantilor deformației și a poziției axelor principale (vezi finele § 1.8), putem pune (1) sub forma⁶⁾

$$\Phi = \Phi(E_1, E_2, E_3; \psi_1, \psi_2, \psi_3; x_1, x_2, x_3), \quad (6)$$

valabilă pentru o temperatură sau o entropie constantă. Dacă funcția (6) nu depinde explicit de coordonatele x_i , corpul este *omogen* (din punct de vedere elastic); dacă ea nu depinde explicit de unghiurile ψ_i , el este *izotrop*.

b) Constantele elastice

Legea (3) ia forme diferite după natura funcției Φ . Ne putem da astfel de funcții sub formă de serii de puteri ale componentelor ε_{ij} , concentrând deci eventualele proprietăți de neomogenitate în coeficienții seriilor. Evident, o astfel de dezvoltare nu poate conține termeni cu exponenți negativi (care ar conduce la energii infinite pentru deformații infinit mici); luând $\Phi_0 = 0$ în starea naturală, urmează că nu pot apare nici termeni liberi; în fine, dacă nu există tensiuni inițiale, din (3) conchidem că aci nu pot apare nici termeni liniari⁷⁾.

⁶⁾ În genere, păstrăm același simbol Φ pentru potențialul lui Green, oricare ar fi variabilele ce intervin explicit în expresia sa. Semnul \wedge nu va fi nici el folosit, cînd nu există risc de confuzie.

⁷⁾ În caz contrar, funcția Φ trebuie construită altfel (vezi de ex. H. Poincaré [1], cap. 2; M. Biot [4], cap. 2 și 5).

Dezvoltarea în serie începe deci cu termeni *patratici*, cărora le corespund în expresiile tensiunilor termeni liniari. Coeficienții care înmulțesc diverșii termeni patratici, cubici etc., se numesc — ca și în § 2 — *coeficienți de rigiditate elastici* (pentru un corp omogen: *constante elastice*). Nu are rost să vorbim despre coeficienți hiperelastici — distincția este evidentă.

Se vede imediat că există 21 coeficienți ai termenilor patratici, 56 ai celor cubici etc. Ca și în § 2, determinarea acestor coeficienți echivalează cu cunoașterea deplină a proprietăților materialului din punctul de vedere al teoriei elasticității.

Dacă Φ este o funcție patratică, problema este *cu liniaritate fizică*.

Să ne limităm acum la cazul unui corp hiperelastic cu liniaritate fizică; relațiile ce se obțin trebuie să constituie deci cazuri particulare ale celor din §§ 2 și 3.

Întrucât există 21 termeni patratici în Φ , rezultă că în cazul hiperelasticității cei 36 coeficienți c_{ij}^{hk} din (2.1) nu pot fi independenți. Într-adevăr, din (6.6) — care ia acum forma (5) — rezultă că

$$\partial \sigma_{ij} / \partial \varepsilon_{hk} = \partial \sigma_{hk} / \partial \varepsilon_{ij},$$

astfel că, introducând aci (2.1), obținem

$$c_{ij}^{hk} = c_{hk}^{ij}. \quad (7)$$

Aceste relații reduc numărul de coeficienți exact la 21.

Pentru coeficienții de deformabilitate avem, analog cu (7):

$$C_{ij}^{hk} = C_{hk}^{ij}. \quad (8)$$

Întrucât starea hiperelastică depinde nu numai de material, ci și de condițiile procesului de deformare, este evident că pentru același material, condițiile (7), (8) pot fi uneori satisfăcute și alteleori nu.

OBSERVAȚIA 1. Presupunând că forțele de interacțiune sînt forțe centrale și că particulele se deplasează analog punctelor unui mediu continuu, A. Cauchy [6] a obținut relații de dependență care reduc numărul coeficienților elastici la numai 15 în cazul general. În jurul acestei teorii, numită *rariconstantă* (a constantelor rarefiate), s-au purtat în secolul trecut discuții înverșunate. Astfel, Saint-Venant a susținut — cu anumite rezerve — punctul de vedere al lui Cauchy (vezi A. Clebsch și B. de Saint-Venant [1], notă finală la § 16), în timp ce Green se situa pe poziția teoriei *multiconstante* (a celor 21 coeficienți).

Teoria rariconstantă a fost infirmată de datele experimentale. Într-adevăr, în cazul unui corp izotrop, ea conduce la egalitatea $\lambda = \mu$, de unde din (4.7) ar urma $\nu = 0,25$. Or, se constată că acest coeficient oscilează între limite destul de largi, și destul de depărtate de această valoare (vezi finele § 4). Rămîne totuși de cercetat dacă există condiții speciale în care relațiile suplimentare ale lui Cauchy sînt valabile. Pentru unele detalii, vezi L. Brillouin [3], § 10.9; A. Love [1], anexa B; W. Voigt [2], § 278; mai recent problema a fost reluată de I. Stakgold [1].

c) Teoria liniară. Formulele lui Castigliano

În condițiile teoriei liniare, existența potențialului lui Green este asigurată numai în virtutea condițiilor (7) — și desigur și (2.2). În acest caz, forma $\delta\Phi$ se integrează ușor. Anume, întrucât Φ este acum o funcție patrată și omogenă de ε_{ij} , teorema lui Euler asupra funcțiilor omogene dă

$$(\partial\Phi/\partial\varepsilon_{ij})\varepsilon_{ij} = 2\Phi, \quad i \leq j, \quad (9)$$

(unde $i \leq j$, întrucât avem 6 variabile). Utilizând (6.13), obținem

$$(\partial\hat{\Phi}/\partial\varepsilon_{ij})\varepsilon_{ij} = 2\Phi, \quad (10)$$

(condiția $i \leq j$ a dispărut), și deci, folosind formulele (2) :

$$2\Phi = \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}. \quad (11)$$

Prin urmare, în cazul teoriei liniare pentru corpuri hiper-elastice, în locul relației diferențiale (5) obținem forma întreagă (11). Introducând aci (2.1), respectiv (2.4), căpătăm încă și

$$2\Phi = c_{ij}^{hk}\varepsilon_{hk}\varepsilon_{ij}, \quad (12)$$

$$2\Phi = C_{ij}^{hk}\sigma_{hk}\sigma_{ij}, \quad (13)$$

relații care dau expresia potențialului elastic ca funcție patrată și omogenă de componentele deformației, respectiv tensiunii. (Întrucât $i, j = 1, 2, 3$, derivatele cantităților din (11)–(13) se calculează pentru funcția $\hat{\Phi}$.)

În formula (11) există — spre deosebire de (6.6) și chiar de (5) — deplină simetrie în ce privește rolul tensiunii și deformației. Aceeași teoremă a lui Euler dă, analog cu (9) și folosind din nou (6.13) :

$$2\Phi = (\partial\Phi/\partial\sigma_{ij})\sigma_{ij} = (\partial\hat{\Phi}/\partial\sigma_{ij})\sigma_{ij}, \quad (14)$$

de unde, prin comparație cu (11), urmează *formulele lui Castigliano*

$$\varepsilon_{ij} = \partial\hat{\Phi}/\partial\sigma_{ij}, \quad (15)$$

duale formulelor lui Green (2).

Scriind acum $\delta\Phi = d\Phi$ sub forma (compară cu (4)) :

$$d\Phi = (\partial\Phi/\partial\sigma_{ij})d\sigma_{ij}, \quad i \leq j, \quad (16)$$

căpătăm cu ajutorul formulelor (15) :

$$d\Phi = \varepsilon_{ij}d\sigma_{ij}, \quad (17)$$

așadar tocmai lucrul complementar (6.8), pentru cazul particular al corpului hiperelastice în teoria liniară. În acest caz, avem deci

$$\delta\Phi = \delta\Phi_e = d\Phi. \quad (18)$$

Atât formulele lui Green cât și cele ale lui Castigliano se pot obține prin derivare din (11) — sau din (12) și (13) — ținând seama că între mărimile σ_{ij} , ε_{ij} există relațiile (2.1), (2.4). Privite împreună, aceste formule alcătuiesc un sistem de „ecuații canonice” ce amintește ca aspect și semnificație de ecuațiile lui Hamilton.

OBSERVAȚIA 2. Forma (6.6) a lucrului mecanic elementar este valabilă pentru orice proces de deformare (cu liniaritate geometrică, dar susceptibilă de generalizare la cazul geometric neliniar); forma (5) precum și formulele lui Green (2), sînt valabile (tot în cadrul liniarității geometrice) pentru un proces de deformare *hiperelastic*, dar altfel oarecare; forma (17) și formulele lui Castigliano (15) sînt însă valabile numai în cadrul teoriei corpului hiperelastic cu liniaritate atît geometrică, cît și fizică.

OBSERVAȚIA 3. Condiția de natură fizică $\Phi > 0$ (vezi § 6, pag. 111) impune anumite condiții coeficienților c_{ij}^{hk} . Într-adevăr, aceasta revine la a afirma că forma patrată Φ trebuie să fie pozitiv definită. Condiția necesară și suficientă pentru aceasta este dată de criteriul lui Sylvester (vezi de exemplu V. Smirnov [2], volumul 3, partea I-a, pct. 36): minorii diagonali ai matricii coeficienților formei (12) (sau (13)) trebuie să fie pozitivi, de unde rezultă anumite inegalități care trebuie satisfăcute de coeficienții elastici. În teoria neliniară, chestiunea este studiată de G. Truesdell și R. Toupin [2].

Ca și în cazul general, existența potențialului elastic în cazul unor corpuri cu anumite proprietăți de simetrie elastică trebuie să ducă la micșorarea numărului coeficienților corespunzători.

Pentru corpurile hiperelastice *anizotrope* liniare, numărul coeficienților de rigiditate variază între 21 (cristale din sistemul triclinic) și 3 (sistemul cubic).

În cazul unui corp cu *un plan de simetrie*, relațiile (3.6) se reduc la 8 condiții distincte și numărul de coeficienți independenți este $21 - 8 = 13$.

Pentru corpuri *ortotrope*, relațiile (3.7) dau 4 condiții distincte, și coeficienții independenți rămîn în număr de $21 - 8 - 4 = 9$.

În fine, pentru corpuri *elastice izotrope*, relațiile (3.19) arată că condițiile (7) sînt automat satisfăcute: prin urmare, în cadrul teoriei liniare, orice corp elastic izotrop este și hiperelastic. Pentru astfel de corpuri, distincția dintre corpuri elastice și hiperelastice nu are deci sens. În acest cadru, vom vorbi deci pe viitor numai despre corpuri *elastice* (izotrope).

OBSERVAȚIA 4. Condițiile din § 6 sînt condiții suficiente, dar nu și necesare, de hiperelasticitate. Totuși, ele arată că dacă procesul de deformare nu se desfășoară nici adiabatic, nici izotermic, este de așteptat că starea elastică a corpului, în condițiile date, să nu poată fi privită ca liniară și izotropă.

d) Potențialul elastic al corpurilor izotrope

Potențialul elastic al corpurilor izotrope cu liniaritate geometrică și fizică se va nota în general cu W . Expresia sa se obține introducînd (3.19) în (12) sau (3.18) în (11), de unde:

$$2W = \lambda \theta^2 + 2\mu \varepsilon_{ij}^2, \quad (19)$$

ceea ce — ținând seama de (1.8.11) — se pune ușor sub forma

$$2W = (\lambda + 2\mu) E_1^2 - 4\mu E_2. \quad (20)$$

După cum era de așteptat, W (formă patrată) nu depinde de E_3 . Introducând relațiile (4.18) în (11), obținem și

$$2W = -\frac{\nu}{E} \Theta^2 + \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij}^2. \quad (21)$$

Este vizibil că dacă introducem (19) în formulele lui Green (2) sau (21) în formulele lui Castigliano (15), obținem din nou legea lui Hooke sub forma (3.18), respectiv (4.18). (Întrucât în (19), (21) avem $i, j = 1, 2, 3$, e limpede că W trebuie înțeles ca \hat{W} .)

Prezintă interes scrierea potențialului elastic cu ajutorul legii lui Hooke sub forma (4.28). Pentru aceasta, să remarcăm că

$$\Theta^2 = 3(\varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{22}^2 + \varepsilon_{33}^2) - (\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22})^2 - (\varepsilon_{22} - \varepsilon_{33})^2 - (\varepsilon_{33} - \varepsilon_{11})^2. \quad (22)$$

Întrucât din (4.15) avem $\lambda = k - \frac{2}{3}\mu$, și întrucât din (4.23) urmează desigur $\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22} = e_{11} - e_{22}$, $\varepsilon_{12} = e_{12}$, și încă patru relații similare, expresia (19) devine:

$$W = W^0 + W^e, \quad (23)$$

unde W^0 depinde numai de deformația de volum, iar W^e numai de cea de formă:

$$W^0 = \frac{1}{2} k \Theta^2, \quad (24)$$

$$W^e = \frac{1}{3} \mu [(e_{11} - e_{22})^2 + (e_{22} - e_{33})^2 + (e_{33} - e_{11})^2 + 6e_{12}^2 + 6e_{23}^2 + 6e_{31}^2].$$

Ținând seama în (24) de relațiile (4.28), obținem și

$$\begin{aligned} W^0 &= (1/18 k) \Theta^2, \\ W^e &= (1/12\mu) [(s_{11} - s_{22})^2 + (s_{22} - s_{33})^2 + (s_{33} - s_{11})^2 + 6s_{12}^2 + 6s_{23}^2 + 6s_{31}^2]. \end{aligned} \quad (25)$$

Astfel de expresii sînt deosebit de importante în teoria plasticității (vezi și §4, pag. 94).

Pentru a găsi condițiile necesare și suficiente pentru ca W să fie o formă pozitiv-definită, să considerăm matricea corespunzătoare a coeficienților

	ϵ_{11}	ϵ_{22}	ϵ_{33}	ϵ_{12}	ϵ_{23}	ϵ_{31}
ϵ_{11}	$\lambda + 2\mu$	λ	λ	0	0	0
ϵ_{22}	λ	$\lambda + 2\mu$	λ	0	0	0
ϵ_{33}	λ	λ	$\lambda + 2\mu$	0	0	0
ϵ_{12}	0	0	0	4μ	0	0
ϵ_{23}	0	0	0	0	4μ	0
ϵ_{31}	0	0	0	0	0	4μ

(unde coeficientul 4μ apare datorită faptului că în (19) indicii i, j iau toate valorile 1, 2, 3). Minorii diagonali succesivi au valorile :

$$\Delta_1 = \lambda + 2\mu, \quad \Delta_2 = 4\mu(\lambda + \mu), \quad \Delta_3 = 12\lambda\mu^2 + 8\mu^3,$$

$$\Delta_4 = 4\mu\Delta_3, \quad \Delta_5 = 4\mu\Delta_4, \quad \Delta_6 = 4\mu\Delta_5.$$

Toți acești minori sînt pozitivi, dacă și numai dacă

$$\mu > 0, \quad k = \lambda + \frac{2}{3}\mu > 0. \quad (26)$$

Or, din (4.15) și (4.17) urmează că condiția (26) este întotdeauna satisfăcută, — astfel că potențialul elastic W este o formă patratică pozitiv-definită. Acest fapt va juca în cele ce urmează un rol esențial (vezi § 4.5).

Cazul unui corp hiperelastic izotrop, dar eventual cu neliniaritate fizică, se poate obține considerînd că potențialul lui Green (6) este independent de unghiurile ψ_i :

$$\Phi = \Phi(E_1, E_2, E_3; x_1, x_2, x_3). \quad (27)$$

Dezvoltînd în serie această funcție, deducem că există numai doi termeni patratici : E_1^2 și E_2 ; trei termeni cubici : E_1^3 , E_1E_2 , E_3 ; ș.a.m.d. De aci rezultă din nou că un corp hiperelastic izotrop poate fi caracterizat — în cadrul teoriei liniare — prin numai doi coeficienți elastici. Introducînd expresia potențialului patratic W în formulele lui Green (3), regăsim legea lui Hooke (3.18) pentru corpuri izotrope.

Reținînd în Φ și termeni de grad superior, obținem legi neliniare fizic pentru corpuri izotrope hiperelastice.

Toate cele de mai sus rămîn valabile pentru corpuri neomogene, determinarea efectivă a coeficienților elastici fiind însă considerabil îngreunată.

În cele ce urmează, ne vom limita la cazul *teoriei liniare a corpurilor omogene și izotrope*. Ori de cîte ori va fi vorba de un cadru mai general, vom specifica aceasta.

CAPITOLUL 4

SISTEMUL COMPLET DE ECUAȚII AL TEORIEI ELASTICITĂȚII LINIARE

§ 1. ECUAȚIILE TEORIEI ELASTICITĂȚII

a) Ecuatiile elasto-staticii liniare

Până aci am examinat comportarea corpului elastic din trei puncte de vedere diferite, ceea ce a condus la a considera 3 componente ale deplasării, 6 componente ale deformației și 6 componente ale tensiunii. Aceste funcții sînt legate prin 6 ecuații geometrice, 3 ecuații statice, și 6 ecuații fizice. În total, dispunem acum de 15 ecuații pentru 15 funcții necunoscute.

În cele ce urmează, ne vom limita la studiul *deformației liniare crasi-stactice a corpurilor hiperelastice alcătuite din materiale omogene și izotrope care se supun legii lui Hooke*, așadar la ceea ce se numește curent *elasto-statica liniară*. (Vezi în partea a doua a paragrafului indicații asupra unor probleme cu caracter mai general. Vezi de asemenea § 0.4, pag. 30–31.)

Avem deci de a face cu cantitățile u_i , ε_{ij} , σ_{ij} , raportate la coordonatele inițiale și legate prin ecuațiile

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}), \quad (1)$$

$$\sigma_{ij,j} + F_i = 0, \quad (2)$$

$$\sigma_{ij} = c_{ij}^{hk} \varepsilon_{hk}, \quad (3)$$

sau încă, în loc de (3):

$$\varepsilon_{ij} = C_{ij}^{hk} \sigma_{hk}, \quad (4)$$

(ceea ce include și cazul corpurilor anizotrope și neomogene, în teorie liniară). Condițiile la limită vor fi prezentate ulterior (vezi § 2).

Sistemul (1)–(3) se numește *sistemul complet de ecuații ale teoriei elasticității* (statice și liniare). (Vezi § 5, pag. 139.) Acesta este un sistem de ecuații cu derivate parțiale, liniar, de primul ordin, cu coeficienți constanți pe lângă termenii diferențiali. Relațiile (1) și (3) sînt omogene.

OBSERVAȚIA 1. Structura acestui sistem este foarte apropiată de cea a sistemului ecuațiilor descriind mișcările lente ale unui fluid viscos (vezi de ex. C. Iacob [5], §§ 4.21–4.33).

OBSERVAȚIA 2. Sistemul (1)–(3) poate fi studiat cu ajutorul mijloacelor analizei tensoriale, tehnică folosită sistematic pentru prima oară de către L. Brillouin [3] și F. Murnaghan [1], [2]. Vezi și V. Bloch [2]; A. Green și W. Zerna [1] (cap. 1 și 2 pentru relațiile generale și toată cartea pentru utilizarea lor); M. Haimovici [1], capitolul 1; N. Kilcevski [2]; N. Kocin [1], capitolele 3 și 4; Iu. Krutkov [1]; A. Lurie [4], capitolul 1; W. Prager [2]; I. Sneddon și D. Berry [1], partea A; o expunere modernă a aparatului matematic de folosit este dată de J. Ericksen [1], iar aplicații profunde sînt prezentate de C. Truesdell și R. Toupin [1] și C. Truesdell și W. Noll [1].

Aceste metode sînt cu deosebire utile în problemele neliniare, și în probleme în care însăși configurația corpului impune folosirea altor coordonate decît cele carteziane ortogonale. Dar nu trebuie uitat niciodată că în definitiv atenția trebuie concentrată asupra rezolvării unor anumite probleme la limită pentru anumite sisteme de ecuații cu derivate parțiale — și nu asupra aparatului, care nu servește decît la scrierea lor, este drept, sub o formă compactă și elegantă.

Pentru evaluarea importanței metodelor tensoriale, vezi recenzia lui F. Pohle la cartea lui M. Biot [4] (*Applied Mechanics Reviews*, no. 4/1965). Chiar examinarea structurii cărții lui A. Green și W. Zerna este instructivă în acest sens.

În cele ce urmează, metodele tensoriale nu vor fi folosite.

OBSERVAȚIA 3. Prezintă adesea interes scrierea ecuațiilor elasticității în coordonate *curbilinii*, legate de configurația frontierei (de obicei, în așa fel încît frontiera să fie suprafață de nivel pentru una din coordonate — ceea ce ușurează mult formularea condițiilor la limită și rezolvarea efectivă a problemei). Atît în cazul coordonatelor curbilinii ortogonale, cît și în cazul celor neortogonale, este desigur inutil să se stabilească din nou ecuațiile elasticității: proprietățile tensoriale deja examinate permit transcrierea în orice sistem de coordonate a tuturor cantităților și relațiilor necesare, odată ele stabilite în axe carteziane.

Pentru detalii, vezi de exemplu G. Lamé [2]; E. și F. Cosserat [1]; P. Germain [1], capitolul 17; C. Iacob [5], §§ 4.34 și 4.35; N. Kilcevski [2], capitolul 4; N. Kocin [1], § 2.18; A. Lurie [4], §§ 1.6 și 1.7; V. Novojilov [3], capitolul 4 și §§ 5.21, 5.22; W. Prager [2], capitolul 1; I. Sneddon și D. Berry [1], §§ 52, 53 și 68; I. Sokolnikoff [2], § 4.48; S. Timoshenko și J. Goodier [1], capitolul 13. Rezultate utile în numeroase cazuri particulare sînt date de V. Bloch [2] și P. P. Teodorescu [4]. Vezi și articolele lui I. Beju [1] și M. Vahitov [1].

Menționăm în particular utilitatea coordonatelor curbilinii în studiul corpurilor de rotație — unde e firesc să considerăm coordonatele z (în lungul axei de rotație), ρ (distanța la axă într-un plan $z = \text{const.}$), și φ (unghiul măsurat în acest plan, de la o direcție de referință).

În studiul problemelor plane și antiplane, subliniem importanța coordonatelor curbilinii atașate reprezentării conforme a domeniului dat pe cerc sau pe o coroană circulară (vezi § A.7).

Într-un sistem de coordonate α, β, γ , componentele deplasării se notează $u_\alpha, u_\beta, u_\gamma$; componentele deformației se notează $\varepsilon_{\alpha\alpha}, \varepsilon_{\alpha\beta}$ etc., iar cele ale tensiunii $\sigma_{\alpha\alpha}, \sigma_{\alpha\beta}$ etc. (sau încă $\widehat{\alpha\alpha}, \widehat{\alpha\beta}$ etc.). Sensul acestor notații rezultă din interpretarea componentelor respective ca componente ale deplasării, deformației și tensiunii în *axele carteziane locale* atașate coordonatelor α, β, γ . Astfel, de exemplu $\widehat{\alpha\alpha}$ este proiecția după axa locală α a tensiunii pe elementul de normală α etc.

Introducând acum (1) în (3) și mai departe în (2), se obține un sistem de trei ecuații pentru cele trei funcții necunoscute u_i , numit *sistemul ecuațiilor în deplasări*. Odată rezolvat acest sistem, relațiile (1) și (3) dau valorile deformației și tensiunii.

Pe de altă parte, ecuațiile (2) alcătuiesc un sistem de ecuații în tensiuni — insuficient totuși pentru a da soluția. Într-adevăr, chiar dacă am găsit o soluție a lor σ_{ij} , ne rămîne să aflăm componentele ε_{ij} — ceea ce este totdeauna posibil — și să calculăm pe u_i din ecuațiile (1) — ceea ce e în general cu neputință.

Ecuațiile (2) sînt valabile și în solidul rigid, dar starea de tensiune rămîne nedeterminată. Posibilitatea de a alege dintre stările de tensiune static posibile în corpul continuu, pe aceea care corespunde echilibrului elastic (vezi § 2.2), ne-o dă tocmai condiția ca starea de tensiune găsită să corespundă unei stări de deplasare posibile în corpul elastic. Condiția necesară și suficientă pentru aceasta constă în verificarea condițiilor lui Saint-Venant.

Sistemul static nedeterminat (2) trebuie deci completat cu ecuațiile (1.9.12), transcrise în tensiuni cu ajutorul lui (4). Aceasta echivalează cu introducerea ecuațiilor geometrice în cele statice, dar în alt mod decît la deducerea ecuațiilor în deplasări. Sistemul de 9 ecuații astfel obținut (3 ecuații statice și 6 ecuații de compatibilitate) se numește *sistemul ecuațiilor în tensiuni*.

Ambele sisteme vor fi explicitate în §§ 7, 8 pentru corpuri omogene și izotrope.

OBSERVAȚIA 4. Pentru sistemul în deplasări, problema verificării condițiilor lui Saint-Venant nu are sens.

Componentele deformației sînt singurele funcții necunoscute ce intervin în sistem numai sub formă întreagă, și deci pot fi calculate elementar. În afară de aceasta, este ușor să imaginăm condiții la limită în deplasări sau tensiuni, dar nu în deformații. De aceea, în centrul atenției se vor situa numai componentele deplasării și tensiunii.

Eliminînd componentele deformației din ecuațiile (1) — (3), putem scrie sistemul sub forma ce provine din (2.4.10) și (3.7.2):

$$\sigma_{ij,j} + F_i = 0, \quad (5)$$

$$\sigma_{ij} = \partial \hat{\Phi} / \partial \left[\frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \right], \quad (6)$$

sau încă din (2.4.10) și (3.7.15):

$$\sigma_{ij,j} + F_i = 0, \quad (7)$$

$$u_{i,j} + u_{j,i} = 2 \partial \hat{\Phi} / \partial \sigma_{ij}. \quad (8)$$

Ecuațiile (5) — sau (7) — sînt *ecuațiile statice*. Ecuațiile (6) și (8) — sau oricare altele echivalente lor — vor purta numele de *ecuații fizico-geometrice*.

OBSERVAȚIA 5. Raționamentele precedente sînt valabile și pentru corpuri neomogene și anizotrope. Forma (5), (6) rămîne valabilă și în cadrul neliniarității fizice. Ambele sisteme pot fi generalizate la cazul neliniarității geometrice.

b) Alte tipuri de corpuri și probleme

Sistemul considerat descrie un anumit tip de comportare a corpului solid deformabil. Este util să indicăm aci cîteva alte categorii importante de probleme, în strînsă conexiune cu cea de care ne ocupăm, și să sugerăm cel puțin o bibliografie minimală.

Să presupunem că avem de-a face cu o problemă a cărei soluție depinde de determinarea unei anumite mărimi abstracte \mathfrak{v} (funcție, vector, matrice etc.) aparținînd unei mulțimi \mathfrak{V} . Informațiile pe care le deținem asupra lui \mathfrak{v} permit să scriem o ecuație

$$\mathfrak{B}\mathfrak{v} = \mathfrak{q}, \quad (9)$$

unde \mathfrak{B} este o lege de corespondență (un operator) care asociază elementului necunoscut \mathfrak{v} , un anumit element cunoscut \mathfrak{q} . Foarte adesea, \mathfrak{B} reprezintă o succesiune de operații de derivare și integrare, aplicate funcțiilor componente ale mărimii \mathfrak{v} (inclusiv, eventual, anumite condiții la limită, condiții de normare etc.).

Din păcate, posibilitatea de a construi relații de acest tip, descriînd deci un fenomen mecanic, fizic etc., nu e decît arareori însoțită de posibilitatea de a rezolva ecuația (9), adică de a găsi un operator invers \mathfrak{B}^{-1} , care, aplicat celor doi membri din (9), să permită scrierea soluției problemei sub forma

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{q}. \quad (10)$$

În același timp cu necesitatea de a se stabili ecuațiile exacte (9) ce regizează un anumit fenomen, este deci de majoră importanță de a se găsi și descrieri simplificate, mai ușor abordabile, ale fenomenului. Aceasta înseamnă că \mathfrak{v} trebuie să fie înlocuită cu o altă necunoscută \mathfrak{u} (care dă eventual o descriere mai sumară a fenomenului); lui \mathfrak{B} i se substituie un alt operator \mathfrak{A} (care nu mai ține eventual seama de toate conexiunile inițial considerate); în fine, \mathfrak{q} este și el înlocuit cu un alt element \mathfrak{f} (eventual mai ușor de măsurat, de evaluat etc.). În felul acesta, ecuația (9) este înlocuită cu o ecuație aproximativă

$$\mathfrak{A}\mathfrak{u} = \mathfrak{f}, \quad (11)$$

a cărei soluție este

$$\mathfrak{u} = \mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{f}. \quad (12)$$

Se întîlnesc adesea cazuri în care operatorul invers exact \mathfrak{B}^{-1} nu există, sau în care existența sa nu poate fi demonstrată decît pentru clase de funcții puțin interesante sau rău adaptate problemei, sau în fine cazuri în care el nu poate fi construit efectiv. Înlocuirea ecuației (9) prin (11) se justifică în primul rînd în măsura în care problema construirii operatorului \mathfrak{A}^{-1} este mai simplă.

Astfel de raționamente se întîlnesc în toate ramurile mecanicii, fizicii etc. În definitiv, ele conduc la a neglija anumite aspecte ale fenomenului real (înlocuirea lui \mathfrak{v} prin \mathfrak{u} , și a lui \mathfrak{q} prin \mathfrak{f}), ceea ce conduce de asemenea și la înlocuirea anumitor raporturi mai complexe prin altele mai simple (înlocuirea lui \mathfrak{B} prin \mathfrak{A}).

Această simplificare se poate realiza pe două căi: sau se consideră numai *cazuri particulare* ale unui fenomen (de ex.: se studiază numai corpurile elastice omogene și izotrope), sau se admit anumite *descrieri simplificate* ale raporturilor dintre diferitele aspecte ale fenomenelor (de ex.: se admit relații de dependență liniară între deplasări și deformații, sau între deformații și tensiuni). Se înțelege de la sine că între aceste două puncte de vedere simplificatoare nu există o separație netă.

Să remarcăm totuși că înlocuirea ecuației (9) prin (11) este principial justificată numai în cazul în care mărimile u și v se găsesc într-un raport permițând să se afirme că u este într-un anumit sens „apropiat” de v . Pentru acest motiv, este de dorit ca, desemnând prin \mathcal{V} , \mathcal{U} mulțimile în care sînt situate mărimile v , u , aceste două mulțimi să poată fi incluse într-o mulțime mai cuprinzătoare \mathcal{M} , care să fie un *spațiu metric*. În acest caz, se va putea considera o *distanță* $\rho(u, v)$ între cele două soluții, și se va putea spune că u este acceptabil, dacă avem $\rho(u, v) \leq \varepsilon$, cu un ε suficient de mic. (Este inutil să pretindem ca ε să fie arbitrar de mic: metoda de calcul nu trebuie să încerce să depășească în precizie erorile posibile de măsurătoare, variațiile aleatoare ale fenomenului etc.)

Apoi, va trebui pusă chestiunea realizării unui algoritm pentru determinarea operatorului \mathcal{B}^{-1} , a convergenței sale, a stabilității sale etc. Acestea sînt chestiuni de analiză funcțională recent abordate de către P. Bondarenko [1].

În ce ne privește, sistemul (1)–(3) joacă aci rolul ecuației simplificate (11), unde necunoscuta u este ansamblul funcțiilor u_i , ε_{ij} , σ_{ij} . Ecuația exactă (9) ar descrie fenomenul în termenii din § 0.3, pag. 28 — care sînt deocamdată cu totul inabordabili. În schimb, se pot considera diferite probleme

$$\mathcal{A}_j u_j = f_j, \quad (13)$$

reprezentînd, toate, puncte de vedere intermediare între cel din (9) și cel din (11).

Vom da aci unele indicații asupra unor astfel de probleme, „urcînd” de la (11) la (13). Se vor putea distinge teorii mai generale din punctul de vedere al fenomenului fizic examinat, precum și teorii mai generale din punctul de vedere al descrierii matematice adoptate.

În ce privește aspectul fizic, se vorbește despre comportare *inelastică* a mediului, cu referire la orice încălcare a schemei considerate în capitolul 3. Chestiunea este tratată în detaliu în importantul articol de sinteză al lui A. Freudenthal și H. Geiringer [1]. Vezi și B. Lazan [1]; C. Zener et al. [1].

În general, trebuie să distingem între deformația *anelastică* (caracterizată prin disipare de energie mecanică datorită interacțiunii cu un flux de energie nemecanică sau cu un flux de particule materiale), deformația *visco-elastică* (disipație datorată interacțiunii cu componente fluide viscoase), în fine, deformația *plastică* (disipație provenind din frecarea internă). Combinații de astfel de fenomene complică încă mai mult tabloul final.

Cu privire la fenomenele anelastice, vezi indicațiile date de A. Freudenthal și H. Geiringer [1], §§ 15–16. Un loc important revine teoriei *termo-elasticității* (vezi B. Boley și J. Weiner [1]; o expunere elementară este dată de S. Timoshenko și J. Goodier [1], capitolul 14; vezi încă indicațiile din J. Goodier [4], § 8), precum și teoriei *corpurilor poroase* și a *corpurilor granulare*, cu prezență a mai multe faze (solidă, fluidă) (vezi M. Biot [1]; H. Deresiewicz [3], [4]; A. Lubinskii [1]; R. Mindlin [5]).

Teoria corpurilor visco-elastice (A. Freudenthal și H. Geiringer [1], §§ 17–20; §§ 27–29; §§ 32–34) consideră scheme în care fiecărui *istoric* al deformației i se asociază un *istoric* al tensiunii. Istoricul imediat al fenomenului conduce la introducerea derivatelor de primul

ordin al mărimilor studiate; mai general, se pot considera derivate de diferite ordine, și în definitiv operatori integro-diferențiali. Printre lucrările recente, vezi M. Biot [4], cap. 6; B. Coleman [2]; M. Gurtin și E. Sternberg [4]; M. Mișicu [7] (pentru teoria asimetrică); J. Radok [2]; E. Sternberg și S. Al. Khozaie [1].

În fine, cu privire la teoria (sau teoriile) plasticității, vezi § 0.3, pag. 28.

Apropiindu-ne de cadrul teoriei elasticității, cităm mai întâi studiul corpurilor în stare *hipo-elastică* (vezi § 3.6, pag. 112; pentru detalii vezi G. Grioli [3], capitolul 9; W. Prager [2], §§ 8.1–8.3; C. Truesdell și W. Noll [1], cap. D, partea IV.) Să remarcăm aci că, pentru corpurile în stare *hipo-elastică*, nu există stare nulă, iar componentele variației tensiunii depind de cele ale variației deformației, dar nu și de viteza de variație a acestora; aceasta conduce la concluzia că materialele *hipo-elastice* nu sînt viscoase. Deformația *hipo-elastică* este reversibilă și, dacă se consideră numai mici deformații în vecinătatea unei stări fără tensiuni, se ajunge pur și simplu la cazul corpurilor elastice.

Pentru raporturile între corpurile *hipo-elastice*, elastice, și hiper-elastice (în teorie neliniară), vezi B. Bernstein [1]; W. Noll [2]; W. Prager [2], capitolele 8–10; C. Truesdell [2]; C. Truesdell și W. Noll [1], cap. D.

Metode apropiate de cele ale teoriei elasticității sînt folosite în *teoria dislocațiilor*, care se dovedește a fi un domeniu de contact important între teoria elasticității și teoria plasticității. Vezi B. Bilby [1]; J. Friedel [1]; E. Kröner [4]–[7]; E. Kröner și A. Seeger [1]; L. Landau și L. Lifșitș [1], capitolul 4; A. Seeger [1], capitolul C; V. Volterra și E. Volterra [1]. Vezi de asemenea indicațiile din § 6.10, pag. 407. Pentru studiul mediilor cu microstructură (cu modificare a ipotezei mediului continuu) vezi I. Kunin [1]; R. Mindlin [6]; M. Mișicu [8], [9].

O imensă literatură este consacrată *teoriei neliniare* a elasticității. Cităm, ca un minimum de indicații, monografiile lui A. Eringen [1]; I. Goldenblatt [1]; A. Green și W. Zerna [1], capitolele 3 și 4; A. Green și J. Adkins [1]; G. Grioli [3], capitolele 4, 5 și 7; D. Kutilin [1]; F. Murnaghan [2]; V. Novojilov [1], [3]; C. Pearson [2], capitolul 10; W. Prager [2], capitolele 9 și 10; L. Sedov [2]; A. Signorini [3]; marile articole ale lui C. Truesdell [1]; C. Truesdell și W. Noll [1], cap. D; C. Truesdell și R. Toupin [1]; articolele de sinteză ale lui J. Adkins [3]; T. Doyle și J. Ericksen [1]; R. Rivlin [1]; lucrările lui V. Bondar [1]; R. Hill [1]; M. Mișicu [1]; B. Seth [1]; A. Signorini [1], [2]; S. Zahorski [1]; etc.

Pentru *teoria asimetrică* a elasticității (§ 2.1, pag. 63), vezi E. și F. Cosserat [4], capitolul 4; A. Green și R. Rivlin [1], [2]; G. Grioli [3], capitolul 10; R. Mindlin [7]; R. Mindlin și H. Tiersten [1]; M. Mișicu [7]; V. Palmov [4], [6]; G. Savin [2]; R. Toupin [1], [2].

Pentru studiul corpurilor elastice *anizotrope*, vezi indicațiile din J. Goodier [4], § 7; articolul de sinteză al lui M. Fridman [1]; monografiile lui A. Green și W. Zerna [1], capitolele 6, 7 și 9; S. Lehnitki [1], [2]; A. Love [1], capitolul 6; J. Nye [1]; W. Voigt [2].

Pentru corpurile elastice *neomogene*, vezi articolul informativ al lui Z. Hashin [1]; vezi și lucrările lui J. Eshelby [1]; V. Lomakin [1]; J. Molyneux și M. Beran [1]; J. Nowinski și S. Turskii [1]; W. Olszak [2]; W. Olszak și J. Rychlewski [1]; V. Palmov [5]; N. Rostovțev [7].

Mai menționăm aci problemele speciale ale *aero-elasticității* — care se ocupă de corpuri și solicitări de tipul celor ce intervin în mișcarea avioanelor; vezi articolul informativ al lui R. Bisplinghoff [1].

Pentru a termina, mai amintim că problemele generale ale mecanicii mediilor continue deformabile sînt tratate pentru diferite tipuri de corpuri, din puncte de vedere diferite și la nive-

luri diferite de complexitate, în lucrări ca cele ale lui M. Biot [4]; P. Germain [1]; W. Prager [2]; Iu. Rabotnov [2]; L. Sedov [2]; C. Truesdell și W. Noll [1]; C. Truesdell și R. Toupin [1] (vezi aci clasificarea și analiza din §§ 293–305).

În ce privește toate indicațiile de mai sus, s-ar putea remarca faptul că ipotezele *a*–*e* din § 0.4, pag. 29, sînt comune aproape tuturor acestor tipuri de probleme; generalizările provin în primul rînd din renunțarea la ipotezele *d* și *e*; în ce privește ipotezele de la *f* la *j*, unele din ele depind de schema fizică aleasă, pe cînd altele reflectă numai simplificări de natură matematică (cum este de ex. cazul celor două ipoteze de liniaritate; pentru această din urmă chestiune, vezi P. Germain [1], §§ 5.1–5.4).

§ 2. PUNCTE DE VEDERE. METODE DE STUDIU. PROBLEME FUNDAMENTALE

a) Puncte de vedere asupra studiului sistemului de ecuații ale elasto-staticii

Pentru studiul sistemului (1.1)–(1.3), se pot lua în considerare (deocamdată) două metode. (O a treia va fi examinată în § 6.)

Metoda directă. Se cunosc: configurația corpului, coeficienții elastici ai materialului, și datele acțiunii exterioare (forțe de volum, și forțe sau deplasări sau alte date la limită). Se cere să se determine starea elastică a corpului (vectorul u , tensorii E și Σ).

Metoda inversă. Se cunosc: starea elastică a corpului și — în parte — configurația sa, coeficienții elastici, datele acțiunii exterioare. Se cere să se determine elementele încă necunoscute relative la acțiunea exterioară, coeficienții elastici, forma corpului.

Trebuie spus că și acest mod de a privi lucrurile este încă destul de depărtat de realitate. Într-adevăr, ceea ce cere practica, este de a putea determina dintr-un punct de vedere optimal *forma* corpului destinat a suporta o anumită solicitare, *materialul* de utilizat, *tehnologia* de adoptat. În etapa actuală, aceasta este adesea o chestiune de intuiție și imaginație inginerască, care este numai *urmată* de o *verificare* a proprietăților mecanice garantate de soluția propusă.

Lucrări tinzînd spre adoptarea unor criterii precise de *alegere optimă* sînt datorate școlilor lui W. Prager (criteriul greutatei minime a corpului), I. M. Rabinovici (criteriul egalei rezistențe a părților corpului), Z. Wasiutinski (criteriul energiei de deformare minime pentru un volum dat). Din păcate, majoritatea rezultatelor existente pînă azi se referă numai la teoria sistemelor de bare. Discuții critice ale chestiunii, urmate de indicații bibliografice vaste, aparțin lui M. Reitman și G. Shapiro [3]; Z. Wasiutinski și A. Brandt [1]. Vezi și I. M. Rabinovici [1]; V. Komarov [1]; T. Mura et al. [1].

O „teorie optimă” a elasticității este azi încă numai un ideal îndepărtat. Ceea ce se poate totuși face, este de a se evita ca o parte a corpului elastic să „lucreze” în condiții de suprasarcină, în timp ce altă parte să nu fie decît prea puțin solicitată. Întrucît este evident că proprie-

tățile de rezistență ale ansamblului sînt, în mare măsură, determinate de rezistența părților sale cele mai slabe, cele mai solicitate, — se vede că este foarte important să știm să determinăm, cel puțin pentru un corp de formă dată și alcătuit din materiale cu proprietăți prescrise, zonele de creștere importantă a tensiunilor față de anumite valori medii. Aceste zone se numesc zone de *concentrări ale tensiunilor* și ele apar adesea în vecinătatea punctelor de aplicare ale unor sarcini concentrate, și a punctelor de modificare bruscă a configurației geometrice sau mecanice a corpului (de ex. în vecinătatea cavităților interioare, a discontinuităților tangentei sau planului tangent la frontieră, a suprafețelor sau curbilor de discontinuitate a proprietăților mecanice ale materialului etc.).

O evaluare cantitativă a fenomenului poate fi dată cu ajutorul *coeficientului de concentrare a tensiunilor*, care este raportul dintre o mărime caracteristică (de ex., tensiunea tangențială maximală, sau energia de distorsiune maximală etc.) în zona de concentrare — și o valoare medie a mărimii corespunzătoare în ansamblul corpului, sau într-o anumită parte caracteristică a acestuia, sau în fine în corpul considerat în absența factorului care a cauzat apariția fenomenului de concentrare a tensiunilor (de ex., în absența unei cavități sau discontinuități a tangentei la frontieră etc.).

Pentru studiul acestei importante probleme, vezi monografia lui H. Neuber [2] și articolul informativ al lui E. Sternberg [2]. Vezi de asemenea indicațiile din § 7.1, pag. 512. Vom examina chestiunea în anumite exemple din capitolele 5, 6 și 8.

Cercetarea sistemului de ecuații din punctul de vedere al metodei inverse este elementară. Nu se pun probleme de existență sau unicitate a soluției. Această metodă prezintă uneori utilitate practică: de pildă, în determinarea experimentală a coeficienților elastici.

Dacă ne-am putea da *toate* tipurile de funcții u_i , *toate* domeniile ocupate de corpuri cu coeficienți elastici aleși în *toate* modurile posibile — am putea regăsi *toate* cazurile de încărcare imaginabile. Desigur, aceasta este cu neputință. Dar chiar și cunoașterea unui număr restrîns de soluții obținute pe linia metodei inverse, a jucat în teoria elasticității un rol analog celui al „dicționarului” de funcții primitive în calculul integral.

b) Metoda directă. Probleme fundamentale

Rezolvarea sistemului (1.1) — (1.3) pe linia metodei directe constituie chestiunea esențială a teoriei. Pentru a o putea aborda, trebuie să cunoaștem configurația geometrică a corpului \mathcal{V} , coeficienții elastici c_{ij}^{hk} , forțele de volum F , și anumite condiții la limită. Vom reține aci numai cele mai simple și mai importante condiții la limită, cărora le vor corespunde cele *patru probleme fundamentale*:

1° *Problema lui Dirichlet*: date fiind configurația geometrică, coeficienții elastici, forțele de volum și *valoarea la limită* (pe frontieră) a *vectorului deplasare*, se cere să se determine starea elastică a corpului.

Notînd cu $u|_{\mathcal{S}}$ valorile la limită pe \mathcal{S} ale lui u , avem deci

$$u|_{\mathcal{S}} = g, \quad (1)$$

unde g este un vector, funcție de punct, cunoscut pe \mathcal{S} . Porțiunile de pe \mathcal{S} pe care $g = 0$ se zic a fi *fixe*.

2° *Problema lui Neumann*: date fiind configurația geometrică, coeficienții elastici, forțele de volum și valoarea la limită a vectorului tensiune, se cere să se determine starea elastică a corpului.

Introducînd relațiile (1.1) în (1.3) și pe acestea în (2.3.3), rezultă că σ_n poate fi obținut prin aplicarea unui operator diferențial liniar de primul ordin asupra lui u : de aceea vom scrie $\sigma_n(u)$. Pentru expresia sa explicită, vezi (7.1.9).

Cu aceasta, condiția la limită a problemei lui Neumann devine

$$\sigma_n(u)|_{\mathcal{S}} = f, \quad (2)$$

unde f este un vector, funcție de punct, cunoscut pe frontieră. Porțiunile de pe \mathcal{S} pe care $f = 0$ se zic a fi *libere*.

3° *Problema mixtă*: date fiind configurația geometrică, coeficienții elastici, forțele de volum și valoarea la limită a vectorului deplasare pe o parte \mathcal{S}' a frontierei, și valoarea la limită a vectorului tensiune pe restul \mathcal{S}'' al frontierei, se cere să se determine starea elastică a corpului.

Condiția la limită se scrie deci

$$u|_{\mathcal{S}'} = g, \quad \sigma_n(u)|_{\mathcal{S}''} = f \text{ pentru } \mathcal{S}' \cup \mathcal{S}'' = \mathcal{S}, \quad \mathcal{S}' \cap \mathcal{S}'' = \emptyset. \quad (3)$$

Este vizibil că (3) conține drept cazuri particulare pe (1) și (2).

4° *A patra problemă fundamentală*: date fiind configurația geometrică, coeficienții elastici, forțele de volum și valoarea la limită a expresiilor

$$a_{ij} \sigma_{nj}(u)|_{\mathcal{S}} + b_{ij} u_j|_{\mathcal{S}} = c_i, \quad (4)$$

unde a_{ij} , b_{ij} , c_i sînt funcții de punct, cunoscute pe frontieră — se cere să se determine starea elastică a corpului.

În mod evident, cea de a patra problemă fundamentală conține drept cazuri particulare pe primele trei. În afară de aceasta, ea cuprinde și alte cazuri — de mare importanță — în care de exemplu pe anumite porțiuni ale frontierei sînt date unele din componentele tensiunii și unele din cele ale deplasării.

În (1)–(4), valorile la limită se înțeleg în sensul din (1.1.6)–(1.1.8).

OBSERVAȚIA 1. În numeroase lucrări se vorbește despre „prima” și „a doua” problemă fundamentală. Preferăm denumirile date, similare celor folosite în teoria ecuațiilor de tip eliptic. Totuși, denumirea de „problemă Neumann” e abuzivă: operatorul $\sigma_n(u)$ nu este nici măcar un operator de derivare oblică, astfel că (2) nu este o generalizare nemijlocită a condițiilor curente din teoria ecuațiilor de tip eliptic. (Vezi (7.1.9). Vezi și C. Miranda [1], § 1.4.)

OBSERVAȚIA 2. Condițiile (1)–(4) sînt condițiile la limită ale problemei în ansamblul ei. Cunoașterea altor date la limită ar fi sau superfluă, sau contradictorie (vezi § 5). Dacă se rezolvă ecuațiile în tensiuni, componentele deformației se obțin prin operații aritmetice, după care componentele deplasării se găsesc prin integrarea ecuațiilor geometrice. Acest sistem se integrează fără nici un fel de noi condiții la limită: într-adevăr, componentele deplasării se deduc sub forma unor integrale definite, independente de drumul de integrare.

Aceeași observație rămîne desigur valabilă și pentru ecuațiile fizico-geometrice.

c) Liniaritate. Superpoziția efectelor

Să considerăm — pentru un același corp — două sisteme de solicitări exterioare (forțe de volum, și date la limită). Să atribuim tuturor cantităților (date și necunoscute) relative la aceste stări, câte un indice⁽¹⁾, respectiv⁽²⁾. Să considerăm acum datele (problemă mixtă)

$$F_i = a_1 F_i^{(1)} + a_2 F_i^{(2)}, \quad f_i = a_1 f_i^{(1)} + a_2 f_i^{(2)}, \quad g_i = a_1 g_i^{(1)} + a_2 g_i^{(2)}. \quad (5)$$

Ținînd seama de faptul că sistemul (1.1)–(1.3), precum și condițiile (1)–(4), conțin numai operații liniare (întregi sau diferențiale) asupra componentelor stării elastice, se vede ușor că cantitățile

$$u_i = a_1 u_i^{(1)} + a_2 u_i^{(2)}, \quad \varepsilon_{ij} = a_1 \varepsilon_{ij}^{(1)} + a_2 \varepsilon_{ij}^{(2)}, \quad \sigma_{ij} = a_1 \sigma_{ij}^{(1)} + a_2 \sigma_{ij}^{(2)} \quad (6)$$

formează un sistem coerent de mărimi caracterizînd o stare elastică (adică, sumele ε_{ij} sînt tocmai deformațiile ce corespund deplasării-sumă u_i ; iar sumele σ_{ij} sînt chiar tensiunile ce corespund deformațiilor-sumă ε_{ij}), și anume chiar starea corpului supus solicitării-sumă din (5).

Rezultatul constituie *teorema superpoziției efectelor*. El este de același tip cu principiul superpoziției deformațiilor (vezi § 1.3, pag. 40), care apare acum drept un caz particular al acesteia. Importanța sa practică este considerabilă: ea permite să se obțină soluția în numeroase probleme prin descompunerea solicitării (de volum și superficiale) în componente mai simple și prin studierea separată a problemelor parțiale obținute.

d) Regularitatea soluțiilor

Însăși structura ecuațiilor elasticității obligă să căutăm soluții $u \in C^2(\mathcal{V})$ (vezi §A.1), pentru a se asigura continuitatea forțelor de volum, condiție cu sens fizic ușor de înțeles. Mai departe, pentru ca condițiile (1)–(4) să aibă sens, trebuie ca componentele σ_{ij} și u_i să poată fi prelungite prin continuitate pe \mathcal{S} . (Prezența cosinuşilor directori ai normalei n

în expresia componentelor σ_{ni} poate genera discontinuități în punctele singulare ale frontierei.)

În cele ce urmează, vom căuta în general soluția în clasele

$$u_i \in C^2(\mathcal{V}) \cap C^0(\mathcal{V} + \mathcal{S}), \quad \sigma_{ni} \in C^1(\mathcal{V}) \cap C^0(\mathcal{V} + \mathcal{S}); \quad (7)$$

pentru aceasta vom admite numai date la limită *continue* pentru deplasări, sau avînd cel mult discontinuități de prima speță pentru tensiuni. Astfel de soluții se vor numi *regulate*, iar relațiile (7) vor fi presupuse a priori verificate.

Dacă \mathcal{V} nu este mărginit, datele (1)–(4) și presupunerea (7) nu sînt îndestulătoare, și trebuie completate prin anumite condiții la infinit. Chestiunea a fost examinată în detaliu de M. Gurtin și E. Sternberg [2]; V. Kupradze [2], capitolul 3. (Pentru problema similară în studiul ecuației lui Laplace, vezi de exemplu A. Tihonov și A. Samarskii [1], § 4.2.)

Din punct de vedere mecanic, este de așteptat ca deplasările și tensiunile produse de o sarcină ce acționează pe o porțiune finită a corpului să tindă la zero atunci cînd distanța la un punct fix carecare tinde la infinit. *Natura* comportării la infinit a acestor mărimi rezultă din necesitatea respectării și în cazul domeniilor infinite, a anumitor teoreme fundamentale. Pentru corpuri omogene și izotrope, condițiile corespunzătoare vor fi precizate în (7.6.18).

Condițiile de regularitate se dovedesc adesea prea restrictive: ele elimină posibilitatea de a studia efectul forțelor concentrate, al modificărilor bruște de configurație a frontierei, al discontinuităților proprietăților elastice etc. Ca și în teoria ecuației lui Laplace (vezi de ex. S. Sobolev [2], capitolul 2, și [3], § 22.2), se pot studia soluții *generalizate* ale ecuațiilor elasticității, definind operatorii diferențiali într-un sens generalizat, acceptînd condiții la limită mai puțin restrictive, sau renunțînd la unele din condițiile de regularitate. Pentru indicații, vezi de exemplu S. Mihlin [3], §§ 33 și 34.

În fine, rezultatele teoriei distribuțiilor, care-și găsesc deja aplicații esențiale în teoria ecuațiilor cu derivate parțiale (vezi L. Schwartz [1], [2]; vezi și I. Gelfand și G. Șilov [1], volumul 1, §§ 2.4 și 3.2; volumul 3, § 4.8; vezi mai departe indicațiile din § A.2), pot fi utilizate pentru studiul ecuațiilor elasticității.

În etapa actuală, acestea nu sînt încă probleme *specifice* de teoria elasticității; de aceea, în cartea de față ne vom ocupa în principiu numai de soluții regulate în sensul din (7), eventual cu condițiile suplimentare (7.6.18); vom considera de asemenea unele soluții cu singularități, care pot fi obținute pe căi relativ elementare (vezi de ex. §§ 7.8 și 9.5).

e) Metode experimentale și altele

Lipsa de soluții exacte a problemelor fundamentale, sau caracterul greu utilizabil în practică al acestora, obligă adesea în tehnică la folosirea unor metode aproximative insuficient justificate, ceea ce duce inevitabil la coeficienți de siguranță exagerați, la soluții insuficient de fine etc. Totodată, aceasta obligă la dezvoltarea — în paralel cu studiul teoretic exact — a meto-

delor experimentale și aproximative tinzind spre abordarea aceluiași probleme. (Vezi D. Drucker [1].)

Studiul teoretic al ecuațiilor elasticității este de aceea strâns legat de diferite aspecte experimentale: încercări de materiale, măsurători directe ale tensiunilor și deformațiilor pe corpul supus cercetării (sau pe un model convenabil redus), analogii mecanice sau electrice etc. (Orice fenomen descris de aceleași ecuații și aceleași condiții la limită ca o anumită problemă de teoria elasticității, constituie un analog pentru aceasta din urmă. Existența de astfel de analogii dovedește forța unificatoare a metodelor matematice. Totodată, acela dintre fenomenele analoge care permite o cercetare experimentală mai simplă, joacă rolul de etalon pentru studiul celorlalte).

În ce privește tehnica experimentală, mașinile de încercări mecanice, indicații bibliografice de experiențe, — vezi de exemplu N. Beliaev [1]; C. Mc. Gregor [1]; A. Iliușin și V. Lenskii [1], capitolul 8; J. Marin [1].

Pentru diferitele metode experimentale, analogii, modele, vezi A. Durelli et al. [1], și mai ales M. Hetenyi [1] (unde — printre altele — notăm articolele lui J. Goodier [2]; M. Hetenyi [2], [3]; R. Mindlin și M. Salvadori [1]; J. Wilbur și C. Norris [1]). Vezi și monografia lui M. Kirpicev [1] și articolul de sinteză al lui W. Soroka [1].

În chestiunea modelării electrice, vezi L. Gutenmaher [1]; G. Puhov [1]; B. Volinskii și V. Buchman [1]; vezi și Th. Higgins [6] (cu o bogată bibliografie).

Asupra analogiei membranei și a metodei fotoelasticimetrice, ne vom opri în §§ 5.16 și 5.20, respectiv § 6.13.

Pentru chestiunea coeficienților de siguranță, vezi V. Bolotin [2].

Pentru diferite metode aproximative vezi indicațiile de la finele § 4.

§ 3. CRITERII DE REZISTENȚĂ

Formularea problemelor fundamentale reprezintă desigur o schemă puternic abstractizată a chestiunii. Telurile nemijlocit aplicative ale mecanicii cer însă răspuns la alte întrebări: ele cer să se clarifice dacă, date fiind anumite informații asupra unui corp, tensiunile, deformațiile, deplasările ce apar în urma aplicării sarcinii nu periclitizează în ansamblu construcția, mașina etc. în alcătuirea căreia el intră.

Pentru aceasta, este necesar să se verifice mai întâi dacă tensiunile, în porțiunea și după direcția cea mai primejduită, nu depășesc anumite limite — ceea ce reprezintă verificarea *la rezistență*, din punctul de vedere al *tensiunilor admisibile*.

Adesea, chiar dacă aceste limite sînt depășite (mai ales prin apariția de deformații plastice), corpul în ansamblu continuă să-și îndeplinească rolul. De aceea se poate adopta punctul de vedere al calculului *sarcinilor admisibile* pentru corpul dat (sau un ansamblu de corpuri), verificîndu-se astfel *capacitatea portantă* a acestuia. Rezultatele obținute în acest mod conduc la o proiectare mai judicioasă — dar pretind o analiză foarte exactă.

În fine, întrucît se poate ca un corp deformabil să înceteze de a-și mai juca rolul, nu datorită distrugerii sale, ci prin apariția de deformații

sau deplasări incompatibile cu acest rol, trebuie avut în vedere și calculul *deformației admisibile*, ceea ce constituie verificarea la *rigiditate*.

Dacă soluția problemelor fundamentale este cunoscută, aceasta permite să se dea răspuns și problemelor aplicative enumerate. Dar chestiunea *criteriilor* după care trebuie să apreciem dacă un corp rezistă sau nu sarcinii, este desigur independentă de faptul dacă dispunem sau nu de soluția matematică a problemei considerate.

Ne vom mărgini la a considera aici unele puncte de vedere referitoare la chestiunea rezistenței locale a corpurilor. Cunoscute sub numele de *criterii de rezistență*, acestea au, sub aspectul fundamentării lor, un pronunțat caracter fizic. Deși nu aparțin în fapt teoriei elasticității, prezentăm aci pe scurt unele din aceste criterii, pentru a da o idee asupra chestiunii și a preciza limitele de valabilitate ale soluțiilor pe care teoria elasticității le poate furniza.

Toate aceste criterii conduc la a stabili anumite combinații de componente ale stării elastice (în special componente ale tensiunii) și anumite valori critice ale acestora. Dacă într-un punct valoarea critică nu este atinsă, corpul se află în acel punct în zona elastică; dacă ea este atinsă sau depășită, corpul trece în acel punct în zona plastică (în acest caz vorbim despre *criterii de plasticitate*); dacă corpul este casant, atunci apar fisuri și alte indicii de distrugere (în acest caz vorbim despre *criterii de rezistență*).

Chestiunea prezintă interes nu numai din punctul de vedere al aplicațiilor, ci și pentru stabilirea unor căi de generalizare la cazul tridimensional a noțiunii atât de simple de limită de plasticitate sau de limită de rezistență din cazul unidimensional (vezi § 0.2).

1° *Criteriul tensiunii normale maximele*. Se propune drept stare-limită, acea stare în care cea mai mare (în valoare absolută) dintre componentele normale ale tensiunii atinge o valoare critică dată. Acest punct de vedere își găsește justificare mai ales la distrugerea prin separare (smulgere) a corpurilor casante supuse la întindere.

2° *Criteriul deformației maximele*. Se propune drept limită, atingerea unei anumite valori critice de către deformația de alungire. Pentru un corp izotrop, ținând seama de legea lui Hooke sub forma (3.4.19) și notînd cu σ_1 pe cea mai mare (în valoare absolută) dintre tensiunile principale, aceasta revine la a stabili anumite limite pentru „tensiunea redusă” $\sigma_1 - \nu (\sigma_2 + \sigma_3)$.

Aceste două criterii intră frecvent în contradicție cu datele experimentale, mai cu seamă pentru că ele nu pot ține seama de faptul că majoritatea materialelor rezistă în bune condițiuni la solicitări hidrostatice extrem de mari, rămînînd totuși în zona elastică. Este de aceea firească trecerea la utilizarea unor criterii care să țină seama — sub diferite forme — nu de componentele tensiunii, ci de *diferențe* de astfel de componente; aceasta elimină automat eventualele presiuni hidrostatice, aduce pe primul plan deviatorul tensiunii, și leagă chestiunea rezistenței de chestiunea *distorsiunii*, și nu de cea a deformației în ansamblul ei.

3° *Criteriul tensiunii tangențiale maxime* (H. Tresca, B. de Saint-Venant). Se stabilește drept limită atingerea unei valori critice c de către tensiunea tangențială maximală în punctul considerat ¹⁾; ținând seama de (2.6.11), aceasta conduce deci la o relație de forma

$$T_{\max} = \pm \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_3) \leq c.$$

Să punem condiția ca această relație să rămână valabilă și în cazul întinderii epruvetei cilindrice, punctul de pornire al oricărui studiu al proprietăților mecanice ale materialelor. Întrucât în acest caz $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ (vezi (3.4.1)), de aci decurge $c = 0,5 \sigma_s$, și relația de mai sus devine

$$\sigma_1 - \sigma_3 \leq \sigma_s. \quad (1)$$

Acest criteriu presupune deci cunoscute în fiecare punct tensiunile principale (dar nu și direcțiile principale). El nu prezintă dezavantajul menționat relativ la criteriile precedente și este în linii mari confirmat de datele experimentale. Trebuie totuși subliniat faptul că el neglijează rolul componentei mediane σ_2 a tensiunii, precum și faptul că cercetarea experimentală la torsiune duce pentru constanta c nu la valoarea $0,5 \sigma_s$, ci la valori cuprinse în genere între $0,55 \sigma_s$ și $0,6 \sigma_s$.

Necesitatea de a ține seama de toate componentele tensiunii a condus pe E. Beltrami la formularea unui criteriu care stabilește drept limită de rezistență, atingerea unei valori critice de către energia unitară de deformare acumulată în material. Acest criteriu este infirmat — ca și primele două — de comportarea materialelor sub presiune hidrostatică, dar deschide drumul spre formularea unui criteriu bazat pe evaluarea acelei părți a energiei de deformare care nu depinde de presiunea hidrostatică. Astfel, se ajunge la

4° *Criteriul energiei de distorsiune maxime* (M. Huber, R. von Mises, H. Hencky). Se stabilește drept limită atingerea unei valori critice c' de către energia unitară de distorsiune W' din (3.7.25).

Această relație trebuind să rămână valabilă și în cazul epruvetei cilindrice supuse la întindere, din (3.7.25) se deduce imediat $c' = 2 \sigma_s^2$, și criteriul considerat se scrie

$$(s_{11} - s_{22})^2 + (s_{22} - s_{33})^2 + (s_{33} - s_{11})^2 + 6 (s_{12}^2 + s_{23}^2 + s_{31}^2) \leq 2 \sigma_s^2 \quad (2)$$

(unde mărimile s_{ij} pot fi evident înlocuite cu σ_{ij}).

Această formulă este simetrică și poate fi imediat transcrisă în axe principale. În cazul torsiunii sau alunecării pure (vezi (3.4.8)), se obține pentru starea-limită $c = \sigma_s / \sqrt{3} = 0,577 \sigma_s$, ceea ce concordă mai bine cu rezultatele experimentale decât valoarea $c = 0,5 \sigma_s$ obținută cu ajutorul criteriului tensiunilor tangențiale maxime (vezi (1) și (3.4.11)).

¹⁾ A nu se confunda cu c din § 3.4.

Din ultimele două criterii rezultă limpede că în cazul tridimensional *componentele tensiunii pot depăși considerabil limita de plasticitate σ_s , — datorită prezenței componentelor hidrostatice — fără ca prin aceasta corpul să iasă din zona elastică. Dar de îndată ce valorile critice din (1) sau (2) sînt depășite, este un nonsens a mai face uz de ecuațiile teoriei elasticității.*

Pentru detalii asupra criteriilor de rezistență menționate, precum și pentru studiul altor variante (în special cea a lui O. Mohr), vezi A. Nadai [1], (cap. 15 — în special § 13 — și cap. 16). Vezi de asemenea N. Beliaev [2] (cap. 8 și 38); M. Filonenko-Borodici [3]; M. Filonenko-Borodici et al. [1] (vol. 1, cap. 12); A. Iliușin și V. Lenskii [1], § 3.6; Iu. Rabotnov [2] (§§ 3.46 — 3.50; cap. 5; cap. 17). Vezi și I. Goldenblatt și V. Kopnov [1] (corpuri anizotrope). Rezultatele recente în această direcție sînt prezentate de R. Irwin [1]. Pentru importanța lor istorică, vezi și considerațiile lui A. Clebsch și B. de Saint-Venant [1], §§ 37 și 38 (inclusiv Notele finale).

Pentru problema foarte importantă a *oboselii* materialelor (rezistență la sarcini alternate, după un mare număr de cicluri), vezi A. Freudenthal [1], A. Freudenthal și E. Gumbel [1].

§ 4. DESPRE TEOREMELE DE EXISTENȚĂ

Prima întrebare ce se pune în legătură cu problemele fundamentale este următoarea : cum trebuie să fie domeniul, coeficienții elastici, forțele de volum, și datele la limită, pentru ca soluția sistemului de ecuații să existe ?

Această întrebare e departe de a proveni din dorința unei pure satisfacții logice : fără a i se da răspuns, nu putem ști dacă pentru un corp dat, solicitat într-un mod dat, starea descrisă de ecuațiile pe care le studiem este posibilă sau nu ; și în această din urmă eventualitate, este evident că orice metodă de „rezolvare” a ecuațiilor elasticității cu ajutorul unui algoritm oarecare, e un nonsens.

Amintim că în general problema teoremelor de existență este legată de cea a clasei de funcții, domenii etc., în care se caută soluția unei probleme. Începînd cu rezolvarea ecuației $a + x = b$ în numere întregi și pînă la teoria soluțiilor generalizate ale ecuațiilor cu derivate parțiale, această problemă stă pe primul plan al cercetării teoretice.

Cu titlu de exemplu, se poate observa că dacă \mathcal{V} este mărginit, $F = 0$, și forțele superficiale (date pe *întreaga* frontieră) au rezultanta sau momentul resultant diferite de zero, atunci corpul nu poate fi în echilibru.

În cazul problemei lui Dirichlet și al problemei mixte, acțiunea forțelor exterioare este echilibrată de apariția unor reacțiuni în reazime (acea parte a frontierei pe care deplasarea are valori prescrise). Întrucît în cazul problemei lui Neumann astfel de reacțiuni nu există, o condiție

necesară (nu și suficientă!) de existență a soluției pentru un domeniu mărginit și pentru $F = 0$ este

$$\iint_S \sigma_n dS = 0, \quad \iint_S x \times \sigma_n dS = 0. \quad (1)$$

Evident, pentru V nemărginit, aceste condiții nu mai sînt necesare.

Imposibilitatea de a demonstra teorema de existență într-un anumit cadru poate proveni din metoda de lucru — dar poate constitui și un indiciu asupra faptului că pentru corpul dat, în condițiile de solicitare date, ecuațiile considerate *nu descriu corect* fenomenul. Vom da exemple edificatoare în acest sens în § 5.18, pag. 287 și 294.

Aci ne mărginim la a spune că pentru a obține soluții regulate care verifică ecuațiile (1.1)–(1.3) și condițiile la limită (2.1)–(2.4), este necesar ca frontiera domeniului să fie suficient de *regulată*, fără puncte sau linii singulare; de asemenea să nu existe puncte sau linii de aplicare a unor sarcini concentrate, sau de discontinuitate a proprietăților mecanice ale materialului. (Probleme de acest tip pot fi totuși uneori studiate cu ajutorul unor procese de trecere la limită, al prelungirii soluțiilor la traversarea suprafețelor de discontinuitate a proprietăților mecanice etc.)

Pentru clase mai generale de frontiere, sarcini etc., teoremele de existență pot fi demonstrate numai cu ajutorul mijloacelor analizei funcționale.

Problema teoremelor de existență este una din cele mai dificile ale teoriei. Chiar cazul cel mai simplu — echilibrul corpurilor izotrope și omogene — este de o considerabilă complexitate. Metodele de demonstrare au urmat în mare drumul istoric al studiului ecuației lui Laplace (funcția lui Green, metoda ecuațiilor integrale, principiul lui Dirichlet).

Din imensa bibliografie a chestiunii, vezi lucrările lui I. Fredholm [1]–[3]; A. Korn [1]–[3]; G. Lauricella [3]–[5]; N. Mushelişvili [5] (cap. 5); D. Şerman [1]–[5]; — pentru metoda ecuațiilor integrale (vezi în legătură cu aceasta și F. Odqvist [1]); H. Weyl [1] — pentru metoda funcției lui Green (incluzînd și critica punctului de vedere al lui Korn). Printre lucrările recente, vezi J. Ericksen [2], [3] (care stabilește raporturi noi între problema existenței și cea a unicității); G. Fichera [1], [2]; G. Grioli [3] (cap. 5 — unde chestiunile de existență și unicitate sînt considerate pentru cazul neliniar, cu ajutorul rezultatelor corespunzătoare din teoria liniară); și în special V. Kupradze [2], [3], vaste studii cuprinzînd și cazul dinamic, unele medii neomogene și anizotrope etc.

Lucrarea fundamentală a lui D. Hilbert [1] a deschis drumul spre utilizarea mijloacelor analizei funcționale; acestea au permis obținerea de rezultate definitive prin metode profunde și relativ simple, care conduc totodată la algoritme de calcul efectiv. O amplă expunere a chestiunii este dată în monografiile lui S. Mihlin [2]–[4], pentru lectura cărora sînt necesare unele rezultate ale lui K. Friedrichs [1] și S. Sobolev [2]. (Același punct de vedere a fost reluat ulterior de B. Naimark [1].) Vezi și D. Eidus [1], [2] (problema mixtă); L. Sobolev [1] (algoritmul lui Schwarz în problema lui Dirichlet) și lucrările legate de aceasta: S. Mihlin [3], § 36; S. Kogan [1]; E. Nikolskii [1] (pentru problema lui Neumann); vezi și — pentru o formă extrem de generală a algoritmului — I. Babuska [1]; în fine, H. Weyl (metoda proiecțiilor ortogonale) și generalizarea dată acestui punct de vedere de către S. Telesman [1].

Indicăm de asemenea un punct de vedere abstract-funcțional mai nou, în lucrărilor lui W. Prager și J. Synge [1], J. Synge [1], reexpus de C. Pearson [2], capitolul 6.

Aplicațiile și critica posibilităților diferitelor metode aproximative (a lui Ritz, a lui Galerkin, a celor mai mici pătrate etc.) sînt — dintr-un punct de vedere modern — strîns legate de chestiunea existenței soluțiilor, de posibilitatea aproximării și evaluării erorii etc.

Printre monografiile consacrate special metodelor aproximative, indicăm (în afara lucrărilor lui S. Mikhlin deja citate) Chi Teh Wang [1] (cap. 6 și 7); L. Kantorovici și V. Krilov [1], (cap. 4); H. Langhaar [2] (cu o analiză detaliată a chestiunilor privitoare la ecuația lui Reissner — vezi mai jos, § 7); L. Leibenzon [2] (destul de imprecis din punct de vedere teoretic, dar conținînd un mare număr de exemple). Chestiunea convergenței diferitelor metode de tip Ritz, Galerkin etc., utilizate în asemenea probleme, este examinată de N. Polski [1], [2]. A se vedea încă și lucrările indicate în § 7, pag. 150, cu privire la metodele variaționale. Pentru diferite metode numerice, a se vedea B. A. Bondarenko [1]; D. Vainberg și A. Siniavski [1].

Trimitem încă la indicațiile din § 8, pag. 150—151, și pentru problema plană, la cele din § 6.20, pag. 481; § 6.21, pag. 487; § 6.25.

Atît din punctul de vedere clasic, cît și din cel abstract-funcțional, chestiunea teoremelor de existență și a metodelor aproximative depășește cadrul acestui volum.

§ 5. TEOREMA DE UNICITATE

Să presupunem că pe o cale oarecare am obținut un sistem de funcții u_i , ε_{ij} , σ_{ij} care satisfac atît ecuațiile (1.1)—(1.3), cît și anumite condiții la limită. Este firească întrebarea dacă aceasta este *singura* soluție posibilă a problemei. Un răspuns negativ ar însemna că sistemul considerat, împreună cu condițiile la limită însoțitoare, nu descrie *complet* fenomenul.

Problema unicității nu este banală. În special pentru corpuri care nu sînt masive (coloane zvelte, plăci plane și curbe), se poate ca, pentru anumite solicitări, două sau mai multe configurații de echilibru să fie posibile. Acest fenomen e legat de *pierderea stabilității* unei anumite configurații de echilibru.

Importanța teoretică și practică a teoremei de unicitate este foarte mare. Toate metodele ce duc la soluția unor probleme prin suprapunere de funcții astfel alese încît în definitiv să fie satisfăcute atît ecuațiile cît și condițiile la limită, se bazează tocmai pe valabilitatea ei. În particular, orice soluție găsită prin îmbinarea de soluții după metoda inversă, sau cu ajutorul așa-numitei metode semi-inverse (vezi § 6) va fi — în acest cadru — singura soluție posibilă. Chiar metodele analizei funcționale, care duc la construirea soluției ca sumă a unei serii de „funcții coordonate”, au sens (printre altele) datorită acestei teoreme. În fine, există numeroase demonstrații de existență bazate pe aplicabilitatea alternativei lui Fredholm — așadar în ultimă instanță tot pe teorema de unicitate.

Teorema de unicitate : *primele trei probleme fundamentale ale teoriei elasticității liniare pentru domenii mărginite au soluție unică, dacă potențialul elastic este o formă patrată pozitiv-definită* (G. Kirchhoff [2] și [3], § 27.2).

Să presupunem că avem de-a face cu problema mixtă și că această problemă ar avea două soluții, notate respectiv cu (1) și (2) . Ținând seama de teorema superpoziției efectelor (vezi § 2, pag. 129), soluția-diferență care se obține din (2.5), (2.6) pentru $a_1 = -a_2 = 1$, verifică ecuațiile omogene ale elasticității, pentru date la limită nule. Notînd cu u_i , ε_{ij} , σ_{ij} componentele acestei stări-diferență, avem deci

$$\sigma_{ij,j} = 0 \quad (1)$$

și

$$u|_{\mathcal{S}'} = \sigma_n(u)|_{\mathcal{S}''} = 0. \quad (2)$$

Să evaluăm pentru această soluție integrala

$$2 \iiint_{\mathcal{V}} \Phi dV = \iiint_{\mathcal{V}} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV. \quad (3)$$

Ținînd seama de simetria tensorului tensiune și de formula lui Gauss-Ostrogradskii (7.2.9), avem pe rînd

$$\begin{aligned} \iiint_{\mathcal{V}} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV &= \iiint_{\mathcal{V}} \sigma_{ij} u_{i,j} dV = \iiint_{\mathcal{V}} [(\sigma_{ij} u_i)_{,j} - u_i \sigma_{ij,j}] dV = \\ &= \iint_{\mathcal{S}_i} \sigma_{ij} u_i n_j dS - \iiint_{\mathcal{V}_i} \sigma_{ij,j} u_i dV, \end{aligned} \quad (4)$$

adică, în virtutea relațiilor (2.3.3), (1) și (2):

$$2 \iiint_{\mathcal{V}} \Phi dV = \iint_{\mathcal{S}} \sigma_n(u) \cdot u dS - \iiint_{\mathcal{V}} \sigma_{ij,j} u_i dV = 0. \quad (5)$$

Dacă Φ este continuă (pentru aceasta, este suficient ca $u_i \in C^1(\mathcal{V})$, $\varepsilon_{ij} \in C^0(\mathcal{V})$) și pozitiv-definită, urmează $\Phi \equiv 0$, și deci

$$\varepsilon_{ij} \equiv 0, \quad \sigma_{ij} \equiv 0 \quad \text{în } \mathcal{V}. \quad (6)$$

Soluția-diferență descrie deci o deplasare rigidă, și avem

$$\varepsilon_{ij}^{(1)} = \varepsilon_{ij}^{(2)}, \quad \sigma_{ij}^{(1)} = \sigma_{ij}^{(2)}. \quad (7)$$

Eventuala deplasare rigidă este de asemenea nulă în cazul problemei Dirichlet și al problemei mixte. Dimpotrivă, în problema lui Neumann, soluția este unic determinată numai abstracție făcînd de o roto-translație rigidă infinitezimală, caracterizată de 6 parametri. Putem asigura și aci unicitatea, impunînd condiții suplimentare care să permită reținerea, uneia din soluțiile posibile. Aceste condiții pot fi de exemplu de forma, apropiată de (4.1):

$$\iiint_{\mathcal{V}} u dV = \iiint_{\mathcal{V}_1} x \times u dV = 0. \quad (8)$$

Teorema de unicitate rămâne valabilă pentru *orice* condiții la limită pentru care soluția-diferență satisface egalitatea

$$[\sigma_n(u) \cdot u]|_{\mathcal{S}} = 0. \quad (9)$$

Cu referire la a patra problemă fundamentală, aceasta impune anumite condiții coeficienților a_{ij} , b_{ij} .

Teorema își păstrează valabilitatea pentru \mathcal{V} nemărginit, pentru soluții care satisfac anumite condiții suplimentare la infinit (vezi M. Gurtin și E. Sternberg [2]; R. Knops [1]).

Teorema de mai sus constituie în fond un caz particular de teoremă de unicitate pentru sisteme de ecuații eliptice oarecari, sisteme pentru care soluția problemei omogene, cu anumite date la limită omogene, rezultă a fi nulă. (Vezi de ex. C. Miranda [1], cap. 1.) Caracterul de elipticitate al ecuațiilor elasticității poate fi demonstrat pornind tocmai de la faptul că potențialul elastic Φ este o formă patrativă pozitiv-definită. (Vezi și mai departe § 12.) Aceasta impune în general anumite condiții coeficienților c_{ij}^{hk} (vezi § 3.7; vezi și — într-un cadru mai general — M. Gurtin [1]).

În particular, din rezultatul din § 3.7, pag. 119, decurge următorul corolar: *primele trei probleme fundamentale ale elasticității liniare pentru corpuri izotrope (eventual neomogene), au soluții unice.*

Teorema lui Kirchhoff a fost generalizată (pentru corpuri izotrope) de T. Boggio [1]. Recent, M. Gurtin și E. Sternberg [1] au obținut rezultate noi. Astfel, pentru problema lui Dirichlet, unicitatea este asigurată dacă $\mu \neq 0$, $\nu \in \left] \frac{1}{2}, 1 \right]$. Rezultatele au fost extinse de aceiași autori, în [3], la cazul problemelor dinamice (vezi și M. Gurtin și R. Toupin [1]). Chestiunea a fost reluată de J. Bramble și L. Payne [1] — [3], care ajung la concluzia că, pentru unele proprietăți speciale ale frontierei, unicitatea este asigurată, dacă $\mu \neq 0$, și $\nu \in \left] \frac{1}{2}, 1 \right]$ (problema lui Dirichlet); $\nu \in]-1, 1 - 0,5 K(1 + K)^{-1}]$, unde K este o constantă a domeniului, nulă dacă \mathcal{V} e stelat (problema lui Neumann); $\nu \in \left[-1, \frac{1}{2} \right]$ (problema mixtă).

Menționăm și rezultatele speciale ale lui R. Knops [2], [3] și extinderea teoremei de unicitate dată de E. Sternberg și R. Eubanks [2] pentru cazul prezenței de forțe concentrate.

Pentru corpuri visco-elastice, vezi lucrările lui W. Edelman și M. Gurtin [1], F. Odeh și I. Tadjbaksh [1]. Problema unicității și non-unicității (bifurcației) soluțiilor în cazul teoriei neliniare este amănunțit studiată de R. Hill [2] — [5]. Vezi și C. Truesdell și R. Toupin [2], § 8.

Existența a diferite configurații de echilibru posibil pentru bare, plăci plane și curbe etc., nu contrazice teorema de unicitate. Într-adevăr, configurația curbilinie de echilibru, caracteristică pentru fenomenul de *flambaj* care apare la depășirea unei anumite sarcini critice nu poate fi descrisă de teoria liniară, deoarece unghiurile de rotație nu mai sînt mici și de același ordin de mărime cu deformațiile (vezi § 1.10, pag. 61). Teorema

de unicitate arată numai că nu pot exista două soluții distincte în cadrul teoriei liniare.

Problema multiplicării configurațiilor de echilibru are o mare însemnătate practică, întrucât copurile la care ea se observă (în special corpuri nemasive) sînt frecvent utilizate; fenomenul apare la sarcini cu mult sub cele ce produc trecerea în zona plastică sau distrugerea — și el are totdeauna efecte catastrofale.

Problemele stabilității echilibrului elastic și ale flambajului sînt studiate de N. Beliaev [2], capitolul 33 și 34; V. Bolotin [1]; M. Filonenko-Borodici et al. [1], volumul 1, capitolul 14; volumul 2, capitolele 20 și 21; A. Love [1], capitolele 18 și 19; Iu. Panovko și I. Gubanova [1], partea I; E. Popov [1]; S. Timoshenko și J. Gere [1]. Vezi și articolele lui A. Dinnik [2]; B. Galerkin [2], volumul 1; L. Leibenzon [2], volumul 1; studiile de sinteză ale lui J. Geckeler [1], capitolul 10; H. Langhaar [1]; H. Ziegler [1]. Printre lucrările mai recente, indicăm M. Beatty [1]; M. Biot [4], capitolele 3—5; J. Holden [1]; V. Manea [5]; C. Truesdell și W. Noll [1], §§ 68 bis și 89, — privitor la teoria generală, precum și articolele lui L. Eršov și D. Ivlev [1] și A. Işlinskii [1]. Vezi și indicațiile din W. Prager [2], § 10.4.

În cadrul de valabilitate al teoremei de unicitate, fenomenul deformației elastice este deci deplin descris de cele 15 ecuații (1.1)—(1.3): alte relații independente care să lege între ele mărimile ce caracterizează starea elastică, nu pot exista. Acest fapt justifică denumirea de *sistem complet* dată sistemului (1.1)—(1.3). În cadrul teoriei liniare, orice soluție a acestui sistem pentru condiții la limită de tip (2.1)—(2.3) (și unele condiții de tip (2.4)), este deci soluția unică a problemei.

§ 6. PUNCTE DE VEDERE SIMPLIFICATOARE

Cu ipotezele din § 0.4, ne aflăm deja la acea limită dincolo de care noi presupuneri ar duce la o descriere cu totul deformată a fenomenului real. Și totuși, rezolvarea problemelor fundamentale ale teoriei elasticității rămîne dificilă și nu a putut fi obținută efectiv decît pentru destul de puține cazuri.

Dificultățile provin atît din marele număr de funcții și relații, cît și din complexitatea condițiilor la limită. Examinînd posibilitatea de a le depăși, B. de Saint-Venant a fost condus la formularea a două puncte de vedere simplificatoare extrem de fertile: *metoda semiinversă* și *principiul lui Saint-Venant*.

a) Metoda semiinversă

În perioada de elaborare a bazelor teoriei elasticității (începutul secolului al XIX-lea) fuseseră neglijate metodele mai simple ale lui Euler, Bernoulli și alții. Aceștia puseseră temeliile Rezistenței Materialelor pornind nu de la relații generale verificate în masa corpului, ci de la anumite schematizări ale acestuia și de la evaluarea (adesea inspirată de practică)

a mărimilor ce caracterizau starea sa. Desigur, puteau fi studiate astfel numai corpuri de formă destul de simplă (bare, plăci), supuse unor sarcini destul de simple, pentru a putea reduce problema la studiul comportării anumitor linii sau plane în care e presupusă concentrată toată masa corpului, pentru a „întui” aspectul anumitor componente ale deplasării sau tensiunii etc.

Saint-Venant a reluat această tehnică în modul următor. Să presupunem că datele de care dispunem ne permit să neglijăm unele componente ale stării elastice a corpului, sau să facem unele presupuneri asupra valorii lor. *Dacă aceste presupuneri simplificatoare sînt compatibile cu sistemul complet de ecuații și condiții la limită*, atunci numărul funcțiilor și al ecuațiilor poate fi redus în mod corespunzător. Soluția sistemului astfel redus, împreună cu funcțiile a căror valoare am stabilit-o dinainte din alte considerații, dă — în virtutea teoremei de unicitate — însăși soluția problemei.

Metoda a fost elaborată de Saint-Venant în studiul problemei torziunii și încovoierii barelor cilindrice (vezi A. Clebsch și B. de Saint-Venant [1], notă finală la § 22). Aceasta a constituit prima aplicare importantă a ecuațiilor generale ale elasticității.

Faptul că relațiile astfel introduse trebuie verificate din punctul de vedere al compatibilității lor cu ecuațiile și cu condițiile la limită (și eventual corectate în urma acestei verificări) deosebește metoda semiinversă de metodele de simplificare curent folosite în rezistența materialelor.

Utilizarea de soluții eventual aproximative, parțial cunoscute, uneori cu precizarea și modificarea lor ulterioară, dă conținutul concret al metodei și o deosebește de simpla idee de rezolvare a ecuațiilor „din aproape în aproape”.

Privitor la chestiunea metodelor inverse și semiinverse vezi și P. Nemenyi [2].

b) Principiul lui Saint-Venant

Se poate întîmpla ca soluția sistemului (1.1)–(1.3) să fie relativ ușor de găsit pentru anumite date la limită, și dimpotrivă, să nu poată fi obținută pentru alte date, numai cu puțin diferite de primele.

Ideea firească a dependenței continue a soluției față de condițiile la limită (vezi § 7.4) sugerează ca probabil faptul că modificări infinitezimale ale datelor la limită sînt permise; dar astfel de modificări nu ne sînt aci de mare utilitate.

Să presupunem însă că modificăm *finit* forțele superficiale aplicate pe o porțiune a frontierei, păstrînd totuși aceeași *rezultantă* și *moment rezultant*. Evident, o astfel de operație nu este în general permisă ²⁾.

²⁾ Astfel, nu este indiferent dacă o sarcină de întindere e aplicată pe baza unei epruvete, pe suprafața ei laterală, sau aproape de cealaltă bază. Vectorii tensiune sînt vectori legați, și operația „torsor” nu are în teoria elasticității importanța exhaustivă din mecanica rigidului.

Experiența arată însă că :

Un sistem de forțe static echivalent cu zero aplicat pe o porțiune a frontierei, de diametru comparabil cu cea mai mică dintre dimensiunile corpului, produce deplasări, deformări și tensiuni apreciabile numai la distanțe de același ordin de mărime cu diametrul considerat.

În aceste condiții, putem deci înlocui un sistem de sarcini superficiale cu alt sistem static echivalent lui, provocând perturbări numai local sensibile ale stării elastice. Altfel spus, *principiul lui Saint-Venant poate fi privit ca un fel de teoremă de unicitate generalizată.*

Principiul a fost elaborat de către B. de Saint-Venant tot în studiul problemei torsiunii și încovoierii barelor, presupunând că dimensiunile bazei solicitate sînt mici în raport cu lungimea barei (vezi A. Clebsch și B. de Saint-Venant [1], § 28, și notele finale la §§ 22 și 28).

Saint-Venant sugerează și următoarea experiență simplă : trăsînd pe un cilindru de cauciuc un sistem de generatoare și cercuri paralele și stringînd acest cilindru cu un clește (sistem static echivalent cu zero), obținem tensiuni locale mari (putînd duce la secționarea cilindrului), în timp ce la distanțe relativ mici de zona de aplicare a sarcinii, rețeaua de cercuri și generatoare rămîne vizibil nedeformată.

O formulare a principiului, depășind cadrul problemei cilindrului lung, este datorată lui J. Boussinesq [2] : „*Un sistem de forțe exterioare static echivalent cu zero acționînd asupra unui corp elastic și avînd punctele de aplicație situate în interiorul unei sfere date, nu produce deformări sensibile la distanțe de această sferă, suficient de mari în raport cu raza ei.*”

Nu există încă o „demonstrație” a principiului — dar verificările experimentale par să-l confirme sistematic. (Vezi de ex. M. Frocht [1], vol. 2, § 1.16.) Pentru diferite încercări de demonstrare a principiului sub forma sa clasică, vezi de exemplu C. Biezeno și R. Grammel [1], § 2.2, pct. 7 ; J. Goodier [1] ; lord Kelvin și P. Tait [1], pct. 728—729 ; M. Lévy [1] ; S. Timoshenko și J. Goodier [1], §§ 18 și 47 ; O. Zanaboni [1].

R. von Mises [1] a dat o critică și o formulare mai precisă a principiului ; în particular, el a atras atenția asupra faptului că, în cazul unui corp mărginit, pentru a se putea compara efectul unei sarcini static echivalente cu zero cu cel al unei sarcini ce nu posedă această proprietate, trebuie să considerăm cel puțin două regiuni solicitate pe frontieră. Ulterior, E. Sternberg [1] a dat o demonstrație a principiului, formulat astfel : „Să presupunem că sarcinile care acționează asupra unui corp elastic sînt aplicate numai asupra anumitor porțiuni ale frontierei, fiecare din acestea fiind interioară unei sfere de rază ρ , și că densitățile acestor sarcini rămîn finite pentru $\rho \rightarrow 0$. În acest caz, tensiunile în orice punct fix interior corpului sînt de un ordin de mărime mai mic în raport cu ρ , pentru $\rho \rightarrow 0$, dacă sarcina pe fiecare porțiune solicitată a frontierei formează un sistem echivalent cu zero — decît în cazul în care sarcina nu posedă această proprietate.” Mai precis, Sternberg demonstrează că, în timp ce în general deplasările, deformările și tensiunile tind spre zero ca ρ^2 pentru $\rho \rightarrow 0$, — ele tind spre zero ca ρ^3 dacă rezultanta pe regiunea de solicitare de pe frontieră este nulă, respectiv ca ρ^4 dacă momentul resultant e și el nul. Un raționament similar conservă validitatea rezultatului chiar și în prezența sarcinilor concentrate ; în acest caz, toți exponenții amintiți se micșorează cu 2.

Recent, R. Toupin [3] a reluat chestiunea, ținând seama de analiza sugerată de C. Truesdell [3]. Punctul său de pornire e constituit de teoria corpurilor cilindrice, cu posibilități de generalizare pentru corpuri oarecari. Rezultatele sînt de tipul următor: energia (unitară) acumulată într-un punct la distanța z de baza pe care este aplicat un sistem de sarcini static echivalent cu zero descrește după o lege $W(z) \leq W_0 \exp [-(z-l)/z_c]$, unde z_c depinde de material și de forma cilindrului, iar l este lungimea cilindrului. (Material anizotrop.) Pentru „norma” tensorului E se obține o relație similară. (Corpuri izotrope.) Un studiu asemănător pentru cazul plan aparține lui J. Knowles [1]. În fine, H. Keller [1] obține evaluări oarecum analoge celor ale lui Sternberg, dar într-o formulare mai generală, și studiază și comportarea în vecinătatea punctelor singulare.

Mai sînt încă de menționat lucrările (contestate) ale lui G. Horway [1], [2] și W. Schumann [1], [2], precum și notele lui L. Donnell [1] și H. Matschinski [1]. Vezi de asemenea E. Deutsch [7].

Articolele de sinteză ale lui G. Djanelidze [3] și Z. Klebowski [1] furnizează o bogată bibliografie. Pentru indicații referitoare la cazul anizotrop, vezi E. Sternberg [4]. Rezultate pentru problema dinamică sînt date de B. Boley [2], [3]; V. Novojilov și L. Slepian [1]. O importantă generalizare la cazul corpurilor vîsco-elastice aparține lui E. Sternberg și S. Al-Khozaie [1].

Aplicarea principiului la corpuri care nu sînt masive cere o prudență specială: astfel de exemplu, într-o placă subțire plană sau curbă solicitată de un sistem de sarcini static echivalent cu zero aplicat pe suprafața laterală, se pot pune în evidență efecte ce se propagă în interior la mari distanțe. (A. Goldenveizer [1], § 6.11; V. Vlasov [3], § 12.6.) Pentru o analiză a principiului cu aplicație la astfel de corpuri, vezi P. Naghdi [1].

În cazul problemei antiplane, vom reveni asupra acestei chestiuni în § 5.10. (Pentru torsiunea barelor de secțiune variabilă, vezi și G. Polojii [1].) Pentru cazul problemei plane, vezi § 6.11.

Principiul lui Saint-Venant a condus la ideea mult mai generală a satisfacerii aproximative a condițiilor la limită (inclusiv a celor formulate altfel decît în tensiuni): verificare numai în unele puncte ale frontierei, verificare integrală, sau în medie patrată etc. Pentru unele exemple, vezi L. Leibenzon [2] („Metode variaționale”, cap. 6).

Metoda semiinversă și principiul lui Saint-Venant, avînd inițial un cîmp de aplicare restrîns, ocupă acum, sub diferite forme, o poziție dominantă în toate problemele privitoare la rezolvarea efectivă a ecuațiilor elasticității.

§ 7. ECUAȚIILE VARIAȚIONALE ALE ELASTO-STATICII

Numeroase fenomene pot fi descrise atît prin ecuații diferențiale, cît și prin ecuații variaționale (adesea reprezentînd condiții de extremum pentru anumite integrale). Amintim în acest sens exemplul principiilor variaționale ale mecanicii analitice.

Aceasta conduce la studiul anumitor funcționale (de obicei, integrale ce depind de anumite funcții) și al ecuațiilor lui Euler corespunzătoare (vezi de ex. R. Courant și D. Hilbert [1], vol. 1, § 4.10).

Cele mai importante ecuații variaționale clasice ale teoriei elasticității sînt cele ale lui Lagrange și Castigliano. Vom studia aci ecuația lui E. Reissner [4], [8], [9], care le cuprinde drept cazuri particulare.

a) Ecuația variațională a lui Reissner

Să considerăm ecuațiile (1.5)–(1.8) unde, *pentru simplitate, vom scrie* ε_{ij} în loc de $\frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$. Sistemul complet de ecuații este

$$\sigma_{i,j} + F_i = 0 \quad (1)$$

și

$$\sigma_{ij} = \partial \hat{\Phi} / \partial \varepsilon_{ij}, \quad (2')$$

sau încă

$$\varepsilon_{ij} = \partial \hat{\Phi} / \partial \sigma_{ij}, \quad (2'')$$

unde F_i sînt funcții de punct, iar $\hat{\Phi}$ este o funcție cunoscută de derivatele lui u în (2'), respectiv de Σ în (2'') (eventual, și funcție de punct).

Ne limităm aci la cazul liniar ($\hat{\Phi}$ — funcție patrată și omogenă), dar amintim că ecuațiile (2') sînt valabile și în cazul neliniarității fizice.

Ecuațiile (1), (2) trebuie integrate pentru valorile la limită

$$u_i|_{\mathcal{S}'} = g_i, \quad (3)$$

$$\sigma_{ni}|_{\mathcal{S}''} = f_i. \quad (4)$$

Să presupunem că nu cunoaștem cele 9 funcții u_i, σ_{ij} care verifică toate aceste relații, dar cunoaștem o familie de funcții $\tilde{u}_i, \tilde{\sigma}_{ij}$, care satisfac numai unele dintre ele³⁾. Se cere să găsim o metodă pentru a alege dintre aceste funcții, pe acelea care satisfac toate relațiile (1)–(4).

Vom admite numai că toate funcțiile $\tilde{u}_i, \tilde{\sigma}_{ij}$ sînt destul de apropiate de soluția u_i, σ_{ij} , pentru ca să putem scrie

$$\tilde{u}_i = u_i + \delta u_i, \quad \tilde{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij} + \delta \sigma_{ij}, \quad (5)$$

unde variațiile $\delta u_i, \delta \sigma_{ij}$ sînt mici, și în nici un fel legate între ele.

Dacă am cunoaște o expresie depinzînd de u_i, σ_{ij} — așadar o funcțională $\mathfrak{J} = \mathfrak{J}(u, \Sigma)$ — în așa fel încît pentru $\tilde{u}_i = u_i, \tilde{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij}$,

³⁾ Semnul \sim are desigur cu totul alt sens aci decît în § 1.10.

ea să posede anumite proprietăți staționare, problema (1)–(4) ar fi redusă la o problemă de calculul variațiilor. Scriind pe \mathfrak{J} sub forma

$$\tilde{\mathfrak{J}} = \mathfrak{J}(\tilde{u}, \tilde{\Sigma}) = \mathfrak{J} + \delta \mathfrak{J} + \frac{1}{2} \delta^2 \mathfrak{J}, \quad (6)$$

unde $\delta \mathfrak{J}$ este termenul liniar în δu_i , $\delta \sigma_{ij}$, iar $\frac{1}{2} \delta^2 \mathfrak{J}$ este cel patrat, urmează că pentru $\tilde{u}_i = u_i$, $\tilde{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij}$ va trebui să avem $\delta \mathfrak{J} = 0$. Dacă punctul staționar este chiar un extremum, $\delta^2 \mathfrak{J}$ va trebui să păstreze un semn constant în vecinătatea sa.

Să începem prin a căuta prima variație $\delta \mathfrak{J}$ sub forma — evident nulă pentru soluția problemei (1)–(4) —

$$\begin{aligned} \delta \mathfrak{J} = & k_1 \iiint_V [\sigma_{ij,j} + F_i] \delta u_i dV + k_2 \iiint_V [\varepsilon_{ij} - \partial \hat{\Phi} / \partial \sigma_{ij}] \delta \sigma_{ij} dV + \\ & + k_3 \iint_{\mathcal{S}'} [u_i - g_i] \delta \sigma_{ni} dS + k_4 \iint_{\mathcal{S}''} [\sigma_{ni} - f_i] \delta u_i dS, \end{aligned} \quad (7)$$

unde k_i sînt coeficienți încă necunoscuți, și unde folosim parantezele drepte și acoladele pentru a nota factori în produse, rezervînd pe cît posibil parantezele rotunde pentru argumentele funcțiilor.

Să amintim relația (5.4) sub forma

$$\iiint_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV = \iint_{\mathcal{S}' + \mathcal{S}''} \sigma_{ni} u_i dS - \iiint_V \sigma_{ij,j} u_i dV, \quad (8)$$

și relațiile similare ce se obțin pentru perechile $(\delta \sigma_{ij}, u_i)$; $(\sigma_{ij}, \delta u_i)$; $(\delta \sigma_{ij}, \delta u_i)$. Ținînd seama de simetria tensorului tensiune și de (3.6.5), avem

$$\sigma_{ij} (\delta u_i)_{,j} = \sigma_{ij} \frac{1}{2} [(\delta u_i)_{,j} + (\delta u_j)_{,i}] = \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij}, \quad (9)$$

astfel că relația (8) scrisă pentru $(\sigma_{ij}, \delta u_i)$ devine

$$\iiint_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV = \iint_{\mathcal{S}' + \mathcal{S}''} \sigma_{ni} \delta u_i dS - \iiint_V \sigma_{ij,j} \delta u_i dV. \quad (10)$$

Introducînd (10) în (7), obținem deci:

$$\begin{aligned} \delta \mathfrak{J} = & \iiint_V \{ -k_1 \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} + k_1 F_i \delta u_i + k_2 \varepsilon_{ij} \delta \sigma_{ij} - k_2 [\partial \hat{\Phi} / \partial \sigma_{ij}] \delta \sigma_{ij} \} dV + \\ & + \iint_{\mathcal{S}'} \{ k_3 [u_i - g_i] \delta \sigma_{ni} + k_1 \sigma_{ni} \delta u_i \} dS + \\ & + \iint_{\mathcal{S}''} \{ k_4 [\sigma_{ni} - f_i] \delta u_i + k_1 \sigma_{ni} \delta u_i \} dS. \end{aligned} \quad (11)$$

Putem reduce aici unii termeni, și putem pune alți termeni sub forma unor expresii duale în $\delta \varepsilon_{ij}$ și $\delta \sigma_{ij}$ sau $\delta \sigma_{ni}$ și δu_i , dacă alegem $k_1 = k_3 = -1$, $k_2 = k_4 = 1$. Cu aceasta, (11) devine

$$\begin{aligned} \delta \mathfrak{J} = & \iiint_V \{ \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} + \varepsilon_{ij} \delta \sigma_{ij} - [\partial \hat{\Phi} / \partial \sigma_{ij}] \delta \sigma_{ij} - F_i \delta u_i \} dV - \\ & - \iint_{\mathcal{S}'} [u_i \delta \sigma_{ni} + \sigma_{ni} \delta u_i] dS + \iint_{\mathcal{S}'} g_i \delta \sigma_{ni} dS - \iint_{\mathcal{S}''} f_i \delta u_i dS, \end{aligned} \quad (12)$$

ceea ce arată că funcționala \mathfrak{J} trebuie aleasă sub forma

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}(u, \Sigma) = & \iiint_V [\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} - \hat{\Phi}(\Sigma) - F_i u_i] dV - \\ & - \iint_{\mathcal{S}'} \sigma_{ni} [u_i - g_i] dS - \iint_{\mathcal{S}''} u_i f_i dS. \end{aligned} \quad (13)$$

Într-adevăr, introducînd aici (5) și efectuînd calculele din (6), obținem evident pentru $\delta \mathfrak{J}$ expresia (12). (Desigur, mărimile F_i , f_i , g_i nu variază.)

Făcînd uz de (8), funcționala (13) mai poate fi scrisă sub forma

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}(u, \Sigma) = & - \iiint_V \{ [\sigma_{ij} + F_i] u_i + \hat{\Phi}(\Sigma) \} dV + \\ & + \iint_{\mathcal{S}'} \sigma_{ni} g_i dS + \iint_{\mathcal{S}''} u_i [\sigma_{ni} - f_i] dS. \end{aligned} \quad (14)$$

Expresia \mathfrak{J} astfel găsită este *funcționala lui Reissner*.

Pentru $\delta \mathfrak{J}$ avem, pe lîngă (12), și forma ce rezultă direct din (7) pentru valorile considerate ale coeficienților k_i :

$$\begin{aligned} \delta \mathfrak{J} = & - \iiint_V [\sigma_{ij} + F_i] \delta u_i dV + \iiint_V \{ \varepsilon_{ij} \delta \sigma_{ij} - [\partial \hat{\Phi} / \partial \sigma_{ij}] \delta \sigma_{ij} \} dV - \\ & - \iint_{\mathcal{S}'} [u_i - g_i] \delta \sigma_{ni} dS + \iint_{\mathcal{S}''} [\sigma_{ni} - f_i] \delta u_i dS. \end{aligned} \quad (15)$$

Mai departe, efectuând calculele necesare pentru scrierea termenului $\frac{1}{2} \delta^2 \mathfrak{J}$ din (6) (inclusiv dezvoltarea în serie Taylor a funcției $\hat{\Phi}(\Sigma + \delta \Sigma)$), obținem din (13)

$$\begin{aligned} \delta^2 \mathfrak{J} = & \iiint_{\mathcal{V}} \left\{ 2 \delta \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} - \frac{\partial}{\partial \sigma_{ij}} \left[\frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial \sigma_{hk}} \partial \sigma_{hk} \right] \partial \sigma_{ij} \right\} dV - \\ & - 2 \iint_{\mathcal{S}'} \delta \sigma_{ni} \delta u_i dS. \end{aligned} \quad (16)$$

Or, întrucât $\hat{\Phi}$ este o formă patrată și omogenă, avem

$$\frac{\partial}{\partial \sigma_{ij}} \left[\frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial \sigma_{hk}} \partial \sigma_{hk} \right] \delta \sigma_{ij} = 2 \hat{\Phi}(\delta \Sigma). \quad (17)$$

Scriind acum relația (8) pentru mărimile $(\delta \sigma_{ij}, \delta u_i)$, obținem

$$\iiint_{\mathcal{V}} \delta \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV = \iint_{\mathcal{S}' + \mathcal{S}''} \delta \sigma_{ni} \delta u_i dS - \iiint_{\mathcal{V}} (\delta \sigma_{ij})_{,j} \delta u_i dV, \quad (18)$$

astfel că introducând acum (17), (18) în (16), căpătăm

$$\delta^2 \mathfrak{J} = - 2 \iiint_{\mathcal{V}} [(\delta \sigma_{ij})_{,j} \delta u_i + \hat{\Phi}(\delta \Sigma)] dV + 2 \iint_{\mathcal{S}''} \delta \sigma_{ni} \delta u_i dS. \quad (19)$$

Acum este ușor de văzut că rezolvarea problemei (1)–(4) este echivalentă cu găsirea funcțiilor u_i, σ_{ij} pentru care \mathfrak{J} ia o valoare staționară.

Într-adevăr, pentru orice funcții u_i, σ_{ij} care verifică (1)–(4), din (7) rezultă $\delta \mathfrak{J} = 0$, oricare ar fi variațiile $\delta u_i, \delta \sigma_{ij}$. Reciproc, dacă funcțiile u_i, σ_{ij} dau funcționalei lui Reissner o valoare staționară (așadar $\delta \mathfrak{J} = 0$) pentru orice variații $\delta u_i, \delta \sigma_{ij}$, atunci din (7) urmează că aceste funcții verifică (1)–(4).

Acest argument este desigur numai formal. El poate fi justificat cu ajutorul lemei fundamentale a calculului variațiilor (vezi de ex. E. Goursat [2], § 619; V. Smirnov [2], vol. 4, pct. 62) dacă $\tilde{u}_i \in C^2, \tilde{\sigma}_{ij} \in C^1$. Pentru funcționale mai particulare, raționamentul necesar este dat de I. Sokolnikoff [2], § 106.

Valoarea staționară a lui \mathfrak{J} nu este cu necesitate un maxim sau un minim: din (19) se vede că $\delta^2 \mathfrak{J}$ nu păstrează un semn constant.

Ecuația lui Reissner poate fi folosită fără a impune funcțiilor $\tilde{u}_i, \tilde{\sigma}_{ij}$ nici o condiție prealabilă; în particular, aceste funcții nu trebuie să fie în nici un fel legate între ele. Aceasta extinde câmpul de aplicare al

metodei. Dar se înțelege că problema se simplifică dacă cel puțin unele din relațiile (1) — (4) sînt a priori satisfăcute, prin însăși alegerea funcțiilor $\tilde{u}_i, \tilde{\sigma}_{ij}$.

b) Principiul de minimum pentru deplasări

Să presupunem că toate funcțiile $\tilde{u}_i, \tilde{\sigma}_{ij}$ verifică ecuațiile fizico-geometrice (2''), iar funcțiile \tilde{u}_i satisfac și condițiile la limită de tip Dirichlet (3). Aceasta revine la a spune că componentele tensiunii $\tilde{\sigma}_{ij}$ sînt *definite* prin intermediul componentelor deplasării \tilde{u}_i , iar familia acestora din urmă este aleasă în așa fel, încît condițiile la limită în deplasări să fie a priori verificate. (Un astfel de cîmp de deplasări se zice a fi *cinematic admisibil*.) Despre ecuațiile de echilibru (1) și condițiile la limită în tensiuni (4) nu se face nici o presupunere.

Ținînd seama de relațiile (5) în (2'') și (3), obținem ușor

$$\delta \varepsilon_{ij} = \frac{\partial}{\partial \sigma_{jk}} \left[\frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial \sigma_{ij}} \right] \delta \sigma_{jk}, \quad (20)$$

$$\delta u_i|_{\mathcal{S}'} = 0. \quad (21)$$

Relațiile (2'') sînt echivalente — în cadrul teoriei liniare! — cu (2'), și deci componentele $\tilde{\sigma}_{ij}$ pot fi privite ca explicitate prin intermediul derivatelor parțiale ale funcțiilor \tilde{u}_i . Să transcriem toate mărimile ce apar în (13) prin intermediul componentelor \tilde{u}_i , ținînd seama că $\sigma_{ij}(\tilde{\mathbf{E}}) \tilde{\varepsilon}_{ij} = 2\hat{\Phi}(\tilde{\mathbf{E}})$, și că $[u_i - g_i]|_{\mathcal{S}'} = 0$. În acest caz, funcționala \mathfrak{J} va depinde numai de componentele \tilde{u}_i , și va lua forma

$$\tilde{\mathfrak{J}}_u \equiv \mathfrak{J}(\tilde{\mathbf{u}}) = \iiint_{\mathcal{V}} [\hat{\Phi}(\tilde{\mathbf{E}}) - F_i \tilde{u}_i] dV - \iint_{\mathcal{S}''} f_i \tilde{u}_i dS. \quad (22)$$

Ținînd seama de relațiile (2'') și (3) în expresia (15), avem

$$\delta \tilde{\mathfrak{J}}_u = - \iiint_{\mathcal{V}} [\sigma_{ij,j} + F_i] \delta u_i dV + \iint_{\mathcal{S}''} [\sigma_{ri} - f_i] \delta u_i dS. \quad (23)$$

Tot astfel, introducînd (3.7.11), (17) și (21) în (16), căpătăm

$$\delta^2 \tilde{\mathfrak{J}}_u = 2 \iiint_{\mathcal{V}} \hat{\Phi}(\delta \Sigma) dV > 0. \quad (24)$$

Prin urmare, soluția problemei (1) — (4) este nu numai o valoare staționară, ci chiar un *minimum* al funcționalei în deplasări $\tilde{\mathfrak{J}}_u$.

Reciproc, dacă în mulțimea funcțiilor \tilde{u}_i am găsit soluția u_i a problemei de extremum pentru funcționala $\tilde{\mathfrak{J}}_u$, atunci tensiunile σ_{ij} definite de această soluție prin intermediul relațiilor (2'') verifică atât ecuațiile de echilibru (1), cât și condițiile la limită în tensiuni (4).

În cazul particular $\mathcal{S} = \mathcal{S}''$ (condiții la limită formulate numai în tensiuni), sîntem conduși la *ecuația variațională a lui Lagrange*:

$$\delta \left[\iiint_{\mathcal{V}} \hat{\Phi}(\mathbf{E}) dV - \iiint_{\mathcal{V}} F_i u_i dV - \iint_{\mathcal{S}} f_i u_i dS \right] = 0. \quad (25)$$

Amintim că componentele lui \mathbf{E} trebuie explicitate aci prin intermediul celor ale lui \mathbf{u} . Funcțiile \tilde{u}_i nu trebuie să satisfacă nici o condiție prealabilă.

c) Principiul de maximum pentru tensiuni

Fie dat acum un sistem de funcții $\tilde{\sigma}_{ij}$ care verifică ecuațiile de echilibru (1) și condițiile la limită de tip Neumann (4). (Un astfel de cîmp de tensiuni se zice a fi *static admisibil*.)

Ținînd seama de relațiile (5) în (1) și (4), obținem desigur

$$(\delta \sigma_{ij})_{,j} = 0, \quad (26)$$

$$\delta \sigma_{nt} |_{\mathcal{S}''} = 0. \quad (27)$$

Introducînd (1) și (4) în (14), căpătăm o expresie care depinde numai de $\tilde{\sigma}_{ij}$:

$$\tilde{\mathfrak{J}}_\sigma \equiv \mathfrak{J}(\tilde{\Sigma}) = - \iiint_{\mathcal{V}} \hat{\Phi}(\tilde{\Sigma}) dV + \iint_{\mathcal{S}'} \tilde{\sigma}_{nt} g_t dS. \quad (28)$$

Tot astfel, din (15) obținem

$$\delta \tilde{\mathfrak{J}}_\sigma = \iiint_{\mathcal{V}} [\varepsilon_{ij} - \partial \hat{\Phi} / \partial \sigma_{ij}] \delta \sigma_{ij} dV - \iint_{\mathcal{S}'} [u_i - g_i] \delta \sigma_{nt} dS. \quad (29)$$

În fine, introducînd (26), (27) în (19), deducem

$$\delta^2 \tilde{\mathfrak{J}}_\sigma = - 2 \iiint_{\mathcal{V}} \hat{\Phi}(\delta \Sigma) dV < 0. \quad (30)$$

Prin urmare, soluția problemei (1)–(4) este nu numai o valoare staționară, ci chiar un *maximum* al funcționalei în tensiuni $\tilde{\mathfrak{J}}_\sigma$.

Reciproc, dacă în mulțimea funcțiilor $\tilde{\sigma}_{ij}$ am găsit soluția σ_{ij} a problemei de extremum pentru funcționala $\tilde{\mathfrak{J}}_\sigma$, atunci sînt automat satisfăcute

relațiile (2''), iar deplasările u_i definite prin intermediul acestor relații verifică și condițiile la limită (3).

În cazul $\mathcal{S} = \mathcal{S}'$ (condiții la limită numai în deplasări), sîntem conduși la *ecuația variațională a lui Castigliano* :

$$\delta \left[\iiint_V \hat{\Phi}(\Sigma) dV - \iint_S \sigma_{ni} g_i dS \right] = 0. \quad (31)$$

Funcțiile $\tilde{\sigma}_{ij}$ nu trebuie să satisfacă în acest caz nici o condiție prealabilă.

OBSERVAȚIE. Expresia (22) — și ecuația (25) ce derivă din ea — sînt identice cu cele ce se obțin în teoria ce are ca punct de pornire integrala energiei. Dimpotrivă, expresia (28) — și ecuația (31) — nu au echivalent. Libertatea mai mare în alegerea funcțiilor $\tilde{u}_i, \tilde{\sigma}_{ij}$ din punctul de vedere al proprietăților lor la limită constituie unul din avantajele metodei lui Reissner. Pentru comparație, vezi S. Mikhlin [4], finele § 4.26.

Notînd cu \mathfrak{J} valoarea funcționalei lui Reissner pentru $\tilde{u}_i = u_i, \tilde{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij}$, conchidem desigur că pentru orice sistem de funcții $\tilde{u}_i, \tilde{\sigma}_{ij}$, avem

$$\tilde{\mathfrak{J}}_0 \leq \mathfrak{J} \leq \tilde{\mathfrak{J}}_u. \quad (32)$$

Metoda variațională constă deci în descompunerea problemei în două etape : alegerea funcțiilor $\tilde{u}_i, \tilde{\sigma}_{ij}$, și rezolvarea problemei $\delta \mathfrak{J} = 0$ corespunzătoare. Rezolvarea acestei din urmă probleme echivalează cu o „triare” a funcțiilor $\tilde{u}_i, \tilde{\sigma}_{ij}$, operație în urma căreia se rețin numai acelea dintre ele care verifică (1) — (4).

În cazul ecuației lui Lagrange, această operație de triare asigură în mod automat verificarea ecuațiilor de echilibru și a condițiilor la limită în tensiuni. În cazul ecuației lui Castigliano, ea asigură verificarea condițiilor la limită în deplasări, precum și cea a ecuațiilor fizico-geometrice (vezi și Observația de mai sus). Întrucît sistemul (1), (2) este echivalent cu sistemul complet al ecuațiilor elasticității, rezultă că verificarea ecuației lui Castigliano trebuie să garanteze implicit verificarea condițiilor lui Saint-Venant. Acest fapt a fost demonstrat de R. Southwell [1], [2] (vezi și L. Leibenzon [2], „Metode variaționale”, § 1.8); mai recent pe aceeași temă, vezi K. Washizu [2].

d) Concluzii

În ce privește tehnica de rezolvare a problemei $\delta \mathfrak{J} = 0$, ne mărginim la cîteva indicații. Funcțiile u_i, σ_{ij} se caută sub forma de dezvoltări în serie de funcții cu proprietăți destul de simple („funcții coordonate”), iar coeficienții acestor dezvoltări se determină tocmai din condiția $\delta \mathfrak{J} = 0$. În felul acesta, problema valorilor staționare ale funcționalei lui Reissner (sau Lagrange, sau Castigliano) este înlocuită printr-o problemă similară pentru o funcție de o infinitate de variabile : coeficienții de pe lîngă funcțiile

coordonate. În cazul teoriei liniare, aceasta conduce în ultimă instanță la rezolvarea unor sisteme infinite de ecuații algebrice liniare.

Pe această cale se pot obține *soluții aproximative*, precum și —demonstrând convergența seriilor astfel introduse și studiind proprietățile sumelor lor— *teoreme de existență*.

Sub diferite forme, ecuațiile variaționale sînt examinate de C. Biezeno și R. Grammel [1], cap. 3; P. Papkovici [4], cap. 14; I. Sokolnikoff [2], cap. 7; S. Timoshenko și J. Goodier [1], capitolul 6 și Anexa. În lucrări mai recente, vezi P. Germain [1], capitolul 8; C. Pearson [2], capitolul 7; W. Prager [2], § 8.6; C. Truesdell și W. Noll [1], § 88; C. Truesdell și R. Toupin [1], §§ 231—238. Vezi încă și monografiile indicate în § 4, pag. 136. Pentru anumite chestiuni speciale, vezi J. Radok [3] (probleme plane); D. Rüdiger [1], [2] (generalizarea punctului de vedere al lui Reissner); M. Gurtin [4] și Yu Chen [1] (elasto-dinamică); L. Kacianov [3] (plasticitate).

§ 8. SISTEMUL ECUAȚIILOR ÎN DEPLASĂRI

a) Corpuri neomogene și anizotrope

Să amintim ecuațiile statice sub forma (1.2) și ecuațiile geometrice sub forma (1.1). Introducînd (1.1) în legea lui Hooke (1.3), putem scrie sistemul complet de ecuații sub forma simbolică (vezi (2.4.11); „tens” este un operator diferențial liniar de primul ordin):

$$\operatorname{div} \Sigma + F = 0, \quad \Sigma = \operatorname{tens} u, \quad (1)$$

ceea ce echivalează cu relațiile (1.5) — (1.8).

Definind produsul a doi operatori prin aplicarea lor succesivă, obținem ecuațiile în deplasări sub forma

$$\operatorname{div} \operatorname{tens} u + F = 0 \quad (2)$$

sau încă

$$\mathfrak{A} u = F, \quad (3)$$

unde $\mathfrak{A} = -\operatorname{div} \operatorname{tens}$ este produsul celor doi operatori considerați.

Ținînd seama de (1.1) — (1.3) și de relațiile de simetrie pentru c_{ij}^{hk} și ε_{hk} , înmulțind cu versorii i_i ai axelor Ox_i , și sumînd, obținem pentru (3) forma

$$[c_{ij}^{hk} u_{h,k}]_{,j} i_i + F = 0, \quad (4)$$

ceea ce dă forma explicită a operatorului \mathfrak{A} , numit *operatorul lui Lamé* (pentru corpuri neomogene și anizotrope).

OBSERVAȚIA 1. Se poate demonstra că operatorul div este (în sensul teoriei operatorilor liniari în spații Hilbert) *conjugatul* operatorului tens pe mulțimea vectorilor ce satisfac una din condițiile la limită (2.1) — (2.3). De aci rezultă posibilitatea de a face uz în teoria elasticității de metoda numită „a proiecțiilor ortogonale”, inclusiv de a demonstra pe această

cale teoremele de existență pentru primele trei probleme fundamentale. (Vezi S. Mihlin [4], §§ 48–54; S. Teleman [1]; H. Weyl [2].) Această descompunere a operatorului \mathfrak{A} este analogă cu descompunerea $\Delta = \text{div grad}$, și este ușor de transpus aci teoria corespunzătoare a ecuației lui Laplace.

Pe de altă parte, se poate demonstra (făcând uz de faptul că Φ este o formă patratică pozitiv-definită) că operatorul \mathfrak{A} este pozitiv-definit pe aceleași mulțimi de vectori. De aci rezultă posibilitatea de a rezolva aceleași probleme (teoreme de existență și metode aproximative, inclusiv convergența lor) prin metoda lui Ritz (vezi S. Mihlin [2]–[4]).

Acestea sînt principalele căi abstract-funcționale spre studiul ecuațiilor elasticității. În practică, ele apar adesea legate de unele din ecuațiile din § 7.

Dacă \mathcal{V} este omogen, structura operatorului \mathfrak{A} se simplifică: ținînd seama că $c_{ij,j}^{\alpha\gamma} \equiv 0$, ecuația (4) devine

$$c_{ij}^{hk} u_{h,jk} i_i + F = 0. \quad (5)$$

b) Sistemul ecuațiilor lui Lamé pentru corpuri omogene și izotrope

În acest caz este mai comod să stabilim direct ecuațiile corespunzătoare. Anume, introducînd (3.3.18) în (1.2) și utilizînd (1.1), obținem pe rînd (observînd că $\theta = u_{j,j}$):

$$\sigma_{\theta,j} = \lambda \theta_{,j} + \mu u_{i,jj} + \mu u_{j,ij} = \mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu) u_{j,ij}.$$

Întrucît $(\lambda + \mu)/\mu = (1 - 2\nu)^{-1}$, sistemul (1.2) se poate scrie

$$u_{i,jj} + (1 - 2\nu)^{-1} u_{j,ji} + \mu^{-1} F_i = 0, \quad (6)$$

sau încă, sub formă vectorială:

$$\Delta \mathbf{u} + (1 - 2\nu)^{-1} \text{grad div } \mathbf{u} + \mu^{-1} \mathbf{F} = 0. \quad (7)$$

Acestea sînt *ecuațiile lui Lamé* (pentru corpuri omogene și izotrope), stabilite de către G. Lamé și B. Clapeyron și publicate în 1828. Pornind de la considerații asupra forțelor intermoleculare, ele fuseseră obținute încă în 1821 de către L. Navier [1], dar numai în cadrul teoriei rariconstante ($\lambda = \mu$).

OBSERVAȚIA 2. Ecuațiile (7) își pierd evident sensul pentru $\nu = 0,5$. Dar în acest caz, avem și $\theta = \text{div } \mathbf{u} = 0$ (vezi § 3.4, pag. 92), ceea ce reprezintă o nouă ecuație. Sistemul modificat ce se obține pentru această stare-limită a fost intens studiat, inclusiv pentru cazul teoriei neliniare, al corpurilor neomogene etc. Vezi de exemplu J. Fuka [1], J. Golecki [1], L. Tolokonnikov [1].

Sistemul (7) este un sistem de trei ecuații cu derivate parțiale de al doilea ordin, liniar, cu coeficienți constanți. Comparînd ecuațiile (7) cu (3), rezultă că pentru corpuri omogene și izotrope avem

$$\mathfrak{U} = -\operatorname{div} \text{tens} = -\mu [\Delta + (1-2\nu)^{-1} \operatorname{grad} \operatorname{div}]; \quad (8)$$

așadar, operatorul lui Lamé are în acest caz o formă extrem de simplă.

Se pot da ușor unele forme echivalente ale ecuațiilor (7). Anume, utilizând operatorul „nabla” al lui Hamilton, avem mai întâi

$$\operatorname{div} \mathfrak{u} = \nabla \cdot \mathfrak{u}; \quad \operatorname{grad} \varphi = \nabla \varphi; \quad \Delta \varphi = \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \nabla \cdot \nabla \varphi, \quad (9)$$

și cu aceasta (7) ia forma

$$\mu [\nabla \cdot \nabla \mathfrak{u} + (1-2\nu)^{-1} \nabla \nabla \cdot \mathfrak{u}] + \mathbf{F} = 0. \quad (10)$$

Ținând seama că $\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathfrak{u} = \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathfrak{u} + \Delta \mathfrak{u}$, obținem din (7)

$$\mu \left[\Delta \mathfrak{u} + \frac{1}{2} (1-\nu)^{-1} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathfrak{u} \right] + \frac{1}{2} (1-2\nu) (1-\nu)^{-1} \mathbf{F} = 0. \quad (11)$$

În fine, scăzând (11) din (7) amplificată cu μ , căpătăm

$$\mu \left[\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathfrak{u} - \frac{1}{2} (1-2\nu) (1-\nu)^{-1} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathfrak{u} \right] + \frac{1}{2} (1-2\nu) (1-\nu)^{-1} \mathbf{F} = 0. \quad (12)$$

Prezența aci a operatorului lui Laplace nu e întâmplătoare. Acest fapt va juca ulterior un rol esențial. (Vezi mai departe §§ 10, 12 și 7.4.)

§ 9. SISTEMUL ECUAȚIILOR ÎN TENSIUNI PENTRU CORPURI OMOGENE ȘI IZOTROPE

Știm deja (vezi § 1) că ecuațiile în tensiuni sînt alcătuite din ecuațiile de echilibru (1.2) și ecuațiile de compatibilitate (1.9.12) transcrise în tensiuni prin intermediul legii lui Hooke (1.4). Vom considera aci numai cazul corpurilor izotrope și omogene, și prin urmare vom ține seama de legea lui Hooke (3.4.18)

$$\varepsilon_{ij} = -\frac{\nu}{E} \Theta \delta_{ij} + \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} \quad (1)$$

în condițiile (1.9.12), pe care le vom scrie (intervertind k cu j) sub forma

$$\varepsilon_{ij, hk} + \varepsilon_{hk, ij} - \varepsilon_{ih, jk} - \varepsilon_{jk, ih} = 0. \quad (2)$$

Aceasta dă ecuațiile de compatibilitate sub forma

$$\begin{aligned} & \sigma_{ij, hk} + \sigma_{hk, ij} - \sigma_{ih, jk} - \sigma_{jk, ih} = \\ & = [\nu/(1+\nu)] [\delta_{ij} \Theta_{, hk} + \delta_{hk} \Theta_{, ij} - \delta_{ih} \Theta_{, jk} - \delta_{jk} \Theta_{, ih}]. \end{aligned} \quad (3)$$

Aceste ecuații sînt foarte incomode — dar pot fi simplificate cu ajutorul ecuațiilor statice (1.2). Într-adevăr, dacă în (3) luăm $h = k$, căpătăm mai întîi

$$\begin{aligned} \sigma_{ij, hh} + \sigma_{hh, ij} - \sigma_{ih, hj} - \sigma_{jh, hi} = \\ = [\nu/(1 + \nu)] [\delta_{ij} \Theta_{, hh} + \delta_{hh} \Theta_{, ij} - \delta_{ih} \Theta_{, jh} - \delta_{jh} \Theta_{, ih}], \end{aligned}$$

sau încă, după calcule elementare — în care se ține seama de faptul că $\partial^2/\partial x_h \partial x_h = \Delta$, $\sigma_{hh} = \Theta$, $\delta_{hh} = 3$, precum și de ecuațiile (1.2) derivate în raport cu x_j și x_i :

$$\Delta \sigma_{ij} + (1 + \nu)^{-1} \Theta_{, ij} = \nu (1 + \nu)^{-1} \delta_{ij} \Delta \Theta - F_{i, j} - F_{j, i}. \quad (4)$$

Pentru a calcula pe $\Delta \Theta$, este suficient să luăm aci $i = j$, de unde

$$\Delta \Theta = - (1 + \nu) (1 - \nu)^{-1} F_{, i, i}. \quad (5)$$

Introducînd (5) în (4), obținem ecuațiile

$$\Delta \sigma_{ij} + (1 + \nu)^{-1} \Theta_{, ij} = - \nu (1 - \nu)^{-1} \delta_{ij} \operatorname{div} F - F_{i, j} - F_{j, i}, \quad (6)$$

ceea ce se mai scrie și sub forma

$$\sigma_{ij, hh} + (1 + \nu)^{-1} \sigma_{hh, ij} = - \nu (1 - \nu)^{-1} \delta_{ij} F_{, h, h} - F_{i, j} - F_{j, i}. \quad (7)$$

(Deși oarecum inconsecventă, utilizarea simbolului Δ e comodă.)

Acestea sînt *ecuațiile de compatibilitate* în tensiuni (pentru corpuri omogene și izotrope), numite de obicei *ecuațiile Beltrami-Michell*. Ele au fost obținute de E. Beltrami [1] (pentru $F = 0$), și ulterior de J. Michell [1] (pentru $F \neq 0$).

Sistemul ecuațiilor în tensiuni pentru corpuri omogene și izotrope este deci alcătuit din ecuațiile (1.2) și (6). Rezolvîndu-l, căpătăm valori ale deformației pentru care ecuațiile geometrice pot fi integrate. (Dacă \mathcal{V} este multiplu conex, trebuie să verificăm și condițiile (1.9.17).)

Dacă ecuațiile (6) sînt *identice* verificate (de ex., dacă $F = \text{const.}$, iar tensiunile sînt funcții *liniare* de coordonate), sistemul ecuațiilor în tensiuni se reduce la ecuațiile statice (1.2). Astfel de probleme se numesc „*elementare*”. Unele din ele au fost examinate în § 3.4; asupra altora vom reveni în § 5.5. Vezi încă exemple în S. Timoshenko și J. Goodier [1], capitolul 10.

§ 10. PROPRIETĂȚI GENERALE ALE SOLUȚIILOR

a) Reducerea la ecuații omogene

Sistemul (1.1) — (1.3), sau (8.7), sau (1.2) și (9.6), de rezolvat cu condițiile la limită (2.1) — (2.4), este un sistem neomogen. În practică, forțele de volum sînt adesea neglijabile, sarcinile pe frontieră jucînd rolul princi-

pal. Mai mult încă, se poate ajunge întotdeauna la studiul unui *sistem omogen*.

Într-adevăr, fie că am găsit o soluție *particulară* a sistemului neomogen. Dacă ea satisface și condițiile la limită, aceasta este însăși soluția — în virtutea teoremei de unicitate. În caz contrar, să o notăm cu indicele $(^p)$, și să căutăm soluția problemei sub forma

$$u_i = u_i^0 + u_i^p, \quad \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^0 + \varepsilon_{ij}^p, \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ij}^0 + \sigma_{ij}^p. \quad (1)$$

În virtutea liniarității ecuațiilor, rezultă (ca și în § 5) că funcțiile $u_i^0, \varepsilon_{ij}^0, \sigma_{ij}^0$ verifică ecuațiile (1.1)–(1.3) *omogene*. În virtutea liniarității condițiilor la limită, avem de exemplu din (2.3) și (1):

$$u^0|_{\mathcal{S}'} = g - u^p|_{\mathcal{S}'}, \quad \sigma_n(u^0)|_{\mathcal{S}''} = f - \sigma_n(u^p)|_{\mathcal{S}''}. \quad (2)$$

Prin urmare, dacă soluția $(^p)$ este cunoscută, problema se reduce la determinarea soluției $(^0)$ a ecuațiilor *omogene*, cu datele la limită *modificate* din (2).

Dacă cunoaștem un sistem de funcții ce verifică condițiile la limită, fără a verifica și ecuațiile problemei, un raționament analog conduce la o problemă cu ecuații neomogene, și condiții la limită omogene.

Soluția $(^p)$ are un mare grad de arbitrar — ce permite de altfel determinarea ei relativ simplă. De aci rezultă un grad de arbitrar similar în determinarea soluției $(^0)$ corespunzătoare, căci numai suma lor trebuie să fie unică.

Aceste raționamente rămân valabile pentru corpuri neomogene și anizotrope.

EXEMPLE. 1° *Forța gravitațională*. Alegând drept axă Ox_3 verticala ascendentă, avem $F_i = -\rho g \delta_{i3}$. Ecuațiile (9.6) sînt deci omogene. Alegînd drept soluție $(^p)$

$$\sigma_{33}^p = \rho g x_3, \quad \sigma_{11}^p = \sigma_{22}^p = \sigma_{12}^p = \sigma_{23}^p = \sigma_{31}^p = 0. \quad (3)$$

ecuațiile (1.2) și (9.6) sînt verificate. Determinînd — dacă este cazul — componentele corespunzătoare ale deplasării, și introducînd soluția particulară (3) în (2), obținem condițiile la limită modificate pentru problema cu forțe de volum nule.

2° *Forța inerțială datorată rotației în jurul unei axe*. Notînd cu Ox_3 axa de rotație și cu ω viteza unghiulară, corpul poate fi privit ca aflîndu-se în echilibru, sub acțiunea unei forțe de volum de componente:

$$F_1 = \rho \omega^2 x_1, \quad F_2 = \rho \omega^2 x_2, \quad F_3 = 0. \quad (4)$$

Introducînd (4) în ecuațiile lui Lamé (8.7), observăm că componentele soluției particulare pot fi căutate sub forma unor polinoame de grad trei. Alegînd

$$u_1^p = ax_1^3 + bx_1^2x_2 + cx_1x_2^2 + dx_2^3, \quad u_2^p = ex_1^3 + fx_1^2x_2 + gx_1x_2^2 + hx_2^3, \quad u_3^p = 0, \quad (5)$$

și introducînd în (8.7), constatăm că a treia ecuație este identic verificată, iar primele două dau 4 ecuații pentru cele 8 constante a, b, \dots, h . Luînd de pildă $e = g = b = d = 0, a = h, c = f$, obținem

$$a = h = 0, \quad c = f = -\frac{1-2\nu}{4(1-\nu)\mu} \rho \omega^2. \quad (6)$$

Introducând (6) în (5), dispunem de soluția căutată, și putem scrie condițiile la limită modificate (2).

Exemplele de mai sus sugerează de a reprezenta în general F prin polinoame (dacă aceasta este posibil), și a căuta soluția particulară tot sub formă de polinoame. O soluție exactă a ecuațiilor lui Lamé neomogene va fi dată la finele § 7.9.

b) Biharmonicitatea componentelor stării elastice

În cele ce urmează, putem deci considera că *forțele de volum sînt nule*. (Vom lua $F \neq 0$ numai dacă aceasta nu complică raționamentul, sau pune în evidență unele proprietăți importante.)

Pentru $F = 0$ (sau chiar $F = \text{const.}$), relația (9.5) se reduce la

$$\Delta \Theta = 0. \quad (7)$$

Ținînd seama de (3.3.22), urmează că avem și

$$\Delta \theta = 0. \quad (8)$$

Prin urmare, pentru forțe de volum constante (în particular: nule), *invarianții liniari ai tensiunii și deformației sînt funcții armonice*. Aplicînd operatorul lui Laplace în primul membru al ecuațiilor lui Lamé (8.7) omogene, precum și al ecuațiilor Beltrami-Michell (9.6) pentru $F = \text{const.}$, deducem

$$\Delta \Delta u_i = 0, \quad (9)$$

$$\Delta \Delta \sigma_{ij} = 0. \quad (10)$$

Prin urmare, pentru forțe de volum constante (eventual nule), *componentele stării elastice sînt funcții biarmonice*.

Caracterul biarmonic al soluției este propriu corpurilor *omogene* și *izotrope*. Acest fapt este fundamental. El subliniază rolul ecuației biarmonice în teoria echilibrului corpurilor omogene și izotrope, rol analog celui al ecuației armonice în studiul fluidelor ideale incompresibile. El sugerează posibilitatea de a face uz de unele metode încetățenite în hidrodinamică, și pune totodată în evidență gradul de complexitate sporit al problemelor matematice ale teoriei elasticității, chiar în varianta sa cea mai simplă.

Totuși, existența unei relații de tipul celei din (9) nu este specifică corpurilor omogene și izotrope. Într-adevăr, limitîndu-ne pentru rațiuni de simplitate la cazul corpurilor omogene, cu $F = 0$, și introducînd operatorii

$$\mathfrak{D}_{ih} = c_{ij}^{hk} (\partial^2 / \partial x_k \partial x_j), \quad (11)$$

putem transcrie ecuațiile (8.5) sub forma

$$\mathfrak{D}_{ih} u_h = 0. \quad (12)$$

Să examinăm sumar cazul $i, h, j, k = 1, 2$:

$$\mathfrak{D}_{11} u_1 + \mathfrak{D}_{12} u_2 = 0, \quad \mathfrak{D}_{21} u_1 + \mathfrak{D}_{22} u_2 = 0. \quad (13)$$

Pentru a elimina pe u_1 sau u_2 din acest sistem, este suficient să „amplificăm” prima ecuație (13) cu \mathfrak{D}_{22} , pe cea de a doua cu \mathfrak{D}_{12} , și să le scădem membru cu membru. Întrucît c_{ij}^{hk} sînt constante — și deci operatorii \mathfrak{D}_{ih} sînt permutabili — se obține ecuația de ordin patru $(\mathfrak{D}_{11}\mathfrak{D}_{22} - \mathfrak{D}_{21}\mathfrak{D}_{12})u_1 = 0$, și o ecuație identică pentru u_2 .

În cazul $i, j, h, k = 1, 2, 3$ s-ar deduce — după eliminarea lui u_3 — două ecuații de ordinul patru; eliminînd apoi pe u_3 , nu se obține o ecuație de ordinul opt, ci numai una de ordinul șase, datorită faptului că toți termenii căpătați conțin în „factor” operatorul \mathfrak{D}_{13} .

În fapt, lucrurile se petrec ca și cum (13) ar fi un sistem *algebric*, a cărui soluție există dacă și numai dacă $\text{Det} [\mathfrak{D}_{ih}] = 0$. De aci rezultă că toate componentele u_h — și deci, după derivare, orice componentă v a stării elastice — verifică ecuația liniară de ordinul șase, cu coeficienți constanți:

$$\text{Det} [\mathfrak{D}_{ih}] v = 0. \quad (14)$$

Rezultatul din (9), (10), deși *esențial* mai simplu, nu este decît un caz particular al acestui rezultat general, aparținînd la origine lui I. Fredholm [1]. (Vezi și E. Kröner [1].) Pentru anumite cazuri particulare, vezi indicațiile din § 7.4, pag. 529.

Folosind și formule ulterioare din (12.11) și făcînd uz și de (1.7.6), (1.8.10) și (1.8.11), se găsește în particular pentru cazul corpului omogen și izotrop $\Delta^3 v = 0$ — ceea ce e mai puțin decît (9), (10).

c) Potențiali

Întrucît componentele deformației și tensiunii se obțin din cele ale deplasării prin operații aritmetice și de derivare, ne vom limita la studiul acestora din urmă.

O funcție (sau sistem de funcții) a cărei cunoaștere permite determinarea tuturor funcțiilor căutate într-o problemă dată, prin operații dintre care cea mai complicată este cea de derivare, poartă numele de *potențial* al problemei considerate⁴⁾.

Privind componentele deplasării ca potențiali și ținînd seama de teorema lui E. Almansi [1], [2] și M. Nicolescu [1], care afirmă că orice funcție poliarmonică de ordin n poate fi reprezentată prin intermediul a n funcții armonice, conchidem că toate componentele stării elastice pot fi reprezentate (pentru $F = 0$) prin *potențiali armonici*.

Aparent, numărul minim de astfel de funcții armonice este de 6. În capitolul 7 vom vedea că problema poate fi redusă (pentru $F = 0$, $\nu \neq 0,25$) la cea a determinării a numai trei (și uneori două, sau chiar numai una) funcții armonice. În cazul particular al unor probleme în care intervin funcții de numai două variabile, aceasta deschide drumul spre utilizarea teoriei funcțiilor de o variabilă complexă în teoria elasticității (vezi cap. 5 și 6).

În unele împrejurări au fost determinate (istoricește, mai devreme) funcții (nu neapărat armonice) care permit prin operații de derivare deter-

⁴⁾ A nu se confunda cu potențialul elastic Φ și nici cu potențialii newtonieni 1

minarea numai a componentelor tensiunii. Astfel de funcții vor purta numele de *potențiali de tensiune*, spre deosebire de cele mai sus considerate, numite *potențiali de deplasare*. Evident, cunoașterea potențialilor de deplasare e preferabilă: cunoașterea numai a potențialilor de tensiune cere noi operații de integrare pentru găsirea deplasărilor.

Ținând seama de noțiunea de soluție regulată definită la finele § 4.2, vom căuta numai astfel de potențiali pentru care soluția satisface condițiile (2.7)—și eventualele condiții de regularitate la infinit. Dimpotrivă, potențiali cu singularități pot fi utilizați pentru a construi soluții cu singularități (forțe concentrate, momente concentrate etc.)

§ 11. ECUAȚIILE MICILOR MIȘCĂRI ALE CORPURILOR ELASTICE

Rezultatele de pînă aci pot fi extinse și la studiul unor procese care nu sînt *pseudo-stactice*. Făcînd abstracție de o eventuală deplasare rigidă de ansamblu, vom studia acele mișcări ale particulelor care duc la deplasări și deformații mici în raport cu poziția corpului privit ca solid rigid. Astfel de mișcări apar de obicei fie ca *oscilații* elastice (proprii sau forțate) în jurul unei anumite poziții, fie ca *unde* ce se propagă în corpul elastic (de ex. ca urmare a unui șoc).

Componentele deplasării, deformației, tensiunii, se definesc la fel ca în cazul static, dar depind și de timpul t .

Ecuatiile geometrice (1.1) rămîn intacte.

Ecuatiile statice (1.2) trebuie modificate prin considerarea termenilor inerțiali. În coordonate lagrangeene, punctul \mathbf{x} ocupă la un moment dat t o poziție definită de valorile $x_i^* = x_i + u_i(x_1, x_2, x_3, t)$; pentru componentele vitezei sale găsim deci

$$v_i = dx_i^*/dt = d(x_i + u_i)/dt = du_i/dt = \partial u_i/\partial t. \quad (1')$$

Dacă am face uz de coordonate euleriene, am avea $u_i = u_i[x_1^*(t), x_2^*(t), x_3^*(t), t]$ și deci

$$v_i = du_i/dt = \partial u_i/\partial t + (\partial u_i/\partial x_j^*)(\partial x_j^*/\partial t). \quad (1'')$$

Dacă produsele din (1'') sînt suficient de mici față de termenul liniar (ceea ce este adevărat pentru viteze de antrenare suficient de mici ale rețelei de coordonate materializate dx_j^*/dt), atunci (1'') coincide cu (1'). Notînd prin puncte dispuse superior derivatele *parțiale* în raport cu timpul, putem lua deci

$$v_i \cong \dot{u}_i. \quad (2)$$

Un raționament analog permite să obținem pentru componentele accelerației valorile \ddot{u}_i , astfel că *ecuațiile dinamice* (liniarizate) ale lui Cauchy iau forma

$$\sigma_{ij,j} + F_i - \rho \ddot{u}_i = 0. \quad (3)$$

(Acestea nu mai sînt ecuații numai în tensiuni!)

În ce privește legătura dintre tensiuni și deformații, raționamentele din capitolul 3 rămân valabile — coeficienții elastici depinzând însă și de caracterul și viteza procesului de deformație. Astfel, legea lui Hooke (3.3.18) rămâne valabilă, constantele λ și μ putând diferi însă mult față de cazul static.

Condițiile de existență ale unui potențial elastic rămân neschimbate: prezența termenului diferențial dK în (3.5.10) nu modifică condițiile în care $\delta\Phi$ este o diferențială.

Problemele fundamentale sînt pînă la un punct analoge cu cele formulate în § 2. Forțele de volum și funcțiile cunoscute ce intervin în datele la limită depind însă și de timp; în afară de aceasta, trebuie să ținem seama și de *condițiile inițiale* ale problemei, constînd în cunoașterea poziției și vitezei punctelor corpului la un moment inițial $t = t_0$.

Chestiunea existenței soluției este de o extremă dificultate. Dimpotrivă, teorema de unicitate se demonstrează ușor. Anume, construind — ca și în § 5 — o soluție-diferență, se vede că ea satisface legea lui Hooke, ecuațiile geometrice, și ecuațiile dinamice (3) omogene. Pe frontieră se obține, la orice moment t ,

$$[\sigma_n(\mathbf{u})] \cdot \mathbf{u}|_{\mathcal{S}} = 0. \quad (4)$$

În fine, la momentul inițial avem pentru soluția-diferență

$$\mathbf{u}|_{t=t_0} = d\mathbf{u}/dt|_{t=t_0} = 0. \quad (5)$$

Să evaluăm lucrul mecanic al forțelor exterioare în unitatea de timp. Întrucît problema este cu liniaritate geometrică, integrarea se efectuează pe \mathcal{V} , și avem

$$\begin{aligned} \dot{L} &= \lim_{\delta t \rightarrow 0} \delta L / \delta t = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \iiint_{\mathcal{V}} (\mathbf{F} + \delta \mathbf{F}) \cdot (\delta \mathbf{u} / \delta t) dV + \\ &+ \lim_{\delta t \rightarrow 0} \iint_{\mathcal{S}} (\mathbf{f} + \delta \mathbf{f}) \cdot (\delta \mathbf{u} / \delta t) dS, \end{aligned}$$

sau încă (vezi (3.6.1))

$$\dot{L} = \iiint_{\mathcal{V}} \mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{u}} dV + \iint_{\mathcal{S}} \mathbf{f} \cdot \dot{\mathbf{u}} dS. \quad (6)$$

Un calcul analog celui din (3.6.2) conduce la

$$\dot{L} = \iiint_{\mathcal{V}} (\sigma_{ij,i} + F_i) \dot{u}_i dV + \iiint_{\mathcal{V}} \sigma_{ij} \dot{u}_{i,j} dV, \quad (7)$$

de unde, ca în (3.6.3) — (3.6.7), și ținînd seama de (3), obținem

$$\dot{L} = \iiint_{\mathcal{V}} \rho \dot{u}_i \ddot{u}_i dV + \iiint_{\mathcal{V}} \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} dV. \quad (8)$$

Prima integrală din (8) se scrie \dot{K} , unde K este energia cinetică totală a corpului la momentul t :

$$K = \frac{1}{2} \iiint_V \rho (\dot{u}_i)^2 dV. \quad (9)$$

A doua integrală din (8) se poate pune sub forma

$$\iiint_V \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} dV = \iiint_V c_{ij}^{hk} \varepsilon_{hk} \dot{\varepsilon}_{ij} dV = \frac{d}{dt} \iiint_V \frac{1}{2} c_{ij}^{hk} \varepsilon_{hk} \varepsilon_{ij} dV. \quad (10)$$

Notînd cu Ψ energia potențială totală a corpului, avem deci din (8) — (10): $\dot{L} = \dot{\Psi} + \dot{K}$, sau încă, integrînd în raport cu timpul de la t_0 la t :

$$L - L_0 = \Psi - \Psi_0 + K - K_0. \quad (11)$$

Întrucît forțele exterioare sînt nule pentru soluția-diferență, avem $L = L_0 = 0$. Tot astfel din (5) rezultă și $\Psi_0 = K_0 = 0$. Prin urmare, (11) se reduce la

$$\Psi + K = 0 \quad (12)$$

la orice moment t . Or, energia cinetică este o formă patrativă pozitiv-definită. Dacă și potențialul elastic este o formă patrativă pozitiv-definită, urmează de aci

$$\Psi = K = 0 \quad (13)$$

la orice moment t , astfel că problema se reduce la o problemă de statică, pentru care teorema de unicitate este deja demonstrată.

Cele spuse relativ la metodele directă, inversă și semiinversă, rămîn valabile. Cu privire la principiul lui Saint-Venant, vezi indicațiile din § 6, pag. 142. În același cadru ca în § 8, se obțin ecuațiile dinamice ale lui Lamé, de exemplu sub forma

$$\mu \Delta u + (\lambda + \mu) \text{grad div } u + F - \rho \ddot{u} = 0. \quad (14)$$

Un sistem de ecuații numai în tensiuni nu poate fi construit, întrucît ecuațiile (3) conțin și componentele deplasării. Totuși există un analog al ecuațiilor Beltrami-Michell (vezi M. Iacovache [1]).

§ 12. STRUCTURA ECUAȚIILOR ELASTO-STATICII ȘI ELASTO-DINAMICII PENTRU CORPURI OMOGENE ȘI IZOTROPE

a) Clasificarea sistemelor de ecuații. Unde

Proprietățile soluțiilor ecuațiilor cu derivate parțiale și chiar modul de a le studia, depind esențial de proprietățile coeficienților ecuației considerate. Astfel, pentru ecuații liniare (sau chiar cvasiliniare) de ordinul al doilea, sîntem conduși la a considera ecuații de tip eliptic, parabolic și hiperbolic — cărora le corespund probleme teoretice cu totul diferite.

Pentru chestiunea clasificării sistemelor de ecuații, vezi C. Miranda [1], § 7.56 (cu indicații bibliografice, inclusiv relativ la ecuațiile elasti-

cității), și I. Petrovski [1]. Aci ne vom mărgini la a expune acea parte a punctului de vedere al lui J. Hadamard [1], capitolele 2 și 6, ce conduce la concluzia că ecuațiile elasto-staticii formează un sistem *eliptic*, și la a pune în evidență tipurile de unde posibile în cazul elasto-dinamicii. Chestiunea este amănunțit examinată — cu aplicații speciale la problemele hidrodinamicii — de C. Iacob [5], capitolele 12 și 13. Vezi de asemenea R. Courant [1], §§ 1.7, 3.2 și 6.4; A. Freudenthal și H. Geiringer [1], §§ 55—61; P. Germain [1], capitolul 10 și §§ 16.5 și 16.8; E. Goursat [2], capitolul 25; J. Hadamard [2], capitolele 1 și 5; R. Hill [6], § 2; L. Schwartz [2], capitolul 7; V. Smirnov [2], volumul 4, pct. 126, 127, 141 și 161—165; N. Teodorescu și V. Olaru [1], vol. 2; C. Truesdell și R. Toupin [1], §§ 172—194; G. Valiron [2], §§ 16.284 și 16.285.

Ideea *clasificării* sistemelor de ecuații este legată de ideea de *suprafață caracteristică*, la rîndul ei legată de tehnica de raționament specifică teoremei Cauchy-Kovalevskia (vezi de ex. V. Smirnov [2], vol 4, pct. 126 și 127).

Pentru început, să presupunem că avem de a face cu o singură ecuație cvasiliniară de ordinul al doilea

$$a_{ij} u_{,ij} + \dots = 0 \quad (1)$$

(unde punctele înlocuiesc termeni ce depind de x_i , u , $u_{,i}$, dar nu de $u_{,ij}$), cu date Cauchy speciale pe hiperplanul $x_1 = 0$. Teorema Cauchy-Kovalevskia permite construirea soluției în vecinătatea oricărui punct de pe acest hiperplan în care $a_{11} \neq 0$. Dacă datele Cauchy sînt formulate pe o hipersuprafață $\omega(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$, o schimbare de variabile în care se ia $x'_1 = \omega$ conduce la condiția ca pe hipersuprafața $\omega = 0$, ecuația

$$a_{ij} \omega_{,i} \omega_{,j} = 0 \quad (2)$$

să nu posede soluții. Orice funcție ω care verifică (2) definește o *suprafață caracteristică* a ecuației (1). Pentru date Cauchy pe suprafețe caracteristice, teorema Cauchy-Kovalevskia își pierde valabilitatea.

Din (1), (2) se vede că o ecuație de tip eliptic — așadar pentru care forma patratică $a_{ij} \alpha_i \alpha_j$ este pozitiv-definită — nu poate avea suprafețe caracteristice.

Să presupunem acum că o soluție u a ecuației (1) prezintă proprietăți de discontinuitate la traversarea unei suprafețe $f = 0$. Dacă $u \in C^1$, pe cele două fețe ale suprafeței $f = 0$ avem aceleași date Cauchy; dacă această suprafață nu este caracteristică, problema Cauchy corespunzătoare are o soluție analitică deplin determinată și unică în vecinătatea suprafeței, astfel încît discontinuități ale derivatelor sale nu sînt posibile. Prin urmare, a căuta discontinuități posibile ale soluțiilor de clasă C^1 ale ecuației (1), revine la a căuta soluțiile ecuației (2). O suprafață de discontinuitate la traversarea căreia primele $p-1$ derivate ale funcției rămîn continue, se numește *front de undă* (sau pe scurt *undă*) de ordin p . Pentru ecuațiile de ordinul al doilea, undele de ordin unu se numesc *unde de șoc*;

cele de ordinul al doilea se numesc *unde ordinare*. Bine înțeles, raționamentul de mai sus privind rolul suprafețelor caracteristice nu este valabil pentru undele de șoc; dimpotrivă, undele de ordin $p \geq 2$ pot fi căutate numai printre suprafețele caracteristice.

Interpretând una din variabilele independente drept variabilă-timp, orice suprafață $f = 0$ poate fi privită ca o suprafață mobilă într-un spațiu corespunzând variabilelor rămase. Se poate demonstra că viteza cu care această suprafață se mișcă — care se numește *viteză de propagare*, și care nu are nimic comun cu o eventuală viteză de deplasare a particulelor materiale — are valoarea

$$v = -\dot{f} / \sqrt{\sum f_{,i}^2}. \quad (3)$$

Pentru orice undă ordinară, avem deci

$$v = -\dot{\omega}/\alpha, \quad \alpha^2 = \sum_1^n \omega_{,i}^2. \quad (4)$$

Să considerăm acum un *sistem* de ecuații cvasiliniare de ordinul al doilea

$$a_{ij}^{hk} u_{j,hk} + \dots = 0 \quad (5)$$

pentru m funcții u_j . Același raționament ca mai sus arată că, pentru date Cauchy pe $x_1 = 0$, teorema Cauchy-Kovalevskaia își păstrează valabilitatea dacă

$$\text{Det } [a_{ij}^{11}] \neq 0 \quad (6)$$

pentru $x_1 = 0$. Pentru date Cauchy pe hipersuprafața $\omega(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$, aceeași schimbare de variabile independente conduce la un sistem de forma

$$a_{ij}^{hk} \omega_{,h} \omega_{,k} u_{j,x'_1 x'_1} + \dots = 0, \quad (7)$$

unde coeficienții

$$A_{ij} = a_{ij}^{hk} \omega_{,h} \omega_{,k} \quad (8)$$

au rolul unor coeficienți a_{ij}^{11} în noul sistem de coordonate. Condiția (6) devine $\text{Det } [A_{ij}] \neq 0$, și deci ecuația ce definește suprafețele caracteristice este

$$\text{Det } [A_{ij}] = 0. \quad (9)$$

Dacă (9) nu posedă soluții reale, sistemul se numește *de tip eliptic*.

b) Ecuațiile lui Lamé dinamice și statice

Să amintim acum ecuațiile lui Lamé dinamice sub forma (11.14):

$$\mu u_{i,hh} + (\lambda + \mu) u_{h,hi} - \rho \ddot{u}_i + F_i = 0.$$

Acest sistem conține 3 funcții de 4 variabile independente x_1, x_2, x_3, t . Să-l transcriem sub forma direct comparabilă cu (5):

$$\mu \delta_{hk} \delta_{ij} u_{j,hk} + (\lambda + \mu) \delta_{hj} \delta_{ki} u_{i,hk} - \rho \delta_{ij} \ddot{u}_j + \dots = 0, \quad (10)$$

astfel că avem (pentru $i, j, h, k = 1, 2, 3$):

$$a_{ij}^{hk} = \mu \delta_{hk} \delta_{ij} + (\lambda + \mu) \delta_{hj} \delta_{ki}, \quad a_{ij}^{44} = -\rho \delta_{ij}. \quad (11)$$

Introducînd (11) în (8), obținem pentru $i, j = 1, 2, 3$ (indici referitori la numărul de ecuații și funcții, nu de variabile independente):

$$A_{ij} = (\lambda + \mu) \omega_{,i} \omega_{,j} + \delta_{ij} \left[\mu \sum_1^3 \omega_{,h}^2 - \rho \dot{\omega}^2 \right]. \quad (12)$$

Notînd $\omega_{,i} = \alpha_i$ și $\sum_1^3 \omega_{,h}^2 = \alpha^2$, deducem din (9) și (12)

$$\text{Det } [A_{ij}] \equiv [(\lambda + 2\mu) \alpha^2 - \rho \dot{\omega}^2] [\mu \alpha^2 - \rho \dot{\omega}^2]^2 = 0. \quad (13)$$

Suprafețele de discontinuitate de ordin 2 și superior posibile, vor fi deci soluții ale ecuației

$$(\lambda + 2\mu) \alpha^2 - \rho \dot{\omega}^2 = 0, \quad (14)$$

sau ale ecuației

$$\mu \alpha^2 - \rho \dot{\omega}^2 = 0. \quad (15)$$

Vitezele de propagare respective vor fi egale cu

$$c_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}. \quad (16)$$

Așadar, într-un corp elastic omogen izotrop nemărginit, se pot propaga *numai* unde care sînt soluții ale ecuațiilor (14), (15), singurele viteze de propagare posibile fiind cele din (16). Dimpotrivă, în cazul corpurilor mărginite — în care un rol esențial îl joacă condițiile ce trebuie satisfăcute pe frontiera corpului și în care apar și unde *reflectate* — tabloul nu mai e nici pe departe atît de simplu.

Un studiu detaliat al comportării vectorului deplasare în vecinătatea suprafețelor caracteristice arată că în vecinătatea suprafețelor de tip (14), vectorul u este dirijat după normala la suprafața $\omega = 0$; dimpotrivă, în vecinătatea suprafețelor de tip (15), u e conținut în planul tangent la $\omega = 0$. În mod corespunzător, se spune că avem de-a face cu unde *longitudinale*, respectiv *transversale* (vezi de ex. V. Smirnov [2], vol. 4, pet. 165). Cantitățile (16) se numesc *vitezele sunetului* (longitudinală, respectiv transversală) în mediul elastic.

Dacă avem de-a face cu o bară cilindrică de tipul celei examinate în § 0.2 (vezi și § 3.4, pag. 90), putem să nu ținem seama în primă aproximație decît de deplasarea longitudinală u_3 și de componenta σ_{33}

a tensiunii (axa Ox_3 fiind aci paralelă cu generatoarele). Ecuațiile (11.3) — pentru $F = 0$ — se reduc la o ecuație unică $\sigma_{33,3} - \rho \ddot{u}_3 = 0$, sau încă, ținând seama de (0.2.5):

$$E u_{3,33} - \rho \ddot{u}_3 = 0. \quad (17)$$

Din (4) obținem viteza de propagare a undelor longitudinale într-o bară cilindrică

$$c_0 = \sqrt{E/\rho}, \quad (18)$$

care poate fi măsurată cu mare precizie, și permite determinarea lui E pe o cale cu totul diferită de cea descrisă în § 0.2.

Să calculăm — ca exemplu — vitezele c_1 , c_2 , c_0 pentru oțel. Ținând seama de valorile din tabela din § 3.4, pag. 95, precum și de valoarea densității (a nu se confunda cu greutatea specifică!) $\rho = (7,8 \text{ g/cm}^3) : (981 \text{ cm/sec}^2)$, se găsește

$$c_1 \cong 6100 \text{ m/sec}, \quad c_2 \cong 3300 \text{ m/sec}, \quad c_0 \cong 5050 \text{ m/sec}. \quad (19)$$

Să trecem acum la cazul ecuațiilor lui Lamé statice. Pentru aceasta, e suficient ca în raționamentele de mai sus să anulăm derivatele în raport cu timpul. Ecuația (13) este acum înlocuită cu

$$\mu^2 (\lambda + 2\mu) \alpha^6 = 0, \quad (20)$$

ceea ce arată că ecuațiile elasto-staticii sînt de tip *eliptic*. (Ecuațiile elasto-dinamicii sînt mai greu de caracterizat: vezi I. Petrovski [1], § 2.16, pct. 6.)

Cele de mai sus au o însemnătate considerabilă. Din ele rezultă că studiul matematic al problemei dinamice a teoriei elasticității este *principial* diferit de cel al problemei statice. În particular, se stabilește astfel o legătură de esență între ecuațiile elasto-staticii și ecuația lui Laplace (cea mai simplă ecuație de tip eliptic) pe de o parte, ecuațiile elasto-dinamicii și cea a propagării undelor (cea mai simplă ecuație de tip hiperbolic normal) pe de altă parte. (Vezi și mai departe, § 7.3.)

În cele ce urmează, ne vom fixa atenția exclusiv asupra problemelor *staticii*, pentru care numeroase rezultate și metode din teoria generală a ecuațiilor de tip eliptic pot fi aplicate sau generalizate. Vom reveni asupra acestui punct de vedere în capitolul 7. Subliniem totuși că legătura directă dintre ecuațiile elasto-staticii și ecuația lui Laplace deschide drumuri mai simple de studiu — valabile însă numai pentru corpurile omogene și izotrope, în timp ce proprietățile ce decurg din caracterul de elipticitate al sistemului de ecuații au o aplicabilitate mult mai largă.

c) Indicații bibliografice

Există probleme dinamice pentru care soluția poate fi obținută prin mijloace elementare. (Vezi de ex. M. Filonenko-Borodici [1], cap. 4; S. Timoshenko și J. Goodier [1], cap. 15.) Dar deosebirile de principiu ne obligă să excludem chestiunile de dinamică din cele ce urmează.

Pentru informații asupra acestor probleme, vezi M. Biot [4], capitolul 5; E. Kolsky [1] (inclusiv rezultate privind mediul plastic; ediția rusă are o bibliografie extinsă); A. Love [1], capitolele 12, 13, și 20; C. Pearson [2], capitolul 9; F. Pfeiffer [1]; I. Sneddon și D. Berry [1], capitolul E; K. Swainger [1]; O. Tedone [2], §§ 14 și 15; E. Trefftz [3], capitolul 9. Problema existenței și unicității soluțiilor este studiată, într-un cadru foarte general, de V. Kupradze [1]—[3].

Articole de sinteză, cu bogate indicații bibliografice, aparțin lui J. Duval [1] (unde de șoc); V. Gogoladze [1] (cu prezentarea lucrărilor fundamentale ale lui V. Smirnov și S. Sobolev); J. Goodier [4], §§ 10—12; R. Hill [6]; J. Miklowitz [1]; N. Zvolinski [1] (medii neomogene, medii-sandwich, difracție). Teoria neliniară este analizată în detaliu de C. Truesdell [5] (vezi și C. Truesdell și W. Noll [1], §§ 71—78, 90 și 102). Vezi de asemenea J. Craggs [1] și N. Cristescu [1] (corpuri plastice); S. Hunter [1] (corpuri visco-elastice); M. Musgrave [1] (corpuri anizotrope).

Transformările integrale sînt folosite pentru studiul a diferite probleme concrete de către H. Carslaw și J. Jaeger [1], capitolul 7; W. Nowacki [1] (inclusiv pentru medii viscoplastice și pentru probleme de termo-elasticitate dinamică); I. Sneddon [1], capitolul 4 și § 9.50.

Pentru problema propagării undelor elastice în bare și plăci, vezi indicațiile date în § 5.1, pag. 165 și § 6.1, pag. 349.

Pentru chestiunile legate de seismologie, inclusiv chestiunea undelor ce se propagă în vecinătatea frontierei unei sfere sau a unui semi-spațiu, vezi K. Bullen [1]; M. Ewing și F. Press [1]; M. Hayes și R. Rivlin [1] (teorie neliniară).

Pentru problemele privind în special oscilațiile elastice, vezi V. Kupradze [1]; W. Nowacki [1], capitolul 12; Iu. Panovko și I. Gubanova [1] (partea a doua).

CAPITOLUL 5

PROBLEMA ANTIPLANĂ

§ 1. GENERALITĂȚI

Din cele mai vechi timpuri au găsit utilizare corpuri ca bare, cabluri, lanțuri etc. Forma lor cilindrică a făcut posibilă calcularea stării lor de solicitare, prin reducerea datelor problemei la date relative la o linie geometrică simplă în care era presupus concentrat materialul. Problemele relative la astfel de corpuri pot fi numite *unidimensionale*. Studiul lor a stat la originile rezistenței materialelor și ulterior a constituit un adevărat „laborator de încercări” pentru metodele generale ale teoriei elasticității.

Ne vom ocupa aci de cele mai simple probleme din această categorie : *studiul micilor deplasări și micilor deformări ale barelor cilindrice zvelte, izotrope și omogene, cu suprafața laterală liberă.*

Probleme apropiate, ca studiul barelor necilindrice ; studiul marilor deplasări ale barelor cilindrice ; flambajul barelor ; torsiunea și încovoierea barelor neomogene sau anizotrope ; echilibrul barelor curbe, al barelor cu pereți subțiri, al barelor solificate pe suprafața laterală, și altele, rămân înafara acestui cadru.

Pentru studiul acestor chestiuni, vezi de exemplu N. Beliaev [2], capitolele 12—20, 30 și 31 ; Gh. Buzdugan [1], capitolele 2, 5, 6, 7 ; G. Djanelidze [4], [5] ; J. Geckeler [1], capitolele 2—5 și 10 ; P. Germain [1], capitolul 9 și § 10.2 ; R.L'Hermite [1], capitolele 5—7 ; A. Love [1], capitolele 16, 18, 19 și 21 ; A. Lurie [4], capitolul 7 ; N. Mushelişvili [5], capitolul 7 ; E. Popov [1] ; Iu. Rabotnov [2], capitolele 10 și 11 ; K. Solianik-Krasa [1] ; G. Valov [1], [2]. Teoria modernă neliniară a corpurilor numite „orientate” (bare, plăci) e considerată în detaliu de J. Eiseley [1] ; J. Ericksen și C. Truesdell [1] ; A. Green [1] ; C. Truesdell și R. Toupin [1], §§ 60—64. Pentru studiul barelor cu pereți subțiri, vezi J. Nowinski [2]. Pentru structurile formate din bare, vezi J. Argyris [1].

Pentru problemele dinamice (propagarea undelor elastice în bare) vezi articolele de analiză ale lui H. Abramsohn et al. [1] ; W. Green [1] ; J. Miklowitz [2] (cele două din urmă avînd ca punct de plecare lucrările clasice ale lui L. Pochhammer [1], [2] și Ch. Chree [1]—[3], și mergînd pînă la rezultatele cele mai recente) ; R. Rosenfeld și J. Miklowitz [1]. Vezi încă și V. Uteşeva [1] ; R. Rosenfeld și J. Miklowitz [2].

Din punct de vedere matematic, problemele unidimensionale sînt precedate de problemele elementare (vezi finele § 4.9). Asupra unora din ele ne vom opri în cele ce urmează. Pentru alte exemple, vezi I. Sokolnikoff [2], §§ 33—34 ; S. Timoshenko și J. Goodier [1], capitolul 10.

Timp îndelungat (la G. Galilei, J. Bernoulli, L. Euler) studiul problemelor privitoare la bare și alte corpuri similare, nu a fost legat de cel

al ecuațiilor elasticității. Primele încercări de a construi teoria barelor dintr-un punct de vedere riguros aparțin lui C. Coulomb, L. Navier, A. Cauchy. Dar abia B. de Saint-Venant [1], [2] (retipărit în [4]) a abordat cu succes chestiunea¹⁾. Pentru ansamblul acestor chestiuni, se păstrează și azi în literatură numele de problema lui *Saint-Venant*. Denumirea de *problemă antiplană* își va găsi justificarea în § 3, pag. 173.

Chiar și cele mai simple din problemele referitoare la barele cilindrice zvelte au mare importanță practică: arbori de transmisie, numeroase elemente de construcții (traverse, tuburi), în primă aproximație chiar un pod în ansamblul său, un baraj, o navă, un fuselaj sau o aripă de avion — pot fi privite ca corpuri cilindrice zvelte.

Problema antiplană permite abordarea, într-un cadru relativ simplu, a ecuațiilor teoriei, făcându-ne să înțelegem unele din proprietățile lor generale. În particular, ea permite utilizarea sistematică a metodei semiinverse și a principiului lui Saint-Venant.

În esență problema antiplană conduce la probleme Dirichlet sau Neumann pentru ecuația lui Laplace în două variabile. Dezvoltarea modernă a subiectului utilizează aparatul teoriei funcțiilor de o variabilă complexă — ceea ce a fost prevăzut încă de Saint-Venant, dar a luat proporțiile actuale grație rezultatelor lui N. Muskhelișvili [5], capitolul 7 (pentru problema torsiunii) și R. Capildeo [1] și L. Milne-Thomson [1], [3] (problema încovoierii). Menționăm și importante rezultate ale lui D. Șerman [7]—[9] pe linia utilizării ecuațiilor integrale. În legătură cu unele aspecte aplicative, este utilă consultarea unor cărți de rezistența materialelor: N. Beliaev [2]; Gh. Buzdugan [1]; M. Filonenko-Borodici et al. [1]; A. Iliușin și V. Lenskii [1]; R. L'Hermite [1]; Iu. Rabotnov [2]. Din literatura generală, vezi capitolele corespunzătoare în tratatele lui I. Sokolnikoff [2], S. Timošenko și J. Goodier [1].

În cele ce urmează vom prezenta problema antiplană ca un ansamblu unitar. Acest punct de vedere (L. Solomon [8], [9]) o apropie totodată de studiul problemei plane. Vom face uz de ecuațiile în tensiuni, ceea ce prezintă avantaje clare în comparație cu ecuațiile în deplasări. Într-adevăr, ecuațiile de echilibru rămân valabile pentru corpuri anizotrope, ne-omogene, chiar pentru corpuri în stare plastică. Iar aceasta deschide diferite perspective de generalizare, prin simpla înlocuire a ecuațiilor de compatibilitate cu relațiile corespunzătoare fiecărui caz de tratat. (Vezi de exemplu L. Milne-Thomson [3], cap. 6 și 7; vezi și R. Schile și R. Sierakowski [1]; E. Socs [1]; pentru problema plană, vezi punctul de vedere similar în § 6.6, pag. 388).

¹⁾ Lucrărilor lui Saint-Venant le-au urmat cercetări analoge asupra problemelor bidimensionale (plăci subțiri, plane și curbe), fiind astfel asimilate de teoria elasticității probleme a căror soluție era dată până atunci numai în cadrul rezistenței materialelor.

§ 2. FORMA ȘI SOLICITAREA BAREI CILINDRICE ZVELTE

a) Notății

Să considerăm o bară cilindrică omogenă și izotropă, supusă acțiunii unui sistem de sarcini superficiale aplicate pe secțiunile de capăt (baze), și avînd suprafața laterală liberă. Orice secțiune normală a barei constituie

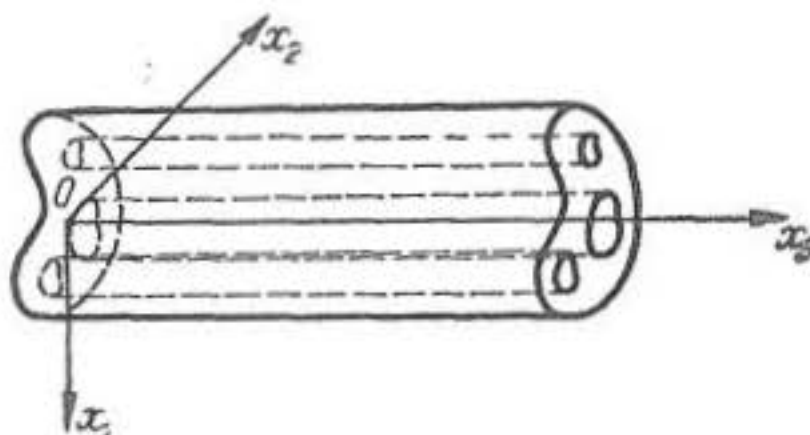


Fig. 5.2.1

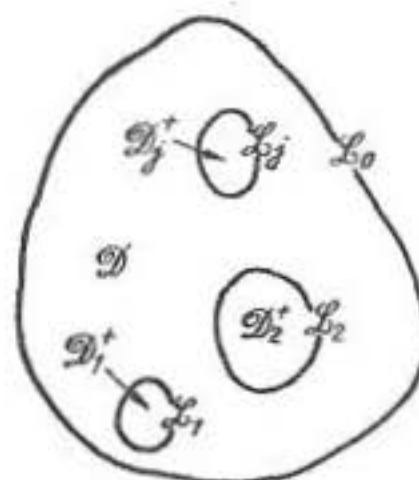


Fig. 5.2.2

un domeniu bidimensional \mathcal{D} , mărginit, de frontieră \mathcal{L} . Această secțiune se numește și *profil*. (Vezi și § A.3.) Dimensiunile bazelor sînt mici în raport cu lungimea barei: $d(\mathcal{D}) \ll l$. Forțele de volum sînt presupuse nule.

Axa Ox_3 , este paralelă cu generatoarele; originea O va fi situată pe una din baze, astfel că ecuațiile acestora vor fi $x_3 = 0$ și $x_3 = l$. Sistemul de axe este drept.

Toate secțiunile $x_3 = \text{const.}$ se vor nota — cînd nu e cazul să distingem — cu \mathcal{D} . Prin „origine” și „axe” în \mathcal{D} , vom înțelege proiecția originii și a axelor pe domeniul \mathcal{D} .

b) Sarcina

Presupunerea $F = 0$ corespunde faptului că adesea efectul forțelor de volum (mai ales al forței gravitaționale) e neglijabil față de efectul solicitărilor pe baze.

După principiul lui Saint-Venant (vezi § 4.6), dacă înlocuim forțele date pe baze printr-un sistem static echivalent, starea elastică a barei zvelte se modifică numai în apropierea bazelor. Așadar, depărtarea de baze joacă un rol egalizator, apropiind deplasările și tensiunile de anumite valori-standard, care corespund unor anumite distribuții a tensiunilor pe baze, și permit rezolvarea exactă a ecuațiilor elasticității. Structura acestor soluții-standard depinde în primul rînd de forma domeniului \mathcal{D} .

În acest sens, vom *caracteriza* forțele superficiale nu cu ajutorul unei densități de sarcină (4.2.2) pe baze, ci prin rezultanta \mathcal{R} și momentul resultant \mathcal{M} al acestei sarcini în raport cu un punct oarecare (x'_1, x'_2, l) .

Vom ignora deci distribuția reală a sarcinii, de altfel greu de măsurat efectiv, și ne vom fixa atenția asupra *torsorului* ei. Prevenim că în acest sens vom vorbi despre bara acționată de o forță normală, de un cuplu etc.; acesta este un mod de a vorbi care nu indică de fel că am avea de-a face cu sarcini concentrate.

Să amintim aci unele proprietăți ale sistemelor de forțe (vezi de ex. V. Vâlcovici et al. [1], cap. 4; Ch. de la Vallée-Poussin [1], §§ 24, 25 și 185).

Un sistem de forțe poate fi redus la sistemul format dintr-o forță \mathcal{R} egală cu rezultanta sistemului și aplicată într-un punct x , și un cuplu de moment \mathcal{M} , egal cu momentul resultant al sistemului în raport cu același punct x (centrul de reducere). Schimbînd punctul x cu x' , rezultanta rămîne neschimbată, dar momentul resultant se modifică cu cantitatea $+(x - x') \times \mathcal{R}$. Dacă x se deplasează pe suportul lui \mathcal{R} , momentul resultant nu se schimbă.

Produsul scalar $\mathcal{R} \cdot \mathcal{M}$ nu depinde de alegerea centrului de reducere. Dacă $\mathcal{R} = 0$, atunci nici \mathcal{M} nu depinde de această alegere.

Există o dreaptă (*axa centrală* a sistemului) paralelă cu \mathcal{R} și definită prin aceea că momentul \mathcal{M} în raport cu orice punct x de pe această axă este paralel cu \mathcal{R} , și are modulul minim. Ecuațiile acestei drepte sînt evidente

$$\frac{\mathcal{M}_1^0 - (x_2 \mathcal{R}_3 - x_3 \mathcal{R}_2)}{\mathcal{R}_1} = \frac{\mathcal{M}_2^0 - (x_3 \mathcal{R}_1 - x_1 \mathcal{R}_3)}{\mathcal{R}_2} = \frac{\mathcal{M}_3^0 - (x_1 \mathcal{R}_2 - x_2 \mathcal{R}_1)}{\mathcal{R}_3}, \quad (1)$$

unde $\mathcal{M}_1^0, \mathcal{M}_2^0, \mathcal{M}_3^0$ sînt componentele momentului resultant față de originea O .

Dacă $\mathcal{R} \neq 0$, și dacă pentru un punct oarecare avem $\mathcal{R} \perp \mathcal{M}$, atunci pe axa centrală $\mathcal{M} = 0$ (căci $\mathcal{R} \cdot \mathcal{M} = 0$, și pe axa centrală $\mathcal{M} \parallel \mathcal{R}$). În acest caz, sistemul este deci static echivalent cu o forță aplicată într-un punct oarecare al axei centrale, și dirijată în lungul acesteia; axa centrală însăși poate fi acum definită ca loc al punctelor în raport cu care $\mathcal{M} = 0$.

Cele de mai sus sugerează construcția următoare. Să descompunem fiecare forță ce acționează pe baza $x_3 = l$, într-o componentă tangențială și una normală. Sistemul sarcinilor tangențiale are deci o rezultantă $(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, 0)$ și un moment resultant $(0, 0, \mathcal{M}_3)$. Pe de altă parte, sistemul sarcinilor normale are o rezultantă $(0, 0, \mathcal{R}_3)$ și un moment resultant $(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, 0)$. Pentru ambele sisteme, momentul resultant este perpendicular pe rezultantă; deci, dacă rezultantele sînt diferite de zero, ambele sisteme sînt static echivalente cu cîte o forță dirijată în lungul unei drepte din planul bazei, respectiv perpendicular pe acest plan. (În general, aceste drepte nu sînt concurente.)

Din (1) pentru $\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_2 = 0$, obținem ecuațiile axei centrale pentru sistemul sarcinilor normale :

$$\mathcal{M}_1^0 - x_2 \mathcal{R}_3 = 0, \quad \mathcal{M}_2^0 + x_1 \mathcal{R}_3 = 0 \quad (2)$$

(o paralelă la Ox_3 , dusă prin punctul $-\mathcal{M}_2^0/\mathcal{R}_3, \mathcal{M}_1^0/\mathcal{R}_3$).

Pentru sistemul sarcinilor tangențiale găsim

$$\mathcal{R}_2 x_1 - \mathcal{R}_1 x_2 - \mathcal{M}_3^0 = 0, \quad x_3 = \text{const.} \quad (3)$$

(o dreaptă în planul secțiunii).

După cum vom vedea, problemele corespunzătoare acestor două sisteme de forțe sînt *esențial* diferite între ele.

Baza $x_3 = 0$ trebuie evident să fie supusă unor sarcini care, împreună cu cele de pe baza $x_3 = l$, să formeze un sistem echivalent cu zero.

Dacă baza $x_3 = l$ este solicitată de un sistem avînd rezultanta \mathcal{R} și momentul resultant \mathcal{M}^0 față de originea din planul ei, atunci pe baza $x_3 = 0$ trebuie să fie aplicat un sistem de forțe de rezultantă $-\mathcal{R}$ și de moment resultant avînd componentele $(-\mathcal{M}_1^0 + l\mathcal{R}_2, -\mathcal{M}_2^0 - l\mathcal{R}_1, -\mathcal{M}_3^0)$ față de origine. Vom spune că baza $x_3 = 0$ este *fixată*²⁾. Sînt frecvente cazurile în care ea este supusă la sarcini cu caracterul unor reacțiuni (de pildă baza $x_3 = 0$ fixată într-un corp masiv, rigid sau nu).

c) Stări de deformație ale barei

Ne vom fixa atenția asupra cantităților $u_i, \varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}$ considerate în secțiunile normale $x_3 = \text{const.}$ ale barei, pe care le vom numi pe scurt *secțiuni*. Cu ajutorul formulelor din capitolele 1—3 putem calcula deplasările, deformațiile și tensiunile în orice punct, după orice direcție, și pe orice element de suprafață.

În fiecare punct al unei secțiuni se pot pune în evidență cele trei componente ale deplasării; în vecinătatea fiecărui punct, se pot considera cele trei componente ale rotației locale. Întrucît $d(\mathcal{D}) \ll l$, este firesc să caracterizăm *comportarea de ansamblu a secțiunilor* prin *mediile* acestor mărimi. Aceste medii — notate cu un indice „m” — sînt integrale pe \mathcal{D} ale mărimilor corespunzătoare, raportate la aria D .

Întrucît nu ne interesează deplasările rigide ale barei, ci numai deplasările și rotațiile secțiunilor *unele în raport cu altele* (deplasări și rotații *relative*), rezultă că va trebui să calculăm derivatele în raport cu x_3 ale mărimilor considerate. Derivarea în raport cu x_3 se poate efectua sub semnul integralelor în raport cu $dx_1 dx_2$ (mărimile ce se va nota dD).

Astfel sîntem conduși la a considera *patru stări distincte*.

²⁾ Aceasta nu coincide cu noțiunea de porțiune fixă a frontierei, în sensul din § 4.2, punctul b. Vezi și mai departe § 5.6, pag. 186.

1° Dacă secțiunile se deplasează în medie unele față de altele în lungul axei Ox_3 a barei, așadar dacă

$$\frac{d}{dx_3} \frac{1}{D} \iint_{\mathcal{D}} u_3 \, dD = \varepsilon_{33}^m \neq 0, \quad (4)$$

vom spune că ele sînt supuse la *întindere* sau *compresiune*, după cum $\varepsilon_{33}^m > 0$ sau $\varepsilon_{33}^m < 0$.

Deplasarea în medie a secțiunilor unele față de altele după direcțiile Ox_1 , respectiv Ox_2 , impune considerarea integralelor

$$\frac{d}{dx_3} \frac{1}{D} \iint_{\mathcal{D}} u_1 \, dD, \quad \frac{d}{dx_3} \frac{1}{D} \iint_{\mathcal{D}} u_2 \, dD.$$

Aceste deplasări provin însă din suprapunerea a două fenomene. Pe de o parte, deplasarea u_1 (sau u_2) poate varia de la o secțiune la alta pentru că secțiunile *alunecă* unele față de altele, rămînînd paralele între ele; pe de altă parte ele se pot *roti* în jurul unor axe (paralele cu Ox_2 , respectiv Ox_1). Cel dintîi este un fenomen de deformare. Dar cel de al doilea apare și în cazul unei deplasări rigide (rotația corpului în bloc conduce la derivate $u_{1,3}$ și $u_{2,3}$ diferite de zero și constante: vezi de exemplu (1.9.16)).

Astfel, sîntem conduși să considerăm descompunerile

$$u_{1,3} = \varepsilon_{13} + \omega_{13}, \quad u_{2,3} = \varepsilon_{23} + \omega_{23}$$

(vezi (1.5.6)); să reținem drept caracteristice ale anumitor stări ale secțiunilor alunecările medii: și să calculăm *derivatele* în raport cu x_3 ale rotațiilor medii. De aci decurg definițiile 2° și 3°.

2° Dacă secțiunile sînt supuse la deplasări medii relative (din care am eliminat eventuali termeni proveniți din rotațiile locale) nenule paralele cu axele Ox_1 , respectiv Ox_2 , adică dacă

$$\frac{1}{2D} \iint_{\mathcal{D}} (u_{1,3} + u_{3,1}) \, dD = \varepsilon_{13}^m \neq 0, \quad (5)$$

$$\frac{1}{2D} \iint_{\mathcal{D}} (u_{2,3} + u_{3,2}) \, dD = \varepsilon_{23}^m \neq 0,$$

atunci vom spune că ele sînt supuse la *alunecare* (sau *forfecare*).

3° Dacă secțiunile sînt supuse la rotații medii relative în jurul unor axe paralele cu Ox_2 , respectiv Ox_1 , adică dacă

$$\begin{aligned} \frac{1}{2D} \frac{d}{dx_3} \iint_D (u_{1,3} - u_{3,1}) dD &= \omega_{13,3}^m \neq 0, \\ \frac{1}{2D} \frac{d}{dx_3} \iint_D (u_{2,3} - u_{3,2}) dD &= \omega_{23,3}^m \neq 0, \end{aligned} \quad (6)$$

atunci vom spune că ele sînt supuse la *încovoiere*.

4° În fine, similar cu (6), dacă secțiunile se rotesc în medie unele față de altele în jurul unor axe paralele cu Ox_3 , așadar dacă

$$\frac{1}{2D} \frac{d}{dx_3} \iint_D (u_{1,2} - u_{2,1}) dD = \omega_{12,3}^m \neq 0, \quad (7)$$

atunci vom spune că ele sînt supuse la *torsiune*.

În general, vom avea de calculat parametri ε_{3i}^m , $\omega_{12,3}^m$, $\omega_{31,3}^m$ și $\omega_{32,3}^m$ — așadar mărimile din (4), (5), (7), și cantitățile din (6) cu semnul schimbat. Acești parametri pot fi priviți drept caracteristice ale „ratelor” relative de deplasare și rotație ale secțiunilor. Semnificația lor este ilustrată de figură:

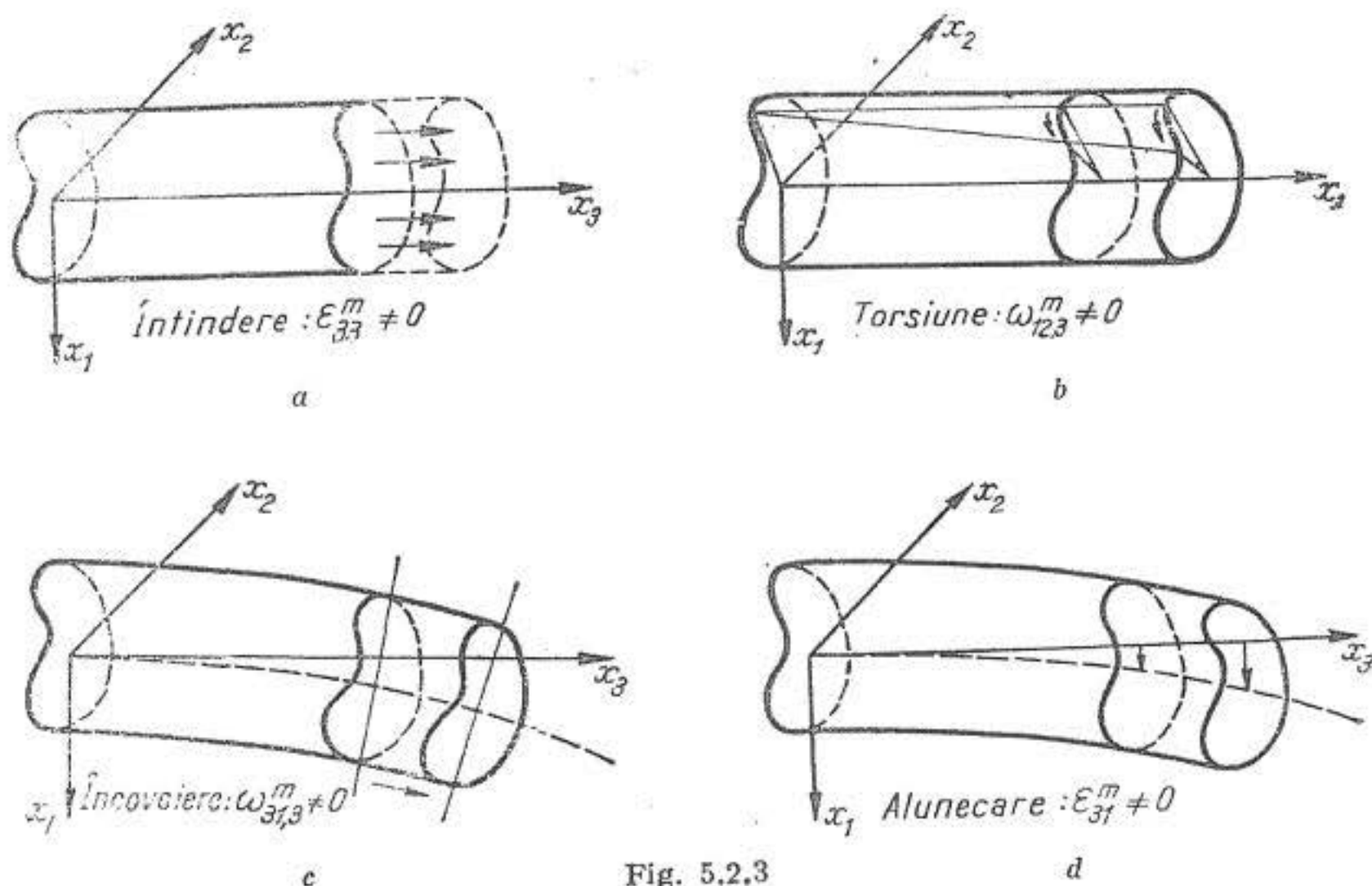


Fig. 5.2.3

În practică, aceste stări se întâlnesc *suprapuse*. Studiul lor separat are sens numai în cadrul unei teorii liniare. (Vezi § 4.2, pag. 129.)

§ 3. ECUAȚIILE PROBLEMEI ANTIPLANE

a) Ecuații și ipoteze de lucru

Începem prin a reaminti aici ecuațiile statice omogene (4.1.2)

$$\sigma_{ij,j} = 0 \quad (1)$$

și ecuațiile de compatibilitate omogene ce rezultă din (4.9.6) :

$$\Delta \sigma_{ij} + (1 + \nu)^{-1} \Theta_{,ij} = 0, \quad (\Theta = \sigma_{kk}). \quad (2)$$

Vom face uz de legea lui Hooke sub forma (3.4.19) :

$$\varepsilon_{ii} = \frac{1}{E} [\sigma_{ii} - \nu(\sigma_{jj} + \sigma_{kk})], \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1 + \nu}{E} \sigma_{ij} = \frac{1}{2\mu} \sigma_{ij}, \quad (3)$$

unde i, j, k iau valorile 1, 2, 3 sau permutări circulare ale lor.

Ecuațiile geometrice (4.1.1)

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (4)$$

vor fi întotdeauna integrabile. Componentele rotației sînt date de (1.5.5)

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} - u_{j,i}). \quad (5)$$

În fine, amintim încă relațiile lui Cauchy (2.3.3)

$$\sigma_{ni} = \sigma_{ij} n_j. \quad (6)$$

Întrucît ne referim mereu la secțiuni normale, vom scrie simplu „tensiune într-un punct”, subînțelegînd tensiunea *pe elementul de normală* Ox_3 ce conține acel punct.

Din (6) se obțin condițiile la limită. Pentru $x_3 = l$ avem

$$\sigma_{31} = f_1, \quad \sigma_{32} = f_2, \quad \sigma_{33} = f_3, \quad (7)$$

unde cunoaștem numai rezultanta și momentul resultant corespunzător acestor sarcini.

Pe suprafața laterală avem $n_3 = 0$, sau, întrucît această suprafață este liberă :

$$\sigma_{11} n_1 + \sigma_{12} n_2 = 0, \quad \sigma_{12} n_1 + \sigma_{22} n_2 = 0, \quad \sigma_{31} n_1 + \sigma_{32} n_2 = 0. \quad (8)$$

Pe baza $x_3 = 0$, condițiile sînt de același tip cu (7); în fapt, ele nu vor fi utilizate (vezi mai departe, § 10).

Problema antiplană constă în rezolvarea sistemului (1), (2) cu condițiile la limită (8) și cu cele ce vor rezulta din (7).

Configurația specială a corpului, și faptul că suprafața laterală este liberă, sugerează posibilitatea de a neglija anumite componente ale tensiunii. Astfel, pe direcții paralele cu Ox_1 sau Ox_2 , este evident că pe frontieră avem $\sigma_{11} = \sigma_{12} = \sigma_{22} = 0$. Întrucît avem $d(\mathcal{D}) \ll l$, nu ne putem aștepta la apariția de astfel de componente ale tensiunii cu valori importante în interior. În schimb, componentele σ_{3i} nu pot fi neglijate, întrucît aceasta ar contrazice condițiile (7). De aci urmează, *ca ipoteză de lucru*, presupunerea — pe care o vom numi *ipoteza lui Clebsch* —:

$$\sigma_{11} = \sigma_{12} = \sigma_{22} = 0. \quad (9)$$

Din (2.5.14) se vede că starea prezumată este o *stare de tensiune antiplană*.

Ipoteza (9) echivalează cu admiterea unui anumit *model* al barei: se presupune că bara este alcătuită din fibre longitudinale, fibre care pot fi supuse la întindere și compresiune (întrucît σ_{33} nu este identic nulă), și care sînt solidare între ele în sens longitudinal (întrucît în genere σ_{31} și σ_{32} nu sînt identic nule, așadar fibrele nu pot aluneca liber unele pe celelalte). În schimb, se neglijează tensiunile normale (transversale) între fibre, precum și tensiunile de alunecare σ_{12} (în virtutea micii grosimi a barei și a absenței de sarcini pe suprafața laterală, care ar putea genera astfel de tensiuni).

Alegerea acestui model constituie desigur o simplificare a repartiției reale a tensiunilor — simplificare totuși mai puțin grosieră decît cele acceptate de rezistența materialelor.

A. Clebsch și B. de Saint-Venant [1], capitolul 2, au încercat să justifice relațiile (9). Dar cea mai puternică justificare a acestei ipoteze o constituie faptul că cu ajutorul ei se găsește soluția problemei — *unică* în virtutea teoremei lui Kirchhoff pentru un anumit sistem de sarcini static echivalent cu (7), și pe care, în virtutea principiului lui Saint-Venant, o putem accepta și pentru sistemul (7) dat. (Amintim că lucrările lui Saint-Venant sînt *anterioare* teoremei lui Kirchhoff.)

OBSERVAȚIE. Problema cilindrului zvelt solicitat la capete este numai o *realizare* a stării antiplane. Se pot da *definiții* ale acestei stări, ceva mai generale decît (9), utile mai cu seamă în cazul corpurilor anizotrope (vezi L. Milne-Thomson [3], § 2.01), și se pot considera probleme antiplane de altă natură (ibid., § 3.8).

b) Descompunerea sistemului de ecuații

Să examinăm acum sistematic urmările ipotezei (9).

Ținînd seama de ea în ecuațiile (1), obținem

$$\sigma_{31,3} = 0, \quad \sigma_{32,3} = 0, \quad \sigma_{31,1} + \sigma_{32,2} + \sigma_{33,3} = 0, \quad (10)$$

de unde conchidem că σ_{31} și σ_{32} sînt funcții numai de x_1, x_2 , iar σ_{33} este o funcție liniară de x_3 .

Întrucît acum avem $\Theta = \sigma_{33}$, trei din ecuațiile (2) se reduc la

$$\sigma_{33,11} = 0, \quad \sigma_{33,22} = 0, \quad \sigma_{33,12} = 0, \quad (11)$$

de unde conchidem că σ_{33} este totodată liniară în x_1 și x_2 , și nu conține termen în $x_1 x_2$. Prin urmare, avem

$$\sigma_{33} = a_1 x_1 x_3 + a_2 x_2 x_3 + a_3 x_1 + a_4 x_2 + a_5 x_3 + a_6, \quad (12)$$

unde a_i sînt constante reale, încă necunoscute.

În locul termenilor în x_3 (nuli pe baza $x_3 = 0$), să punem în evidență termeni în $x_3 - l$ (nuli pe baza $x_3 = l$). Să punem în evidență și coordonatele (x_1^0, x_2^0) ale centrului de greutate al secțiunilor. Cu aceasta (12) devine

$$\sigma_{33} = (x_3 - l) [\alpha_1 (x_1 - x_1^0) + \alpha_2 (x_2 - x_2^0)] + \beta_1 (x_1 - x_1^0) + \beta_2 (x_2 - x_2^0) + \beta_3, \quad (13)$$

unde termenul de forma $\alpha_3 (x_3 - l)$ lipsește: un astfel de termen ar corespunde unei sarcini nule pe baza $x_3 = l$, și constante și diferite de zero pe baza $x_3 = 0$, așadar unei sarcini sub acțiunea căreia bara nu se poate afla în echilibru.

Ecuația (2) pentru $i = j = 3$ rezultă acum verificată identic.

Introducînd (13) în cele două ecuații (2) ce mai rămîn, precum și în a treia ecuație (10), obținem în definitiv un sistem de trei ecuații:

$$\begin{aligned} \sigma_{31,1} + \sigma_{32,2} + \alpha_1 (x_1 - x_1^0) + \alpha_2 (x_2 - x_2^0) &= 0, \\ \Delta \sigma_{31} + (1 + \nu)^{-1} \alpha_1 &= 0, \quad \Delta \sigma_{32} + (1 + \nu)^{-1} \alpha_2 = 0, \end{aligned} \quad (14)$$

unde σ_{31} , σ_{32} sînt funcții de x_1 , x_2 .

Sistemul complet (1), (2) a fost astfel descompus într-un sistem pentru σ_{33} — permițînd determinarea sa sub forma elementară (13) —, și sistemul (14).

Ecuațiile fizico-geometrice se obțin introducînd relațiile geometrice (4) în legea lui Hooke (3) și ținînd seama de ipoteza (9):

$$\begin{aligned} u_{1,1} &= -\frac{\nu}{E} \sigma_{33}, \quad u_{2,2} = -\frac{\nu}{E} \sigma_{33}, \quad u_{3,3} = \frac{1}{E} \sigma_{33}, \\ u_{1,2} + u_{2,1} &= 0, \quad u_{2,3} + u_{3,2} = \frac{1}{\mu} \sigma_{32}, \quad u_{3,1} + u_{1,3} = \frac{1}{\mu} \sigma_{31}. \end{aligned} \quad (15)$$

Integrarea ecuațiilor (15) este întotdeauna posibilă.

Condițiile la limită se obțin introducând (9) în (8), și ținând seama că sînt cunoscute rezultanta și momentul resultant al funcțiilor (7). Din (8) se obține o singură condiție relativă la funcțiile din (14):

$$\sigma_{31} n_1 + \sigma_{32} n_2 = 0. \quad (16)$$

Întrucît funcțiile din (14), coeficienții, și condiția (16) sînt evident independente de x_3 , rezultă că problema integrării sistemului (14) cu condiția la limită (16) poate fi studiată în secțiunea \mathcal{D} a barei, iar condiția la limită (16) trebuie să fie verificată pe $\mathcal{L} = \text{fr } \mathcal{D}$. (Dimpotrivă, variabila x_3 este prezentă în (15).)

Pentru a putea utiliza datele la limită (7), să calculăm rezultanta și momentul resultant al tensiunilor ce apar pe baza $x_3 = l$, sau chiar, mai general, pe o secțiune oarecare $x_3 = \text{const.}$

Vom nota componentele rezultantei cu

$$\mathcal{R}_i = \iint_{\mathcal{D}} \sigma_{3i} dD, \quad i = 1, 2, 3; \quad (17)$$

componentele momentului resultant în raport cu un centru de reducere (x'_1, x'_2, x'_3) vor fi

$$\begin{aligned} \mathcal{M}'_1 &= \iint_{\mathcal{D}} [(x_2 - x'_2) \sigma_{33} - (x_3 - x'_3) \sigma_{32}] dD, \\ \mathcal{M}'_2 &= \iint_{\mathcal{D}} [(x_3 - x'_3) \sigma_{31} - (x_1 - x'_1) \sigma_{33}] dD, \\ \mathcal{M}'_3 &= \iint_{\mathcal{D}} [(x_1 - x'_1) \sigma_{32} - (x_2 - x'_2) \sigma_{31}] dD. \end{aligned} \quad (18)$$

Aceste integrale se calculează ușor pe orice secțiune \mathcal{D} , întrucît σ_{31}, σ_{32} nu depind de x_3 , iar termenul funcție de x_3 din σ_{33} iese în factor.

Vom alege întotdeauna centrul de reducere în chiar secțiunea pe care acționează tensiunile considerate. Luînd deci $x'_3 = x_3$ în (18) obținem

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_1(x_3) &= \iint_{\mathcal{D}} (x_2 - x'_2) \sigma_{33} dD, \quad \mathcal{M}_2(x_3) = - \iint_{\mathcal{D}} (x_1 - x'_1) \sigma_{33} dD, \\ \mathcal{M}_3 &= \iint_{\mathcal{D}} [(x_1 - x'_1) \sigma_{32} - (x_2 - x'_2) \sigma_{31}] dD. \end{aligned} \quad (19)$$

\mathcal{R}_1 și \mathcal{R}_2 depind evident de σ_{31} , σ_{32} . Pentru determinarea lor, nu este însă necesară rezolvarea sistemului (14). Într-adevăr, înmulțind prima ecuație (14) cu x_1 și integrând pe \mathcal{D} , avem

$$\iint_{\mathcal{D}} [(x_1 \sigma_{31})_{,1} + (x_2 \sigma_{32})_{,2} - \sigma_{31}] dD + \alpha_1 \iint_{\mathcal{D}} x_1 (x_1 - x_1^0) dD + \\ + \alpha_2 \iint_{\mathcal{D}} x_1 (x_2 - x_2^0) dD = 0. \quad (20)$$

Ținând seama aci de formula lui Riemann-Ostrogradski (A.3.18), obținem o integrală care este nulă în virtutea condiției (16). Utilizând formulele (A.3.6), (A.3.9) și (A.3.5), putem pune în evidență momentele centrale de inerție ale secțiunii. Cu aceasta, (20) și (17) dau

$$\mathcal{R}_1 = \alpha_1 l_{22} + \alpha_2 l_{12}. \quad (21)$$

Înmulțind prima ecuație (14) cu x_2 și integrând pe \mathcal{D} , căpătăm, după calcule asemănătoare,

$$\mathcal{R}_2 = \alpha_1 l_{12} + \alpha_2 l_{11}. \quad (22)$$

Pentru a treia componentă din (17), obținem ușor — utilizând (13), (A.3.4) și (A.3.5) :

$$\mathcal{R}_3 = \beta_3 D. \quad (23)$$

Prin urmare, rezultanta tensiunilor pe orice secțiune este independentă de x_3 , iar mărimile \mathcal{R}_i sînt cunoscute din (7).

Nici pentru calcularea componentelor $\mathcal{M}_1(x_3)$ și $\mathcal{M}_2(x_3)$ nu este necesară rezolvarea sistemului (14). Introducînd (13) și (17) pentru $i = 3$ în expresia (19) a lui $\mathcal{M}_1(x_3)$, sîntem conduși la a calcula aceleași momente de inerție ca în (22); ținînd seama de (22), obținem

$$\mathcal{M}_1(x_3) = (x_3 - l) \mathcal{R}_2 + (\beta_1 l_{12} + \beta_2 l_{11}) - (x_2^r - x_2^0) \mathcal{R}_3. \quad (24)$$

Tot astfel deducem și

$$\mathcal{M}_2(x_3) = -(x_3 - l) \mathcal{R}_1 - (\beta_1 l_{22} + \beta_2 l_{12}) + (x_1^r - x_1^0) \mathcal{R}_3. \quad (25)$$

În fine, a treia formulă (19) se scrie

$$\mathcal{M}_3 = \mathcal{M}_3^0 - \mathcal{R}_2 x_1^r + \mathcal{R}_1 x_2^r, \quad \text{cu } \mathcal{M}_3^0 = \iint_{\mathcal{D}} (x_1 \sigma_{32} - x_2 \sigma_{31}) dD. \quad (26)$$

Această relație exprimă numai legătura dintre componenta după Ox_3 a momentului rezultat pentru un centru de reducere oarecare, și momentul \mathcal{M}_3^0 față de originea $(0, 0, x_3)$. Dacă punctul (x_1^r, x_2^r, x_3) este situat pe axa centrală (2.3), avem $\mathcal{M}_3 = 0$, ceea ce era de așteptat.

Mărimile $\mathcal{M}_1(x_3)$, $\mathcal{M}_2(x_3)$ nu sînt cunoscute. Notînd însă

$$\mathcal{M}_1(l) = \mathcal{M}_1, \quad \mathcal{M}_2(l) = \mathcal{M}_2, \quad (27)$$

este limpede că \mathcal{M}_1 , \mathcal{M}_2 , \mathcal{M}_3 sînt componentele momentului rezultat al sarcinii f_i din (7), așadar sînt mărimi cunoscute.

Cele cinci relații (21) — (25) permit determinarea constantelor α_1 , α_2 , β_1 , β_2 , β_3 . Pentru aceasta este suficient să luăm $x_3 = l$ în (24) și (25), și să ținem seama de (27).

Cu aceasta, 5 din cele 6 condiții date sub formă integrală pe baza $x_3 = l$ sînt folosite, și ele determină complet σ_{33} sub forma (13). Problema se reduce acum la rezolvarea sistemului (14) pentru tensiunile σ_{31} și σ_{32} , care trebuie să satisfacă condiția la limită (16), și condiția cu caracter integral (26). Aceste funcții odată găsite, rămîne de integrat sistemul fizico-geometric (15).

§ 4. FORMA ECUAȚIILOR PROBLEMEI ANTIPLANE ÎN VARIABILE COMPLEXE CONJUGATE

a) Ecuațiile problemei

Întrucît sistemul (3.14) nu depinde de variabila x_3 , este firesc să introducem mărimi complexe definite în \mathcal{D} , și să utilizăm sistematic, variabilele complexe conjugate \mathfrak{z} , $\bar{\mathfrak{z}}$. Noțiunile de care vom face uz sînt amănunțit prezentate în §§ A.4—A.11.

Să considerăm deci variabilele complexe

$$\mathfrak{z} = x_1 + i x_2, \quad \bar{\mathfrak{z}} = x_1 - i x_2. \quad (1)$$

Pentru anumite puncte, ca de pildă centrul de greutate al secțiunii, sau centrul de reducere al sistemului de forțe, notăm

$$\mathfrak{z}_0 = x_1^0 + i x_2^0, \quad \mathfrak{z}_i = x_1^i + i x_2^i. \quad (2)$$

Pe orice curbă \mathcal{C} din domeniul \mathcal{D} , avem desigur $\mathfrak{z} = \mathfrak{z}(s)$, unde s este abscisa curbilinie pe \mathcal{C} . Din (1) urmează evident (vezi și (A.4.21)):

$$\mathfrak{z}'(s) = x_1'(s) + i x_2'(s). \quad (3)$$

Vom considera în cele ce urmează constantele complexe

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha_1 + i \alpha_2, & \beta &= \beta_1 + i \beta_2, \\ R &= \mathcal{R}_1 + i \mathcal{R}_2, & M &= \mathcal{M}_1 + i \mathcal{M}_2, \end{aligned} \quad (4)$$

(unde R și M se numesc *rezultanta complexă*, respectiv *momentul încovietor complex* al sarcinii exterioare) și funcțiile

$$\begin{aligned} M(x_3) &= \mathcal{M}_1(x_3) + i \mathcal{M}_2(x_3), \\ T(\delta, \bar{\delta}) &= \sigma_{31}(x_1, x_2) + i \sigma_{32}(x_1, x_2), \\ U(\delta, \bar{\delta}, x_3) &= u_1(x_1, x_2, x_3) + i u_2(x_1, x_2, x_3), \end{aligned} \quad (5)$$

numite respectiv *momentul complex*, *tensiunea tangențială complexă* și *deplasarea tangențială complexă*.

Acum putem transcrie relațiile din § 3 sub o formă mult mai compactă.

În primul rând, formula (3.13) devine

$$\sigma_{33} = \operatorname{Re} \{ [\alpha(x_3 - l) + \beta] (\bar{\delta} - \bar{\delta}_0) \} + \beta_3, \quad (6)$$

sau încă

$$\sigma_{33} = \frac{1}{2} (x_3 - l) (\bar{\alpha} \delta + \alpha \bar{\delta} - 2c) + \frac{1}{2} (\bar{\beta} \delta + \beta \bar{\delta} - 2d) + \beta_3, \quad (7)$$

unde am notat

$$2c = \bar{\alpha} \delta_0 + \alpha \bar{\delta}_0, \quad 2d = \bar{\beta} \delta_0 + \beta \bar{\delta}_0. \quad (8)$$

Coeficienții din (6)–(8) sînt cunoscuți cu ajutorul relațiilor (3.21)–(3.27). Adunînd egalitatea (3.21) cu (3.22) înmulțită cu i , găsim

$$R = \alpha_1 l_{22} + i \alpha_2 l_{11} + i \bar{\alpha} l_{12},$$

sau încă

$$2R = (\alpha + \bar{\alpha}) l_{22} + (\alpha - \bar{\alpha}) l_{11} + 2i \bar{\alpha} l_{12},$$

de unde, ținînd seama de expresiile (A.7.25), deducem

$$2R = l_0 \alpha + l \bar{\alpha}. \quad (9)$$

Tot astfel, din (3.24), (3.25) obținem pentru o secțiune x_3 oarecare

$$2iM(x_3) = 2(x_3 - l)R + l_0 \beta + l \bar{\beta} - 2(\delta_r - \delta_0) \mathcal{R}_3, \quad (10)$$

de unde pe baza $x_3 = l$:

$$2iM = l_0 \beta + l \bar{\beta} - 2(\delta_r - \delta_0) \mathcal{R}_3. \quad (11)$$

Scriind relația complex conjugată cu (9), se obține un sistem în $\alpha, \bar{\alpha}$, a cărui soluție este

$$\alpha = (2/\delta) (l_0 R - l \bar{R}), \quad (12)$$

unde

$$\delta = l_0^2 - l \bar{l} = 4(l_{11} l_{22} - l_{12}^2), \quad (13)$$

Izolînd în relația (11) termenul $l_0 \beta + l \bar{\beta}$, deducem o formulă analogă cu (9): prin urmare, constanta β se obține din (12), înlocuind R prin $iM + (\beta_r - \beta_0) \mathcal{R}_3$:

$$\beta = (2/\delta) i (l_0 M + l \bar{M}) + (2/\delta) [l_0 (\beta_r - \beta_0) - l (\bar{\beta}_r - \bar{\beta}_0)] \mathcal{R}_3. \quad (14)$$

În particular, dacă $\mathcal{R}_3 = 0$, sau dacă centrul de reducere este ales în centrul de greutate al bazei ($\beta_r = \beta_0$), relația (14) devine

$$\beta = (2/\delta) i (l_0 M + l \bar{M}). \quad (15)$$

Împreună cu (3.23), relațiile (12) și (14) dau efectiv coeficienții ce intervin în expresia (7) a componentei σ_{33} .

Toate aceste relații sînt independente de constantele elastice ale materialului.

Să trecem la ecuațiile (3.14). Făcînd uz de definițiile (4), (5) și de formulele (A.4.5)–(A.4.7), obținem sistemul

$$T_{,3} + \bar{T}_{,3} + \frac{1}{2} [\alpha (\beta - \beta_0) + \alpha (\bar{\beta} - \bar{\beta}_0)] = 0, \quad (16)$$

$$T_{,33} + \frac{1}{4} (1 + \nu)^{-1} \alpha = 0,$$

unde cea dintîi este ecuația reală de echilibru, iar cea de-a doua, ecuația (complexă) de compatibilitate a problemei.

Ținînd seama de formulele (A.3.12) și (3), și folosind notația $\beta|_{\mathcal{L}} = t$, condiția la limită (3.16) (care trebuie înțeleasă în sensul din § 1.1) devine

$$T(t, \bar{t}) \bar{t}'(s) - \overline{T(t, \bar{t})} t'(s) = 0. \quad (17)$$

În fine, singura din condițiile pe baze care intervin în studiul sistemului (3.14), și anume condiția (3.26), ia forma

$$2 \mathcal{M}_3 = i \iint_{\mathcal{D}} [\bar{T} (\beta - \beta_r) - T (\bar{\beta} - \bar{\beta}_r)] dD. \quad (18)$$

Problema se reduce deci la rezolvarea sistemului (16) cu condiția la limită (17) și condiția (18) — care are rolul unei condiții de normare. Nu putem afirma deocamdată nimic asupra existenței sau unicității soluției acestei probleme. Avertizăm numai că sistemul (16) omogen (pentru $\alpha = 0$), cu condiția la limită de asemenea omogenă (17), posedă soluții nenule.

Să trecem în fine la ecuațiile fizico-geometrice (3.15). Se observă ușor că componentele u_1, u_2 satisfac ecuațiile Cauchy-Riemann (A.5.4).

Întrucît ele sînt de clasă C^2 , rezultă că ele sînt funcții armonice conjugate, astfel că a treia relație (5) se scrie

$$u_1(x_1, x_2, x_3) + i u_2(x_1, x_2, x_3) = U(\zeta, x_3). \quad (19)$$

Din primele două ecuații (3.15) obținem, utilizînd (A.4.5) sau (A.4.6) :

$$U_{,1} + \bar{U}_{,1} = -2(\nu/E) \sigma_{33}. \quad (20)$$

Introducînd aci expresia (7) și ținînd seama de (19), putem separa în primul membru un termen funcție de ζ și x_3 , iar în cel de al doilea, un termen funcție de $\bar{\zeta}$ și x_3 :

$$\begin{aligned} U_{,1} + (\nu/E) [(x_3 - l) \bar{\alpha} + \bar{\beta}] \zeta - (\nu/E) [(x_3 - l) c + d - \beta_3] = \\ = -\bar{U}_{,1} - (\nu/E) [(x_3 - l) \alpha + \beta] \bar{\zeta} + (\nu/E) [(x_3 - l) c + d - \beta_3]. \end{aligned}$$

Valoarea comună a acestor două expresii trebuie să fie o funcție $g(x_3)$, care satisface condiția $g(x_3) = -\bar{g}(x_3)$, așadar este de forma $if(x_3)$, unde $f(x_3)$ este o funcție reală, necunoscută încă.

În felul acesta, relația (19) se scrie

$$U_{,1} = 0, \quad (21)$$

iar relația (20) se înlocuiește cu

$$\begin{aligned} U_{,1} = -(\nu/E) [(x_3 - l) \bar{\alpha} + \bar{\beta}] \zeta + (\nu/E) [(x_3 - l) c + d - \beta_3] + \\ + if(x_3). \end{aligned} \quad (22)$$

Mai departe, înmulțind a cincea ecuație (3.15) cu i și adunînd-o cu cea de a șasea, obținem

$$U_{,3} = -2u_{3,1} + \mu^{-1}T. \quad (23)$$

În sfîrșit, a treia ecuație (3.15) se scrie

$$\begin{aligned} u_{3,3} = (1/2E) (x_3 - l) (\bar{\alpha} \zeta + \alpha \bar{\zeta} - 2c) + (1/2E) (\bar{\beta} \zeta + \beta \bar{\zeta} - 2d) + \\ + \beta_3/E. \end{aligned} \quad (24)$$

Disponem deci de sistemul ecuațiilor fizico-geometrice sub forma (21)–(24); primele trei din aceste ecuații dau derivatele parțiale ale funcției U în raport cu variabilele ζ , $\bar{\zeta}$, x_3 .

b) Comportarea secțiunilor

Putem trece acum la caracterizarea comportării de ansamblu a secțiunilor, cu ajutorul criteriilor (2.4)–(2.7). Avem mai întîi

$$\varepsilon_{31} + i\varepsilon_{32} = (1/2\mu) T(\zeta, \bar{\zeta}), \quad \varepsilon_{33} = (1/E) \sigma_{33}, \quad (25)$$

astfel că, utilizând (3.17) și (4), obținem

$$\varepsilon_{31}^m + i \varepsilon_{32}^m = (1/2 \mu) (R/D), \quad \varepsilon_{33}^m = (1/E) (\mathcal{R}_3/D). \quad (26)$$

Mai departe, din (A.4.5), avem evident

$$\omega_{31} + i \omega_{32} = \frac{1}{2} [(u_{3,1} - u_{1,3}) + i(u_{3,2} - u_{2,3})] = u_{3,i} - \frac{1}{2} U_{,3},$$

de unde, ținând seama de (23):

$$\omega_{31} + i \omega_{32} = 2 u_{3,i} - (1/2 \mu) T(\bar{\mathfrak{z}}, \bar{\mathfrak{z}}). \quad (27)$$

Întrucât T nu depinde de x_3 , din (27) și (24) avem pe rînd

$$(\omega_{31} + i \omega_{32})_{,3} = 2 u_{3,3i} = (\alpha/E) (x_3 - l) + (\beta/E);$$

întrucât aceasta este o mărime constantă pe orice secțiune, ea este egală cu media ei:

$$(\omega_{31}^m + i \omega_{32}^m)_{,3} = (\alpha/E) (x_3 - l) + (\beta/E). \quad (29)$$

În fine, formula (A.4.5) permite să scriem

$$\omega_{12} = \frac{1}{2} (u_{1,2} - u_{2,1}) = -\operatorname{Im} U_{,i}. \quad (30)$$

Ținând seama de (22), derivînd în raport cu x_3 și integrînd pe \mathscr{D} , căpătăm de aci

$$\omega_{12,3}^m = (\nu/E) \operatorname{Im} (\bar{\alpha} \bar{\mathfrak{z}}_0) - f'(x_3). \quad (31)$$

Formulele (26), (29) și (31) caracterizează starea secțiunilor, chiar fără rezolvarea prealabilă a problemei (cu excepția relației (31), în care intervine $f(x_3)$). Starea de întindere-compresiune depinde numai de existența unei componente $\mathcal{R}_3 \neq 0$, iar cea de alunecare, de existența unei componente $R \neq 0$. Starea de încovoire depinde de cantitățile α și β , și prin urmare de R , M și \mathcal{R}_3 . Starea de torsiune poate fi cunoscută numai cunoscînd funcția $f(x_3)$ (vezi mai departe § 8, pag. 201).

Starea de întindere-compresiune, starea de alunecare și acea componentă a stării de încovoire care depinde numai de M și \mathcal{R}_3 , nu variază în lungul barei.

Pusă sub această formă, problema antiplană se rezolvă într-un mod unitar. Cazul $T \equiv 0$ este elementar. Dimpotrivă cazul $T \not\equiv 0$ este ne-elementar și necesită rezolvarea efectivă a sistemului (16).

§ 5. BARA CILINDRICĂ ACȚIONATĂ PE BAZE DE SARCINI NORMALE

În acest cadru intră problema *întinderii* (cea a *compresiunii* diferă de ea numai printr-o schimbare sistematică a semnelor) și problema *încovoierii pure*.

Avem de integrat ecuațiile (4.16) cu condiția la limită (4.17) pe $\mathcal{L} = \text{fr } \mathcal{D}$ și cu condiția integrală (4.18) — iar apoi ecuațiile (4.21) — (4.24).

Bara este solicitată pe baza $x_3 = l$ de o sarcină normală, așadar

$$R = \mathcal{M}_3 = 0. \quad (1)$$

De aci (vezi și § 2, pag. 169) rezultă că reacțiunile ce apar pe baza fixată sînt static echivalente tot cu o sarcină normală.

Introducînd (1) în (4.12), obținem

$$\alpha = 0. \quad (2)$$

Întrucît atît ecuațiile (4.16), cît și condițiile (4.17) și (4.18) sînt în acest caz omogene, sîntem îndemnați să alegem (vezi și (3.26)):

$$T(\bar{\delta}, \bar{\delta}) \equiv 0. \quad (3)$$

Prin urmare, singura componentă nenulă a tensiunii rămîne

$$\sigma_{33} = \frac{1}{2}(\bar{\beta}\bar{\delta} + \beta\bar{\delta} - 2d) + \beta_3 \quad (4)$$

(vezi (4.7)), unde β , β_3 , d sînt cunoscute din (4.14), (3.23) și (4.8).

Să trecem la ecuațiile (4.21) — (4.24), unde introducem (2) — (4):

$$U_{,\bar{\delta}} = 0, \quad (5)$$

$$U_{,\delta} = -(\nu/E)\bar{\beta}\bar{\delta} + (\nu/E)(d - \beta_3) + if(x_3), \quad (6)$$

$$U_{,3} = -2u_{3,\bar{\delta}}, \quad (7)$$

$$u_{3,3} = (1/2E)(\bar{\beta}\bar{\delta} + \beta\bar{\delta} - 2d) + (\beta_3/E). \quad (8)$$

Calculînd din (6) și (7) derivata mixtă $U_{,3\bar{\delta}}$ și egalînd valorile obținute, căpătăm $if'(x_3) = -2u_{3,\bar{\delta}\delta}$.

De aci urmează

$$f'(x_3) = \Delta u_3 = 0, \quad (9)$$

de unde deducem mai întîi, notînd cu C o constantă [reală]:

$$f(x_3) = C. \quad (10)$$

Integrând ecuația (8) în raport cu x_3 , obținem

$$u_3 = (1/2E) (\bar{\beta} \delta + \beta \bar{\delta} - 2d) x_3 + (\beta_3/E) x_3 + w_1(\delta, \bar{\delta}), \quad (11)$$

unde w_1 este o funcție reală necunoscută. Din a doua ecuație (9) conchidem că w_1 este armonică, și deci poate fi scrisă ca

$$w_1(\delta, \bar{\delta}) = w_2(\delta) + \overline{w_2(\delta)}. \quad (12)$$

În felul acesta, ecuația (7) devine acum

$$U_{,3} = -(\beta/E) x_3 - 2\overline{w'_2(\delta)},$$

de unde, întrucît U nu depinde de $\bar{\delta}$, urmează $-2\overline{w'_2(\delta)} = B - iA$, și deci (A, B, H, K fiind constante reale):

$$2w_2(\delta) = -(B + iA)\delta + H + iK. \quad (13)$$

Introducînd (12) și (13) în (11), obținem

$$u_3 = (1/2E) (\bar{\beta} \delta + \beta \bar{\delta} - 2d) x_3 + (\beta_3/E) x_3 - \text{Re}[(B + iA)\delta] + H. \quad (14)$$

Ecuațiile (5)–(7) dau acum explicit cele trei derivate:

$$\begin{aligned} U_{,1} &= 0; & U_{,2} &= -(\nu/E) \bar{\beta} \delta + (\nu/E) (d - \beta_3) + iC; \\ U_{,3} &= -(\beta/E) x_3 + B - iA. \end{aligned} \quad (15)$$

Integrînd în raport cu δ , respectiv x_3 , obținem de aci

$$U = -(\nu/2E) \bar{\beta} \delta^2 + (\nu/E) (d - \beta_3) \delta + iC\delta + U_1(x_3),$$

$$U = -(1/2E) \beta x_3^2 + (B - iA) x_3 + U_2(\delta),$$

și deci notînd cu F, G două constante reale:

$$\begin{aligned} U &= -(1/2E) [\beta x_3^2 + \nu \bar{\beta} \delta^2 - 2\nu (d - \beta_3) \delta] + (B - iA) x_3 + \\ &\quad + iC\delta + F + iG. \end{aligned} \quad (16)$$

Notînd cu u'_1, u'_2, u'_3 acea parte a componentelor deplasării care depinde de cele 6 constante reale A, B, C, F, G, H obținem

$$\begin{aligned} u'_1 &= -Cx_2 + Bx_3 + F, & u'_2 &= Cx_1 - Ax_3 + G, \\ u'_3 &= -Bx_1 + Ax_2 + H, \end{aligned} \quad (17)$$

așadar o deplasare rigidă definită de vectorul de rotație (A, B, C) și de cel de translație (F, G, H). Pentru determinarea acestor constante, sînt necesare date suplimentare asupra poziției barei (de pildă, puncte și direcții care rămîn fixe în procesul de deformație).

Făcînd abstracție de aceste componente, obținem în definitiv

$$\begin{aligned} U &= - (1/2E) [\beta x_3^2 + \nu \bar{\beta} \bar{x}_3^2 - 2\nu (d - \beta_3) \bar{x}_3], \\ u_3 &= (1/2E) (\bar{\beta} \bar{x}_3 + \beta \bar{x}_3 - 2d) x_3 + (\beta_3/E) x_3. \end{aligned} \quad (18)$$

Formulele (4) și (18) rezolvă complet, în axe oarecari, problema barei de secțiune oarecare, solicitată pe baze de o sarcină *normală*.

§ 6. ANALIZA STĂRII ELASTICE A BAREI ACȚIONATE PE BAZE DE SARCINI NORMALE

a) Comportarea secțiunilor

Vom începe prin a utiliza formulele (4.26), (4.29) și (4.31). Pentru a înțelege mai bine fenomenul, vom determina și rotațiile fiecărei secțiuni în parte, ținînd seama și de deplasarea rigidă (așadar utilizînd formulele (5.14), (5.16), și nu formulele (5.18)).

Întrucît avem $R = \mathcal{M}_3 = 0$ și $T \equiv 0$, din (4.26) deducem

$$\varepsilon_{31}^m + i \varepsilon_{32}^m = 0, \quad \varepsilon_{33}^m = \mathcal{R}_3/ED. \quad (1)$$

Mai departe, introducînd (5.14) în (4.27) avem

$$\omega_{31} + i \omega_{32} = (\beta/E) x_3 - B + iA, \quad (2)$$

astfel că (vezi și (4.29))

$$\omega_{31,3}^m + i \omega_{32,3}^m = \beta/E. \quad (3)$$

În fine, ținînd seama de (5.16) în (4.30), deducem

$$\omega_{12} = - (i\nu/2E) (\bar{\beta} \bar{x}_3 - \beta \bar{x}_3) - C, \quad (4)$$

astfel că

$$\omega_{12,3}^m = 0. \quad (5)$$

Constantele A , B , C , intervin în expresiile ce caracterizează rotațiile secțiunilor, dar nu și în cele ce caracterizează rotațiile lor *relative*.

Secțiunile nu sînt supuse nici la alunecări, nici la torsiune (cu toate că $\omega_{12} \neq 0$, și chiar $\omega_{12}^m \neq 0$).

Dacă $\mathcal{R}_3 \neq 0$, secțiunile sînt supuse la întindere, iar dacă $\beta \neq 0$, la încovoiere. Ambele stări sînt independente de x_3 , așadar toate secțiunile se comportă la fel unele față de altele.

b) Sarcină static echivalentă cu o forță unică \mathcal{R}_3

În acest caz avem

$$R = M = \mathcal{M}_3 = 0, \quad \mathcal{R}_3 \neq 0, \quad (6)$$

forța \mathcal{R}_3 fiind aplicată într-un punct $\bar{\mathfrak{z}}_r$.

Din (4.12), (4.14) și (3.23) avem deci

$$\alpha = 0, \quad \beta = (2/\delta) [l_0(\bar{\mathfrak{z}}_r - \bar{\mathfrak{z}}_0) - l(\bar{\mathfrak{z}}_r - \bar{\mathfrak{z}}_0)] \mathcal{R}_3, \quad \beta_3 = \mathcal{R}_3/D, \quad (7)$$

astfel că unica componentă nenulă a tensiunii este determinată. Din (5.4) obținem în general

$$\sigma_{33} = \left[\frac{l_{11}(x'_1 - x_1^0) - l_{12}(x'_2 - x_2^0)}{l_{11}l_{22} - l_{12}^2} (x_1 - x_1^0) - \frac{l_{12}(x'_1 - x_1^0) - l_{22}(x'_2 - x_2^0)}{l_{11}l_{22} - l_{12}^2} (x_2 - x_2^0) + \frac{1}{D} \right] \mathcal{R}_3, \quad (8)$$

iar în cazul particular al axelor centrale principale ($x_1^0 = x_2^0 = l_{12} = 0$, $l_{11} = l_1$, $l_{22} = l_2$):

$$\sigma_{33} = \left[\frac{x'_1}{l_2} x_1 + \frac{x'_2}{l_1} x_2 + \frac{1}{D} \right] \mathcal{R}_3. \quad (9)$$

După cum rezultă din (1) și (3), secțiunile sînt supuse la întindere și încovoiere.

Dacă $\bar{\mathfrak{z}}_r = \bar{\mathfrak{z}}_0$, atunci $\beta = 0$, și bara este supusă la *întindere pură*. În acest caz, din (5.4), (5.18) și (7) deducem — în axe centrale :

$$\sigma_{33} = \frac{\mathcal{R}_3}{D}, \quad u_1 = -\frac{\nu \mathcal{R}_3}{ED} x_1, \quad u_2 = -\frac{\nu \mathcal{R}_3}{ED} x_2, \quad u_3 = \frac{\mathcal{R}_3}{ED} x_3. \quad (10)$$

c) Sarcină static echivalentă cu un cuplu de moment M

În acest caz avem

$$R = \mathcal{R}_3 = \mathcal{M}_3 = 0, \quad M \neq 0, \quad (11)$$

unde M nu depinde de alegerea centrului de reducere.

Din (4.12), (4.15) și (3.23) avem acum

$$\alpha = 0, \quad \beta = (2/\delta) i(l_0 M + l \bar{M}), \quad \beta_3 = 0, \quad (12)$$

ceea ce determină unica componentă nenulă σ_{33} a tensiunii.

Din (5.4) și (5.18) obținem acum

$$\sigma_{33} = \frac{1}{2} (\bar{\beta} \bar{\mathfrak{z}} + \beta \bar{\mathfrak{z}} - 2d) \quad (13)$$

și încă, abstracție făcând de roto-translația rigidă (5.17):

$$U = -\frac{1}{2E}(\beta x_3^2 + \nu \bar{\beta} \bar{z}^2 - 2\nu d \bar{z}), \quad u_3 = \frac{1}{2E}(\bar{\beta} \bar{z} + \beta \bar{z} - 2d) x_3. \quad (14)$$

Intrucât $\mathcal{Q}_3 = 0$, din (1)–(5) rezultă că secțiunile sînt supuse numai la rotații relative în jurul unor axe normale pe Ox_3 . Din această cauză, bara solicitată de sarcini de torsor (11) este în stare de *încovoiere pură*.

(Încovoierea apare și sub acțiunea unei forțe \mathcal{Q}_3 aplicate excentric, dar în acest caz ea este însoțită de întindere.)

În cazul încovoierii pure, rotațiile locale nu sînt funcții de punct pe secțiune. Există rotații locale (și chiar rotații medii) nenule și în jurul unor axe paralele cu Ox_3 — dar rotațiile medii relative sînt nule.

Din a doua formulă (14) rezultă că *secțiunile plane rămîn plane după deformare*: orice secțiune $x_3 = \tilde{x}_3$ trece după deformare în planul $x_3 = \tilde{x}_3 + u_3(\bar{z}, \bar{z}, \tilde{x}_3)$. Ipoteza secțiunilor plane — cunoscută din rezistența materialelor — se confirmă deci. (Din (10) se vede că ea este valabilă și în cazul întinderii pure.)

Pentru a găsi constantele A, B, C, F, G, H , sînt necesare date suplimentare asupra deplasării barei în ansamblu.

Astfel de pildă, dacă presupunem că origina O nu se deplasează, și vecinătatea ei nu se rotește, atunci, luînd $\bar{z} = x_3 = 0$, deducem din (14) și (5.17) că $F=G=H=0$, iar din (2) și (4) urmează că $A=B=C=0$.

Din (14) urmează evident că punctele bazei $x_3=0$ nu sînt fixe, întrucît avem $U \neq 0$. Presupunerea de mai sus revine la a considera deci că baza $x_3=0$ este fixată „în medie”, ea nedeplasîndu-se înafara planului ei, și nerotîndu-se în ansamblu. (A se revedea și § 2, pag. 169.)

Pe viitor vom presupune întotdeauna $A=B=C=F=G=H=0$.

Pentru a obține componentele tensiunii și deplasării sub formă reală, să facem uz de valoarea lui β din (12). În axe oarecare obținem de pildă

$$\sigma_{33} = -\frac{l_{12}\mathcal{M}_1 + l_{11}\mathcal{M}_2}{l_{11}l_{22} - l_{12}^2}(x_1 - x_1^0) + \frac{l_{12}\mathcal{M}_2 + l_{22}\mathcal{M}_1}{l_{11}l_{22} - l_{12}^2}(x_2 - x_2^0). \quad (15)$$

d) Elemente geometrice esențiale. Rigidități la încovoiere

În cele ce urmează, ne vom situa în cadrul teoriei clasice a încovoierii pure pentru bara raportată la axele centrale principale de inerție ale lui \mathcal{D} (așadar $\bar{z}_0 = d = 0$, $l_{12} = 0$). Proprietățile geometrice despre care vom vorbi nu depind desigur de alegerea axelor.

Din (12) obținem mai întîi

$$\beta = -(\mathcal{M}_2/l_2) + i(\mathcal{M}_1/l_1). \quad (16)$$

Formula (15) devine aci

$$\sigma_{33} = -(\mathcal{M}_2/l_2)x_1 + (\mathcal{M}_1/l_1)x_2, \quad (17)$$

iar (14) se reduce — după calcule elementare — la

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{2}(\mathcal{M}_2/EI_2) [x_3^2 + \nu(x_1^2 - x_2^2)] - \nu(\mathcal{M}_1/EI_1)x_1x_2, \\ u_2 &= \frac{1}{2}(\mathcal{M}_1/EI_1) [x_3^2 + \nu(x_2^2 - x_1^2)] + \nu(\mathcal{M}_2/EI_2)x_1x_2, \\ u_3 &= [- (\mathcal{M}_2/EI_2)x_1 + (\mathcal{M}_1/EI_1)x_2] x_3. \end{aligned} \quad (18)$$

De aci se obţin uşor componentele stării elastice în cazul particular al momentului dirijat după una din axe ($\mathcal{M}_1 = 0$ sau $\mathcal{M}_2 = 0$).

Întrucît avem $d(\mathcal{B}) \ll l$, caracterul deplasării în ansamblul ei este strîns legat de caracterul deplasării liniei centrelor de greutate. Luînd în (18) $x_1 = x_2 = 0$, obţinem pentru aceasta

$$u_1^0 = \frac{1}{2}(\mathcal{M}_2/EI_2)x_3^2, \quad u_2^0 = -\frac{1}{2}(\mathcal{M}_1/EI_1)x_3^2, \quad u_3^0 = 0. \quad (19)$$

Locul punctelor în care trec după deformaţie centrele de greutate ale secţiunilor se numeşte *linie elastică*. Dacă $C = 0$, secţiunile nu se rotesc (în medie) în jurul tangentei la această linie (vezi (4)).

Scriind ecuaţiile (19) în coordonate (x_1, x_2, x_3) , adică punînd $u_1^0 = x_1$, $u_2^0 = x_2$ (de fapt x_1^* , x_2^*), obţinem

$$x_1 = \frac{1}{2}(\mathcal{M}_2/EI_2)x_3^2, \quad x_2 = -\frac{1}{2}(\mathcal{M}_1/EI_1)x_3^2, \quad (20)$$

de unde se vede că $x_2/x_1 = \text{const.}$, aşadar că linia elastică este o curbă plană. Planul în care ea este situată poartă numele de *plan de încovoiere*, şi ecuaţia sa (precum şi a urmei sale pe orice secţiune) este evident

$$(\mathcal{M}_1/l_1)x_1 + (\mathcal{M}_2/l_2)x_2 = 0. \quad (21)$$

Din (17) deducem că există un al doilea plan important

$$(\mathcal{M}_2/l_2)x_1 - (\mathcal{M}_1/l_1)x_2 = 0, \quad (22)$$

pe care $\sigma_{33} = 0$. Din a treia ecuaţie (3.15) urmează că pe planul (22) avem şi $\varepsilon_{33} = 0$. Acest plan este perpendicular pe planul de încovoiere, şi se numeşte *plan neutru*.

Dat fiind că axa Ox_2 este orizontală şi axa Ox_1 este verticala descendentă (vezi fig. 5.6.1), în cazul unei sarcini echivalente cu un cuplu $\mathcal{M}_2 > 0$ dirijat după Ox_2 , planul de încovoiere este planul vertical; din (19) rezultă $u_1^0 > 0$, aşadar centrele de curbura în lungul liniei elastice sînt îndreptate spre direcţia valorilor x_1 pozitive. Dimpotrivă, dacă $\mathcal{M}_2 = 0$, $\mathcal{M}_1 > 0$, planul de încovoiere este planul orizontal şi $u_2^0 < 0$, ceea ce înseamnă că centrele de curbura sînt îndreptate spre direcţia valorilor x_2 negative.

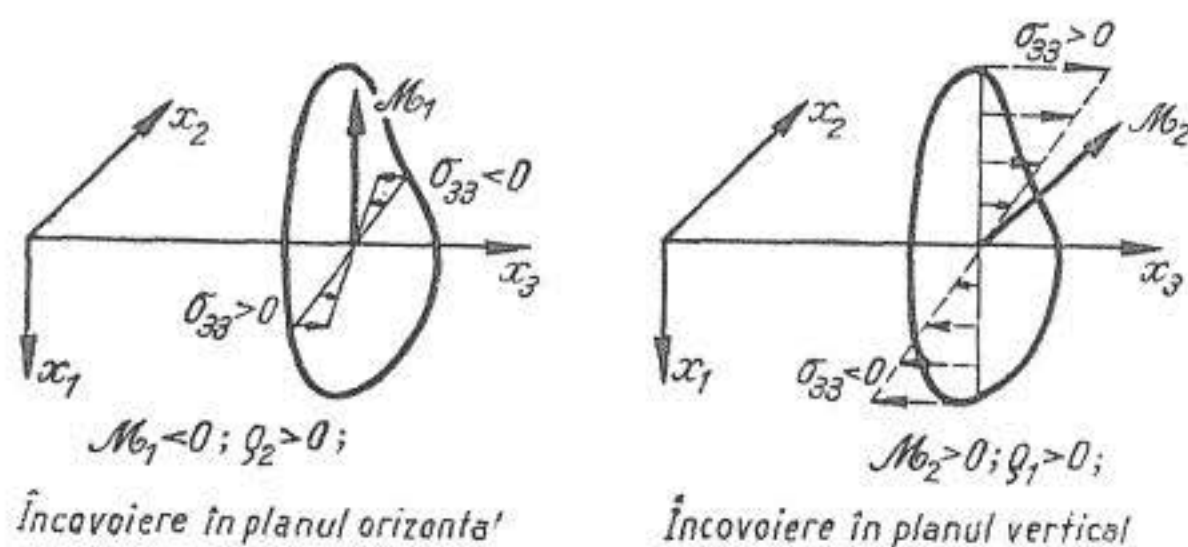


Fig. 5.6.1

Amintim (vezi de ex. G. Vrănceanu [1], vol. 2, § 14.1) că raza de curbură ρ_c și torsiunea τ_c ale unei curbe în spațiu sînt date de formulele

$$\rho_c^{-2} = (A^2 + B^2 + C^2)/ds^6, \quad \tau_c = -(A^2 + B^2 + C^2)/\Delta,$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} dx_1 & dx_2 & dx_3 \\ d^2x_1 & d^2x_2 & d^2x_3 \\ d^3x_1 & d^3x_2 & d^3x_3 \end{vmatrix}, \quad (23)$$

unde A, B, C , sînt minorii formați cu elementele primelor două linii ale determinantului Δ . Ținînd seama de (20), obținem acum

$$A = (\mathcal{M}_1/EI_1) (dx_3)^3, \quad B = -(\mathcal{M}_2/EI_2) (dx_3)^3, \quad C = 0, \quad (24)$$

și deci

$$\rho_c^{-2} = [(\mathcal{M}_1/EI_1)^2 + (\mathcal{M}_2/EI_2)^2] (dx_3/ds)^6. \quad (25)$$

Întrucît avem

$$ds = \sqrt{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2} = \sqrt{1 + [(\mathcal{M}_1/EI_1)^2 + (\mathcal{M}_2/EI_2)^2] x_3^2} dx_3, \quad (26)$$

vom nota

$$\rho_0^{-2} = (\mathcal{M}_1/EI_1)^2 + (\mathcal{M}_2/EI_2)^2, \quad (27)$$

și vom transcrie (25) sub forma

$$\rho_c^{-1} = \rho_0^{-1} (1 + \rho_0^{-2} x_3^2)^{-3/2}. \quad (28)$$

Atîta timp cît deplasările nu sînt foarte mari, avem evident $x_3/\rho_0 \ll 1$. Prin urmare, avem $\rho_c \cong \rho_0$, și, în primă aproximație, linia elastică este un *arc de cerc*. Aceeași valoare a razei de curbură se obține din (25) dacă admitem $x_3 \cong s$, ceea ce este permis în cadrul teoriei liniare.

Valoarea torsiunii τ_c rezultă nulă (ceea ce era de așteptat), chiar independent de presupunerea $x_3 \cong s$.

Vom nota raza de curbură a liniei elastice cu ρ_1 în cazul în care planul de încovoiere este planul vertical Ox_1x_3 (aşadar pentru $\mathcal{M}_1 = 0$, $\mathcal{M}_2 \neq 0$), şi cu ρ_2 în cazul încovoierii în planul orizontal Ox_2x_3 ($\mathcal{M}_1 \neq 0$, $\mathcal{M}_2 = 0$). Atribuind acestor raze semnul corespunzător direcţiei pozitive sau negative a axelor spre care este orientată concavitatea liniei elastice, obţinem din (27) relaţiile importante:

$$\rho_1^{-1} = \mathcal{M}_2/El_2, \quad \rho_2^{-1} = -\mathcal{M}_1/El_1, \quad \rho_0^{-2} = \rho_1^{-2} + \rho_2^{-2}. \quad (29)$$

(Intervertirea axelor Ox_1 şi Ox_2 în orice formulă în care intervin momentele, se face ţinând seama şi de necesitatea de a schimba semnele — datorită faptului că sistemele $Ox_1x_2x_3$ şi $Ox_2x_1x_3$ nu sînt de aceeaşi orientare.)

Să clarificăm semnificaţia primelor două relaţii (29). Cantităţile ρ_1 , ρ_2 sînt parametri cu caracter *global*, ce caracterizează comportarea de ansamblu a barei. Ei sînt determinaţi ca *produse* de factori E (depinzînd de material), l_1 sau l_2 (depinzînd sub formă globală de configuraţia geometrică a secţiunii), şi \mathcal{M}_1 sau \mathcal{M}_2 (depinzînd de asemenea sub formă globală de sarcină). Acest fapt permite evaluarea *separată* a rolului sarcinii, materialului, şi geometriei secţiunii.

Cu cît razele ρ_1 , ρ_2 sînt mai mari, cu atît bara este mai rigidă (vezi (19)). Mai departe, din (29) se vede că cu cît l_1 , l_2 sînt mai mari, cu atît — pentru o sarcină şi un material dat — bara se va depărta mai puţin de la configuraţia iniţială (rectilinie). De aceea, mărimile l_1 şi l_2 se vor numi *rigidităţi geometrice la încovoiere pură*. Mărimile El_1 şi El_2 se vor numi *rigidităţi la încovoiere pură*.

O relaţie analogă cu (29) apare în studiul problemei torsiunii pure (vezi (13.15)). În problema încovoierii în consolă apare analogul nemijlocit (9.14) al relaţiilor (29), precum şi o relaţie mai complicată, dar cu semnificaţie înrudită (vezi (19.10) şi (19.17)). În fine, relaţii de acelaşi tip se întîlnesc şi în problema ştanţei rigide (vezi (10.8.5) şi (10.8.8)).

Ţinînd seama de formulele (29), obţinem acum din (17)

$$\sigma_{33} = -E(\rho_1^{-1} x_1 + \rho_2^{-1} x_2), \quad (30)$$

iar din (18)

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{2} \rho_1^{-1} [x_3^2 + \nu(x_1^2 - x_2^2)] + \nu \rho_2^{-1} x_1 x_2, \\ u_2 &= \frac{1}{2} \rho_2^{-1} [x_3^2 + \nu(x_2^2 - x_1^2)] + \nu \rho_1^{-1} x_1 x_2, \\ u_3 &= -(\rho_1^{-1} x_1 + \rho_2^{-1} x_2) x_3. \end{aligned} \quad (31)$$

Pentru ecuaţiile liniei elastice avem din (19)

$$u_1^0 = \frac{1}{2} \rho_1^{-1} x_3^2, \quad u_2^0 = \frac{1}{2} \rho_2^{-1} x_3^2. \quad (32)$$

În fine, din (21) și (22) obținem pentru planul de încovoiere :

$$\rho_2^{-1} x_1 - \rho_1^{-1} x_2 = 0, \quad (33)$$

planul neutru :

$$\rho_1^{-1} x_1 + \rho_2^{-1} x_2 = 0. \quad (34)$$

Planul neutru împarte bara în două domenii : unul în care avem $\sigma_{33} > 0$, $\varepsilon_{33} > 0$, și celălalt în care avem $\sigma_{33} < 0$, $\varepsilon_{33} < 0$ — așadar unul în care există tensiuni de întindere și fibrele longitudinale se lungesc, și celălalt în care există tensiuni de compresiune, și aceste fibre se scurtează³⁾.

Notînd cu p distanța de la un punct de coordonate x_1 , x_2 la urma planului neutru (34) pe \mathcal{D} avem (vezi de ex. G. Vrănceanu [1], vol. 1, § 2.6) :

$$p = \pm (\rho_2 x_1 + \rho_1 x_2) / \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2}. \quad (35)$$

Ținînd seama de a treia relație (29), obținem din (30) și (35) :

$$\sigma_{33} = -E(\rho_2 x_1 + \rho_1 x_2) / \rho_1 \rho_2 = -Ep \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2} / \rho_1 \rho_2 = -Ep / \rho_0. \quad (36)$$

Am reținut aci semnul minus, pentru ca (36) să generalizeze relațiile ce derivă din (30) pentru $\mathcal{M}_1 = 0$ sau $\mathcal{M}_2 = 0$:

$$\sigma_{33} = -E x_1 / \rho_1, \text{ respectiv } \sigma_{33} = -E x_2 / \rho_2. \quad (37)$$

Tensiunea într-un punct oarecare e deci proporțională cu distanța la planul neutru, cu curbura liniei elastice, și cu modulul lui Young.

De aci rezultă două concluzii practice importante. Pe de o parte, punctele cele mai solicitate sînt cele mai depărtate de planul neutru — și aceasta dă o regulă simplă pentru a se evita apariția de tensiuni prea mari. Pe de altă parte materialul situat în apropierea planului neutru „nu lucrează” și deci este indicată utilizarea de profile care *îndepărtează* materialul de acest plan. (Vezi și § 9, pag. 208 și § 16, pag. 266).

Pentru o bară de oțel ($E \cong 2,15 \cdot 10^6$ kgf/cm², $\sigma_s \cong 2 \cdot 10^3$ kgf/cm²), conchidem că trebuie să avem $\rho_0 \gg 10^3 p$. Întrucît în general p este de ordinul de mărime a câțiva cm, cel mult câțiva dm, rezultă că ρ_0 este de ordinul zecilor sau sutelor de metri. (Vezi și cele spuse după (28).)

Din a treia formulă (31) rezultă că o secțiune plană $x_3 = \tilde{x}_3$ trece după deformație tot într-un plan :

$$x_3 = (1 - \rho_1^{-1} x_1 - \rho_2^{-1} x_2) \tilde{x}_3. \quad (38)$$

Remarcînd că parametrii directori ai tangentei la linia elastică (32) în punctul în care ea înțeapă planul $x_3 = \tilde{x}_3$ au valorile $\rho_1^{-1} \tilde{x}_3$, $\rho_2^{-1} \tilde{x}_3$, 1, și transcriind (38) sub forma

$$(\rho_1^{-1} \tilde{x}_3) x_1 + (\rho_2^{-1} \tilde{x}_3) x_2 + x_3 = \tilde{x}_3, \quad (39)$$

³⁾ Acest fapt a fost pus la baza studiului problemei încovoierii de către E. Mariotte [1].

deducem că secțiunile normale trec după deformație în plane perpendiculare pe linia elastică. Aceasta era de așteptat, întrucât axele $Ox_1x_2x_3$ sînt axe principale.

Soluția exactă a problemei confirmă deci ipotezele formulate de J. Bernoulli [1]: ipoteza secțiunilor plane, normale pe linia elastică, și ipoteza încovoierii în arc de cerc a liniei elastice. (Pentru domeniul de validitate al acestei soluții vezi și A. Kornecki [1].)

e) Încovoiere dreaptă și încovoiere oblică

S-ar putea crede că încovoierea în lungul unei axe principale de inerție nu diferă calitativ de încovoierea după o direcție oarecare (compară de exemplu (36) cu (37)). Dar în fapt, aceste axe au un rol esențial.

Să notăm momentul încovoiator complex cu

$$M = \mathcal{M}_1 + i\mathcal{M}_2 = |M| \exp(i\psi). \quad (40)$$

Din (27) obținem

$$\rho_0^{-2} = (|M|^2/E^2) [(\cos^2 \psi)/l_1^2 + (\sin^2 \psi)/l_2^2]. \quad (41)$$

Extremele acestei funcții se obțin pentru

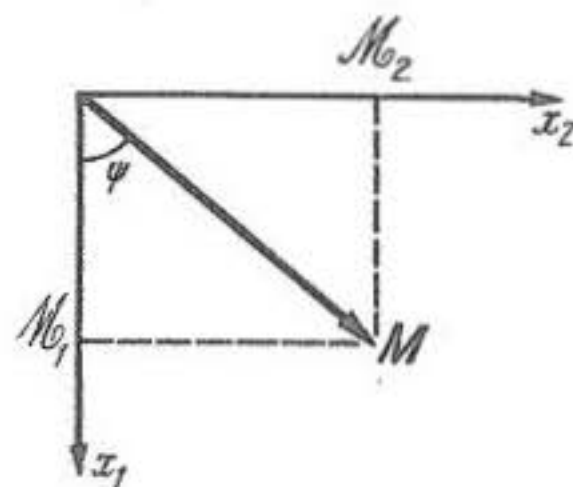


Fig. 5.6.2

$$\partial \rho_0^{-2} / \partial \psi = (|M|^2/E^2) [l_2^{-2} - l_1^{-2}] \sin 2\psi = 0, \quad (42)$$

așadar pentru valorile $0, \frac{1}{2}\pi, \pi, \frac{3}{2}\pi$, ale unghiului ψ .

Să alegem notația axelor în așa fel încît să avem $l_1 \leq l_2$. Din expresia

$$\partial^2 \rho_0^{-2} / \partial \psi^2 = 2(|M|^2/E^2) [l_2^{-2} - l_1^{-2}] \cos 2\psi, \quad (43)$$

deducem

$$\left. \partial^2 \rho_0^{-2} / \partial \psi^2 \right|_{\psi=0} < 0, \quad \left. \partial^2 \rho_0^{-2} / \partial \psi^2 \right|_{\psi=\frac{1}{2}\pi} > 0, \quad (44)$$

de unde rezultă că pentru momentul M dirijat în lungul axei Ox_2 (așadar $\psi = \frac{1}{2}\pi$) curbura ρ_0^{-1} atinge valoarea sa *minimă*; iar pentru M dirijat în lungul axei Ox_1 (așadar $\psi = 0$) ea atinge valoarea *maximă*.

Vom numi *plan al sarcinii*, acel plan a cărui urmă pe secțiune este *perpendiculară* pe M . (Denumirea provine din faptul că cuplul de moment M poate fi privit ca realizat cu ajutorul unor cupluri elementare, compuse

fiecare din câte două forțe egale și opuse, dirijate paralel cu Ox_3 , și aplicate în două puncte situate pe o linie perpendiculară pe M .) Astfel de pildă, dacă $M_1 = 0$, $M_2 \neq 0$, planul sarcinii este dirijat după Ox_1 ; iar dacă $M_1 \neq 0$, $M_2 = 0$, el este dirijat după Ox_2 .

Rezultă deci că, dacă planul sarcinii este dirijat după axa Ox_1 în raport cu care momentul de inerție este *minim* ($I_1 \leq I_2$), atunci curbura atinge valoarea sa *minimă*; dimpotrivă, dacă planul sarcinii este dirijat după axa Ox_2 , în raport cu care momentul de inerție este *maxim*, curbura atinge și ea valoarea sa *maximă*.

Din (31) și (36) urmează că, cu cât raza de curbura este mai mare (așadar bara este mai rigidă), cu atât tensiunile și deplasările sînt mai mici. Întrucît bara rezistă în condiții optime pentru planul sarcinii dirijat după Ox_1 , iar în acest caz ($M_1 = 0$) rezultă din (21) că planul de încovoiere este planul $x_2 = 0$, așadar planul Ox_1x_3 — acesta va purta numele de *plan de rigiditate* al barei; planul Ox_2x_3 se va numi *plan de flexibilitate*.

În concluzie: bara rezistă global în condiții optime la sarcini dirijate (global) după axa în raport cu care momentul de inerție este *minim*, așadar — în axele particulare alese — la sarcini $M_1 = 0$, $M_2 \neq 0$. (Desigur, cele de mai sus își pierd sensul dacă $I_1 = I_2$.)

Ne rămîne să cercetăm comportarea barei sub acțiunea momentelor dirijate *nu* după axele principale.

Întrucît planul ce conține vectorul M are ecuația

$$M_2/M_1 = x_2/x_1, \quad (45)$$

urmează că planul sarcinii are ecuația

$$M_1x_1 + M_2x_2 = 0, \quad (46)$$

sau încă, ținînd seama de (29), ecuația

$$I_1\rho_2^{-1}x_1 - I_2\rho_1^{-1}x_2 = 0. \quad (47)$$

Ținînd seama de valorile pantelor x_2/x_1 ce se obțin din (46) pentru planul sarcinii, și din (21) pentru planul de încovoiere, obținem pentru tangenta⁴⁾ unghiului φ dintre cei doi și acesta din urmă, valoarea

$$\operatorname{tg} \varphi = \left[-\frac{M_1}{M_2} + \frac{M_1}{M_2} \frac{I_2}{I_1} \right] : \left[1 + \left(\frac{M_1}{M_2} \right)^2 \frac{I_2}{I_1} \right]. \quad (48)$$

Ținînd seama că din (40) urmează $M_1/M_2 = \operatorname{ctg} \psi$, și notînd $I_1/I_2 = \eta$, unde $\eta \leq 1$, obținem deci

$$\operatorname{tg} \varphi = [(1 - \eta) \operatorname{tg} \psi] : [1 + \eta \operatorname{tg}^2 \psi], \quad (49)$$

⁴⁾ E preferabil să calculăm tangenta, întrucît cosinusul nu informează asupra *semnului* unghiului.

de unde

$$\frac{d}{d\psi}(\operatorname{tg}\varphi) = [(1 - \eta)(1 + \operatorname{tg}^2\psi)(1 - \eta \operatorname{tg}^2\psi)] : [1 + \eta \operatorname{tg}^2\psi]^2. \quad (50)$$

Eliminînd cazul banal $\eta = 1$, rezultă că unghiul φ se anulează numai pentru valorile $\psi = 0, \frac{1}{2}\pi, \pi, \frac{3}{2}\pi$. Prin urmare, bara se înconvoaie în planul sarcinii *dacă și numai dacă acesta trece prin una din axe principale de inerție ale secțiunii*. Condițiile optime sînt realizate atunci cînd acesta este planul de rigiditate ($\psi = \frac{1}{2}\pi$ sau $\frac{3}{2}\pi$). Condițiile cele mai defavorabile survin cînd acesta este planul de flexibilitate ($\psi = 0$ sau π).

Încovoierea în aceste plane se numește *încovoiere dreaptă*. Încovoierea în afara acestor plane, cînd planul de încovoiere nu coincide cu planul sarcinii, se numește *încovoiere oblică*.

Semnul mărimii $\operatorname{tg}\varphi$ este același cu al mărimii $\operatorname{tg}\psi$. Din (49), (50) obținem următorul tablou de variație al funcției $\operatorname{tg}\varphi$ pentru $\psi \in [0, \pi]$:

ψ	0	$\frac{1}{4}\pi$	$\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{\sqrt{\eta}}$	$\frac{1}{2}\pi$	$\operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(-\frac{1}{\sqrt{\eta}}\right)$	$\frac{3}{4}\pi$	π
$\operatorname{tg} \psi$	0	1	$1/\sqrt{\eta}$	$\pm \infty$	$-1/\sqrt{\eta}$	-1	0
$\operatorname{tg} \varphi$	0	\nearrow	$\frac{1}{2}(1-\eta)/\sqrt{\eta}$	$\searrow 0 \swarrow$	$-\frac{1}{2}(1-\eta)/\sqrt{\eta}$	\nearrow	0
$\frac{d}{d\psi} \operatorname{tg} \varphi$	+	+	+	0	-	-	+

Unghiul φ este pozitiv pentru ψ situat în primul (sau al treilea) cadran, și negativ pentru ψ situat în al doilea (sau al patrulea) cadran.

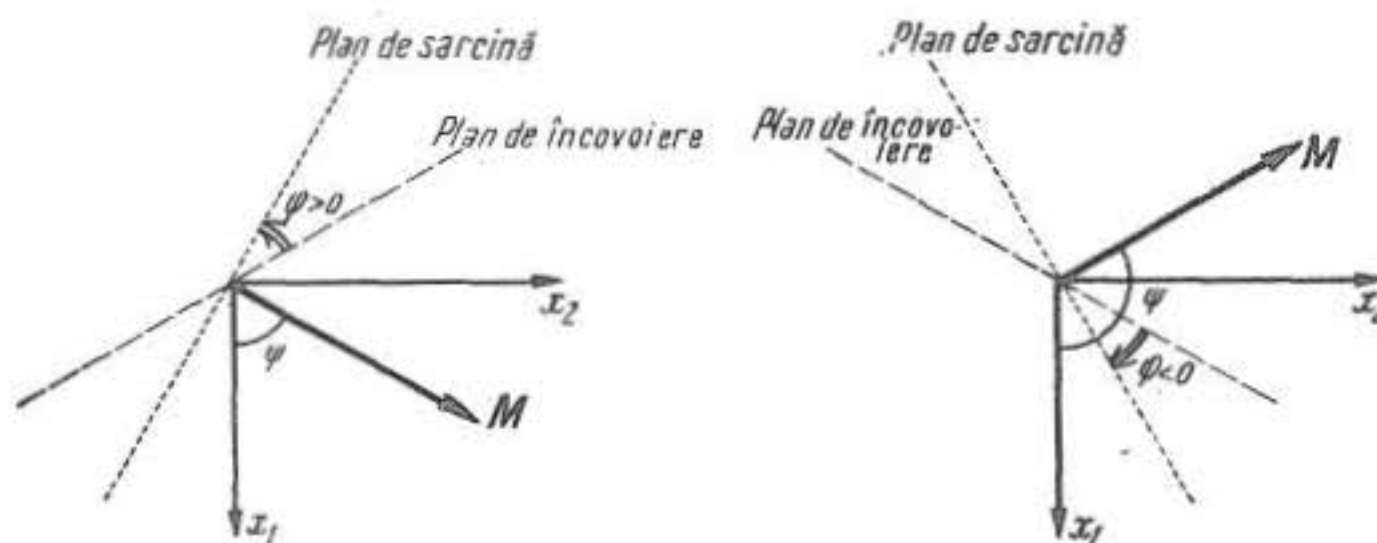


Fig. 5.6.3

Aceasta înseamnă că planul de încovoiere este situat întotdeauna *între* planul sarcinii și planul de flexibilitate. Cu alte cuvinte, planul de încovoiere se abate de la poziția sa optimă *mai repede* decât se abate planul sarcinii de la poziția sa cea mai indicată. De aceea, apar deplasări mari *pe alte direcții* decât cea corespunzătoare planului sarcinii.

Pentru o conică de ecuație $F(x_1, x_2) = 0$, ecuația diametrului conjugat cu o direcție dată m este

$$F_{,1} + mF_{,2} = 0 \quad (51)$$

(vezi de ex. G. Vrănceanu [1], vol. 1, § 4.2). Alegînd

$$F(x_1, x_2) \equiv x_1^2/l_2 + x_2^2/l_1 - 1 = 0, \quad (52)$$

așadar considerînd elipsa de inerție a secțiunii raportată la axele principale, și luînd $m = -\mathcal{M}_1/\mathcal{M}_2$ (panta urmei planului sarcinii), obținem pentru diametrul conjugat ecuația

$$x_1/l_2 - (\mathcal{M}_1/\mathcal{M}_2) (x_2/l_1) = 0, \quad (53)$$

așadar tocmai ecuația (22) a planului neutru.

Urma planului neutru și urma planului sarcinii sînt deci diametri conjugăți ai elipsei centrale de inerție a secțiunii. Or, diametrul conjugat cu o direcție dată este locul geometric al mijloacelor coardelor conice, paralele cu acea direcție. Dacă elipsa de inerție este construită, acest rezultat dă un mijloc simplu de a construi planul neutru (și deci și planul de încovoiere), pentru un plan al sarcinii dat.

Să determinăm acum tensiunea σ_{33} , curbura ρ_0^{-1} și linia elastică, punînd în evidență un termen principal corespunzător încovoierii în planul de rigiditate. Folosind din nou notațiile $M = |M| \exp(i\psi)$, și $\eta = l_1/l_2$, obținem din (17), (19) și (27)

$$\sigma_{33} = -(|M|/l_2) (x_1 \sin \psi - \eta^{-1} x_2 \cos \psi),$$

$$U_0 = u_1^0 + iu_2^0 = \frac{1}{2} (|M|/El_2) x_3^2 (\sin \psi - i\eta^{-1} \cos \psi), \quad (54)$$

$$|\rho_0^{-1}| = (|M|/El_2) \sqrt{\sin^2 \psi + \eta^{-2} \cos^2 \psi}.$$

Chiar pentru valori mici ale diferenței $\psi - \frac{1}{2}\pi$, tensiunea și curbura cresc sensibil față de cazul $\psi = \frac{1}{2}\pi$; în plus, apare și o componentă u_2^0 a deplasării.

Aceste modificări sînt cu atît mai importante, cu cît η este mai mic.

Din cele de mai sus rezultă că dacă sarcina este aplicată în planul de rigiditate, fenomenul de deformație depinde numai de rigiditatea geometrică maximă l_2 , și deci l_1 (așadar și η) poate fi oricît de mic. Secțiuni cu η mic permit mari economii de material. Totuși, valoarea η trebuie aleasă suficient de mare, pentru ca în cazul unor abateri ale sarcinii de la planul de rigiditate, tensiunile și deplasările ce rezultă din (54) să nu depășească limitele admisibile.

f) Aplicarea principiului lui Saint-Venant

Soluția (5.4), (5.18) este soluția *exactă*, dacă repartiția de tensiuni pe $x_3 = l$ coincide cu (5.4), și dacă baza $x_3 = 0$ este fixată în așa fel încît să avem (vezi (5.18)) :

$$U(\bar{\beta}, 0) = - (1/2E) [\nu \bar{\beta}^2 - 2\nu(d - \beta_3) \bar{\beta}], \quad u_3(\bar{\beta}, \bar{\beta}, 0) = 0. \quad (55)$$

Prin urmare, dacă baza $x_3 = 0$ este fixată într-un mod care nu permite deplasările tangențiale din (55), soluția își pierde valabilitatea.

Principiul lui Saint-Venant permite să afirmăm că, dacă repartiția de sarcini dată pe baza $x_3 = l$ nu coincide cu (5.4), dar are aceeași rezultantă și același moment rezultant, starea elastică reală diferă sensibil de starea (5.4), (5.18) numai în vecinătatea imediată a bazei $x_3 = l$.

Întrucît pentru deplasări nu dispunem de un echivalent al principiului lui Saint-Venant, abaterile de la starea (5.4), (5.18) pot fi importante, dacă condițiile (55) nu sînt satisfăcute. Cu alte cuvinte, modul concret în care ne dăm tensiunile pe baza $x_3 = l$ nu are mare însemnătate, soluția tinzînd spre o anumită soluție-standard, funcție de configurația secțiunii, de constantele elastice, și de torsorul sarcinii. În schimb, repartiția efectivă a deplasărilor pe baza $x_3 = 0$ poate influența sensibil starea elastică. Toate aceste fapte se pot verifica experimental.

§ 7. BARA ACȚIONATĂ PE BAZE DE SARCINI NORMALE. EXEMPLE

Problema întinderii (compresiunii) pure nu necesită comentarii. Menționăm numai că soluția (6.10) pentru $\mathcal{Q}_3 > 0$ își păstrează valabilitatea atîta timp cît $\sigma_{33} < \sigma_c$, în timp ce pentru $\mathcal{Q}_3 < 0$, fenomenul de flambaj apare de obicei cu mult înainte ca limita σ_c să fie atinsă.

În problema încovoierii pure, singurele calcule necesare sînt cele cerute de determinarea ariei, a centrului de greutate, a momentelor de inerție ale secțiunii, și a torsorului sarcinii. Reducerea la axe centrale principale este necesară nu atît pentru simplificarea formulelor, cît pentru a determina planul de rigiditate.

a) Cornier

Fie o bară de secțiune dată în figura 5.7.1. Din (A.3.4) — (A.3.6) obținem pe rînd

$$D = 66 \text{ cm}^2, \quad x_1^0 = -3,96 \text{ cm}, \quad x_2^0 = 6,46 \text{ cm};$$

$$J_{11} = 5\,368 \text{ cm}^4, \quad J_{22} = 2\,298 \text{ cm}^4, \quad J_{12} = -621 \text{ cm}^4.$$

(În calculul lui J_{12} trebuie să ținem seama de semnul integrandului pe diferitele porțiuni ale lui \mathcal{D} .) Raportînd secțiunea la axe centrale, paralele cu cele date, obținem din (A.3.9)

$$I_{11} = 2\,618 \text{ cm}^4, \quad I_{22} = 1\,265 \text{ cm}^4, \quad I_{12} = 1\,065 \text{ cm}^4.$$

Pentru a determina axele centrale principale de inerție, obținem din (A.7.29) valoarea $\tan 2\vartheta = -1,574$, de unde $\vartheta = -28^\circ 47'$ sau $\vartheta = 61^\circ 13'$. Alegând a doua soluție, poziția axelor va fi cea din figură.

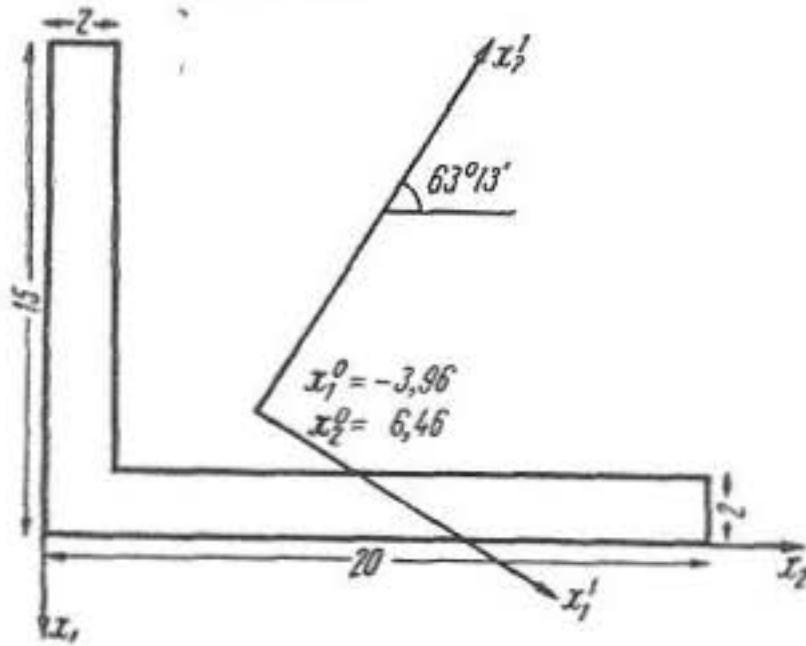


Fig. 5.7.1

Făcând uz și de (A.7.27) sau (A.7.28), obținem $I_1 \cong 680 \text{ cm}^4$, $I_2 \cong 3200 \text{ cm}^4$ (ceea ce justifică alegerea făcută mai sus între cele două valori ale unghiului ϑ).

Ca verificare, putem calcula în aceste axe momentul I_{12} , care trebuie să rezulte nul. Direcția optimă de aplicare a sarcinii este deci în lungul axei x_1' . Pentru o sarcină dirijată într-un mod oarecare efectuăm descompunerea momentului în componentele M_1 , M_2 , și facem uz de formulele din § 6.

b) Dreptunghi

Examinăm acest caz simplu, pentru a da o imagine clară asupra modificării secțiunilor. Laturile unei secțiuni $x_3 = c$ au, înainte de deformație, ecuațiile

$$x_2 = \pm b, \quad x_3 = c; \quad x_1 = \pm a, \quad x_3 = c. \quad (1)$$

După deformație, aceste laturi se transformă în virtutea relațiilor (6.31), în curbele

$$x_2 = \pm b + \frac{1}{2} \rho_2^{-1} [c^2 + \nu(b^2 - x_1^2)] \pm \nu \rho_1^{-1} b x_1, \quad x_3 = (1 - \rho_1^{-1} x_1 - \rho_2^{-1} x_2) c, \quad (2)$$

$$x_1 = \pm a + \frac{1}{2} \rho_1^{-1} [c^2 + \nu(a^2 - x_2^2)] \pm \nu \rho_2^{-1} a x_2, \quad x_3 = (1 - \rho_1^{-1} x_1 - \rho_2^{-1} x_2) c.$$

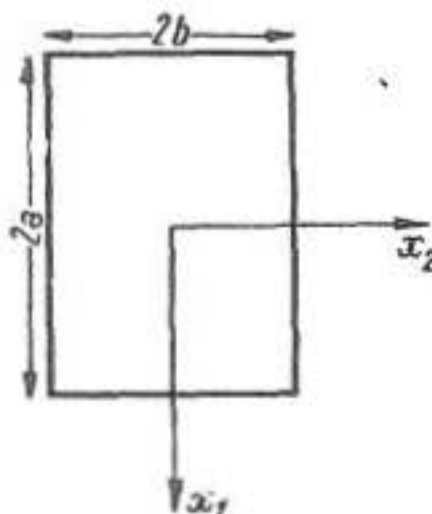


Fig. 5.7.2

Să presupunem că încovoierea se desfășoară în planul vertical Ox_1x_3 , așadar că $\rho_2^{-1} = 0$. Proiectând curbele (2) pe planul Ox_1x_2 , obținem ecuațiile

$$x_2 = \pm (1 + \nu \rho_1^{-1} x_1) b, \quad x_1 = \pm a + \frac{1}{2} \rho_1^{-1} [c^2 + \nu(a^2 - x_2^2)]. \quad (3)$$

Primele două sînt ecuațiile a două drepte, de pante

$$x_2/x_1 = \pm \nu \rho_1^{-1} b. \quad (4)$$

Pentru $M_2 > 0$, avem $\rho_1 > 0$, și din (4) rezultă că laturile verticale se îndepărtează în partea de jos a barei (cadranle 1 și 4), și se apropie în cea de sus — ceea ce era de așteptat, întrucît partea de jos este comprimată, iar cea de sus, întinsă. Pantele acestor drepte sînt cu atît mai mari în valoare absolută, cu cît ρ_1^{-1} este mai mare (așadar cu cît rigiditatea barei

este mai mică și deplasările mai mari), și cu cât b este mai mare (așadar cu cât secțiunea barei este mai lată). Dreapta $x_2 = 0$ rămâne nedeformată — așadar secțiunea nu se rotește în planul ei.

Laturile orizontale ale dreptunghiului se transformă în două arce de parabolă, de curbura aproximativ egală cu

$$\partial^2 x_1 / \partial x_2^2 = -\nu \rho_1^{-1}, \quad (5)$$

așadar avînd concavitătea îndreptată spre axa Ox_1 negativă, în sus. Termenul $\frac{1}{2} \rho_1^{-1} c^2$ din ultimele două ecuații (3) corespunde unei translații de ansamblu (funcție de x_3) a întregii secțiuni în jos, egală cu deplasarea u_1^0 a liniei elastice din (6.32).

Suprafețele superioară și inferioară ale barei sînt inițial dreptunghiuri situate în planele $x_1 = \pm a$. După deformație, ele se transformă în suprafețele

$$x = \pm a + \frac{1}{2} \rho_1^{-1} [x_3^2 + \nu(a^2 - x_2^2)], \quad (6)$$

așadar în niște paraboloizi hiperbolici, cu aspectul caracteristic de șea. Acesta este motivul pentru care, cu toate că linia elastică are concavitătea îndreptată în jos, laturile inițial orizontale ale secțiunii dreptunghiulare au, după deformație, concavitătea dirijată în sus.

Presupunînd acum că încovoierea se face în planul orizontal Ox_2x_3 , vom lua $\rho_1^{-1} = 0$ în (2), și vom ajunge la concluzii analoge, intervertind axele x_1 și x_2 .

Forma finală a laturilor secțiunilor pentru $\rho_1^{-1} \neq 0$, $\rho_2^{-1} \neq 0$ se obține din cea din primul caz, dacă adăugăm valorii x_2 din (3) termenul $\frac{1}{2} \rho_2^{-1} [c^2 + \nu(b^2 - x_1^2)]$, iar valorii x_1 ,

termenul $\pm \nu \rho_2^{-1} a x_2$. Toate laturile devin arce de parabolă. Apariția termenului $\frac{1}{2} \rho_2^{-1} c^2$ în expresia lui x_2 corespunde deplasării u_2^0 a liniei elastice din (6.32).

Prin urmare, secțiunea se deplasează în ansamblu cu cantitățile $u_1^0(x_3)$ pe direcția Ox_1 și $u_2^0(x_3)$ pe direcția Ox_2 , iar laturile sale se deformează prin suprapunerea unei rotații de tipul caracterizat prin (4), cu o deformare în arc de parabolă de tipul caracterizat în (5). În această deplasare, secțiunile nu se rotesc în ansamblul lor unele față de altele în jurul liniei elastice.

c) Rolul variației raportului $\eta = l_1/l_2$

Pentru un dreptunghi de laturi $2a$, $2b$, se obțin ușor valorile

$$l_1 = \frac{4}{3} ab^3, \quad l_2 = \frac{4}{3} a^3b. \quad (7)$$

Calculînd momentele centrale principale de inerție pentru secțiunile din figura de mai jos, căpătăm

pentru pătrat :	$l_1 = 4\,000 \text{ cm}^4,$	$l_2 = 4\,000 \text{ cm}^4;$
pentru dreptunghi :	$l_1 = 360 \text{ cm}^4,$	$l_2 = 4\,000 \text{ cm}^4;$
pentru secțiunea în I :	$l_1 \cong 590 \text{ cm}^4,$	$l_2 \cong 3\,990 \text{ cm}^4;$

Momentul de inerție maxim I_2 este aproximativ același în cele trei cazuri, astfel că trei bare având secțiunile considerate și fiind acționate de același moment M_2 , au aceeași linie elastică (vezi și § 6, pag. 194). Dar întrucât ariile celor trei secțiuni sînt de 219 cm^2 , de 120 cm^2 , respectiv de $98,4 \text{ cm}^2$, economia de material în ultimul caz se dovedește a fi considerabilă. Mai mult: tensiunile și deformațiile maxime rezultă mai mici decît cele

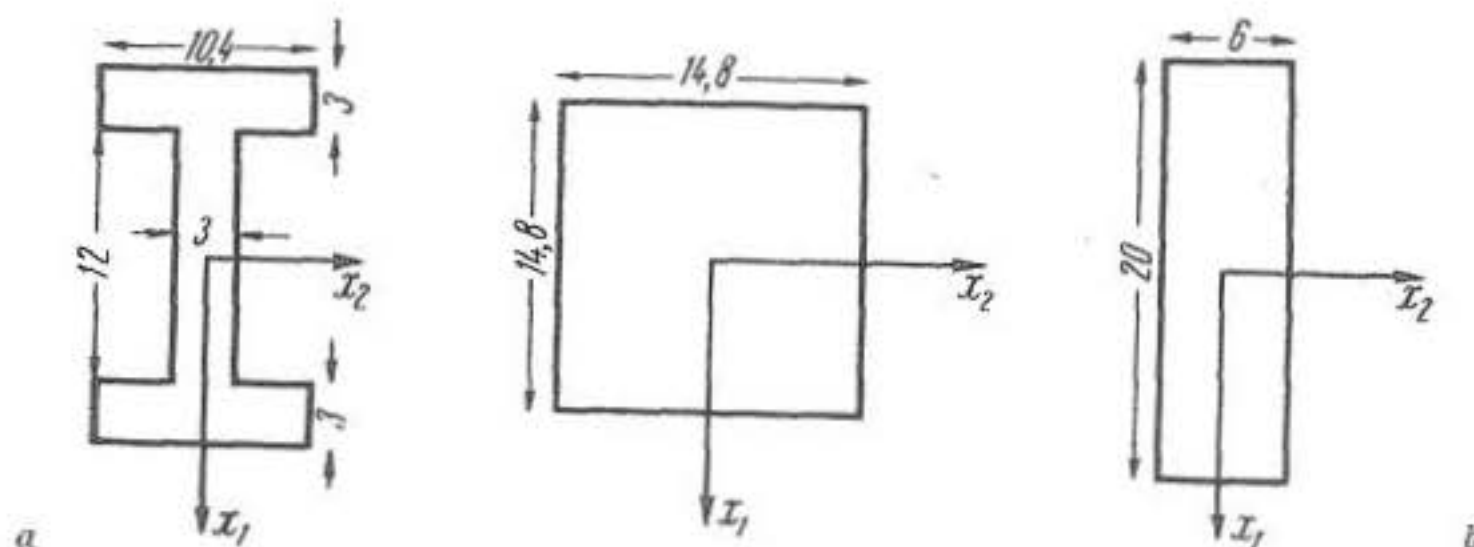


Fig. 5.7.3

atinse în cazul secțiunii dreptunghiulare; totodată, raportul η este mai mare decît în acest ultim caz, și de aceea secțiunea în I rezistă mai bine în eventualitatea încovoierii oblice.

Acest exemplu arată avantajele alungirii secțiunii pe direcții perpendiculare pe planul neutru, și a îndepărtării materialului de acest plan.

d) Încovoierea oblică a barei de secțiune dreptunghiulară

Fie o bară de oțel ($E \cong 2 \cdot 10^6 \text{ kgf/cm}^2$), de secțiune dreptunghiulară (vezi fig. 5.7.3), cu $I_1 = 360 \text{ cm}^4$, $I_2 = 4000 \text{ cm}^4$, $\eta = 0,09$, solicitată de o sarcină de intensitate $|M| = 8 \text{ tone-metri} = 0,8 \cdot 10^6 \text{ kgf} \cdot \text{cm}$. Formulele (6.54) și (6.49) devin aci

$$\begin{aligned}\sigma_{33} &= -200 [x_1 \sin \psi - (100/9)x_2 \cos \psi], \\ U_0 &= (1/20000) x_3^2 [\sin \psi - (100/9) i \cos \psi], \\ |\rho_0^{-1}| &= (1/10000) \sqrt{\sin^2 \psi + (100/9)^2 \cos^2 \psi}, \\ \operatorname{tg} \varphi &= (1 - 0,09) \operatorname{tg} \psi : (1 + 0,09 \operatorname{tg}^2 \psi).\end{aligned}\tag{8}$$

Abaterea maximă a planului de încovoiere de la planul sarcinii se obține pentru $\psi \cong 73^\circ$, și este egală cu $\varphi \cong 56^\circ$. Dar chiar pentru o abatere moderată, dată de ex. de unghiul $\psi = 84^\circ 50'$ (abatere de $5^\circ 10' = 0,09 \text{ rad}$), obținem din (8) valorile

$$\begin{aligned}\sigma_{33} &= -200 (0,996 x_1 - x_2), \quad U_0 = (1/20000) x_3^2 (0,996 - i), \\ |\rho_0^{-1}| &= 1,4/10000, \quad \operatorname{tg} \varphi = 0,835, \quad \varphi = 39^\circ 50'.\end{aligned}\tag{9}$$

Prin urmare, pentru o înclinare a planului sarcinii cu $5^\circ 10'$, față de planul de rigiditate, apare o componentă u_2^0 a deplasării aproximativ egală cu componenta u_1^0 (ceea ce

corespunde faptului că planul de încovoiere este înclinat de un unghi egal cu $\frac{1}{2} \pi - \psi + \varphi \cong 45^\circ$ față de planul de rigiditate (vezi prima fig. 5.6.3); curbura liniei elastice crește cu cca. 40%; iar tensiunea în punctul de maximă solicitare ($x_1 = 10$, $x_2 = -3$) crește cu cca. 30% (de la 2 000 la 2 600 kgf/cm², ceea ce pentru anumite tipuri de oțel poate însemna tocmai depășirea limitei de plasticitate).

Aceste efecte (cu atât mai pronunțate, cu cât η este mai mic) se datoresc apariției componentei $M_1 = 0,72$ tone-metri, care la prima vedere ar părea neglijabilă față de componenta $M_2 = 7,97$ tone-metri. Această neglijare nu este permisă, întrucât componenta M_1 acționează tocmai după direcția cea mai defavorabilă.

În particular, considerațiile de mai sus arată că nu orice modificare a secțiunii prin adăugire de material duce la ameliorarea calităților mecanice ale barei: o atare modificare poate face ca planul sarcinii (care rămâne neschimbat) să nu mai coincidă cu planul de rigiditate, și astfel să facă să apară deplasări și tensiuni uneori catastrofale.

§ 8. BARA ACȚIONATĂ PE BAZA $x_3 = l$ DE SARCINI TANGENȚIALE

În această formulare sînt cuprinse problemele clasice ale *torsiunii* și *încovoierii în consolă*, ambele cu caracter neelementar. Le vom studia împreună, cu ajutorul celor expuse în § 4, și urmărind analogia cu cele spuse în §§ 5—7.

Rezultatele inițiale în această direcție aparțin lui R. Capildeo [1], care a obținut primul soluția prin intermediul unei singure funcții de o variabilă complexă, definită în \mathcal{D} . Acest punct de vedere a fost reluat pe altă linie și a căpătat o mare dezvoltare datorită lucrărilor lui L. Milne-Thomson [1], [3].

Avem deci de integrat ecuațiile în tensiuni (4.16) cu condiția la limită (4.17) pe $\mathcal{L} = \text{fr } \mathcal{D}$, și cu condiția integrală (4.18) — și apoi ecuațiile fizico-geometrice (4.21)—(4.24). Bara este solicitată pe baza $x_3 = l$ de o sarcină *tangențială*, așadar cu

$$M = \mathcal{Q}_3 = 0. \quad (1)$$

De aci (vezi și § 2, pag. 169) rezultă că, oricare ar fi modul în care este fixată baza $x_3 = 0$, reacțiunile ce apar pe ea sînt static echivalente cu o sarcină tangențială, *plus* eventual un cuplu generat de o sarcină (reacțiune) normală.

Desigur, presupunerea $T \equiv 0$ din (5.3) nu mai poate fi utilizată (vezi (3.17) și (4.18)). Prin urmare, spre deosebire de cazul elementar al sarcinii normale, avem acum de rezolvat efectiv sistemul (4.16).

a) Ecuațiile în tensiuni

Introducînd ipoteza (1) în (4.14) și (3.23), obținem

$$\beta = \beta_3 = 0, \quad (2)$$

astfel că din (4.7) urmează

$$\sigma_{33} = \frac{1}{2} (x_3 - l) (\bar{\alpha} \bar{z} + \alpha \bar{z} - 2c). \quad (3)$$

Constantele α , c sînt cunoscute din (4.12) și (4.8) în funcție de unii parametri globali ai secțiunii și ai sarcinii.

Să transcriem acum sistemul de ecuații (4.16) sub forma

$$T_{,3} + \overline{T_{,3}} + \frac{1}{2} (\bar{\alpha} \bar{z} + \alpha \bar{z} - 2c) = 0, \quad T_{,33} + \frac{1}{4} (1 + \nu)^{-1} \alpha = 0. \quad (4)$$

Integrînd⁵⁾ a doua din aceste ecuații în raport cu \bar{z} , obținem

$$T_{,3} = -\frac{1}{4} (1 + \nu)^{-1} \alpha \bar{z} + T_1(z), \quad (5)$$

unde $T_1(z)$ este o funcție deocamdată arbitrară. Introducînd (5) în prima ecuație (4), obținem

$$T_1(z) + \overline{T_1(z)} + \frac{1}{4} (1 + \nu)^{-1} (1 + 2\nu) (\bar{\alpha} \bar{z} + \alpha \bar{z}) - c = 0. \quad (6)$$

Separînd aci în primul membru o funcție numai de z , iar în cel de al doilea, o funcție numai de \bar{z} (compară și cu (4.20)–(4.22)), deducem

$$T_1(z) = -\frac{1}{4} (1 + \nu)^{-1} (1 + 2\nu) \bar{\alpha} \bar{z} + \frac{1}{2} c + i\mu\tau, \quad (7)$$

unde μ este constanta lui Coulomb (introdusă aci pentru simetrizarea formulelor finale), iar τ este o constantă reală. (Spre deosebire de raționamentul din § 4, variabila x_3 nu apare aci.)

Introducînd acum (7) în (5) și integrînd în raport cu \bar{z} , căpătăm

$$T(z, \bar{z}) = -\frac{1}{4(1 + \nu)} \alpha \bar{z} \bar{z} - \frac{1 + 2\nu}{8(1 + \nu)} \bar{\alpha} \bar{z}^2 + \frac{1}{2} c \bar{z} + i\mu\tau \bar{z} + \overline{T_2(z)}, \quad (8)$$

unde $\overline{T_2(z)}$ este o funcție deocamdată arbitrară de \bar{z} .

Întrucît $T = \sigma_{31} + i\sigma_{32}$ este o funcție uniformă și de clasă $C^1(\mathcal{D})$, funcția T_2 rezultă a fi monogenă și uniformă, deci *olomorfă* în \mathcal{D} . (Singularități pe \mathcal{L} — de exemplu puncte critice algebrice — pot evident apare.) Notînd $T_2(z) = \mu\Phi(z)$, unde $\Phi(z)$ este olomorfă în \mathcal{D} , și amintind că orice funcție olomorfă posedă o primitivă, vom considera funcția definită de

$$\varphi'(z) = \Phi(z) = \mu^{-1} T_2(z), \quad \varphi(z) = p(x_1, x_2) + iq(x_1, x_2). \quad (9)$$

Ou ajutorul ei, relația (8) ia forma definitivă

$$T(z, \bar{z}) = \left(i\mu\tau + \frac{1}{2} c \right) \bar{z} - \frac{1 + 2\nu}{8(1 + \nu)} \bar{\alpha} \bar{z}^2 - \frac{1}{4(1 + \nu)} \alpha \bar{z} \bar{z} + \mu \overline{\varphi'(z)}, \quad (10)$$

⁵⁾ Vezi § A.4, pag. 704.

sau încă, dacă e mai comodă utilizarea constantelor E, ν :

$$T(z, \bar{z}) = \mu \left[\left(i\tau + \frac{1+\nu}{E} c \right) z - \frac{1+2\nu}{4E} \alpha \bar{z}^2 - \frac{1}{2E} \alpha z \bar{z} + \overline{\varphi'(z)} \right]. \quad (11)$$

Vom numi funcția $\varphi(z)$ — *funcția lui Capildeo și Milne-Thomson*. În expresia tensiunii tangențiale complexe $T(z, \bar{z})$ intervin constantele cunoscute α, c , și constanta necunoscută τ , pentru determinarea căreia vom face uz de valoarea încă neutilizată a momentului \mathcal{M}_3 . În acest scop, vom scrie (4.18) sub forma

$$\mathcal{M}_3 = \mathcal{M}_3^0 + \frac{1}{2} i(R_{\bar{z}} - \bar{R}_{z_r}), \quad (12)$$

unde

$$\mathcal{M}_3^0 = \frac{1}{2} i \iint_{\mathcal{D}} (\bar{T}_z - T_{\bar{z}}) dD, \quad (13)$$

sau încă, făcînd uz de expresia (10) a tensiunii $T(z, \bar{z})$:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_3^0 = & \mu \tau \iint_{\mathcal{D}} z \bar{z} dD - \frac{1-2\nu}{8(1+\nu)} \operatorname{Im} \left[\alpha \iint_{\mathcal{D}} z \bar{z}^2 dD \right] - \\ & - \mu \operatorname{Im} \iint_{\mathcal{D}} z \varphi'(z) dD, \end{aligned} \quad (14)$$

unde primele două integrale depind numai de geometria lui \mathcal{D} . Cea de a treia integrală depinde de φ , și deci de τ (vezi (10)). Prin urmare, (14) poate fi privită ca o relație din care se determină τ , după ce $\varphi(z)$ este deja determinată (în funcție τ ca parametru). În § 19 vom da formule principial mai simple pentru găsirea lui τ .

OBSERVAȚIE. Putem reveni acum la formula (4.31) pentru $\omega_{12,3}^m$. Întrucît $u_{3,\bar{z}\bar{z}}$ este o cantitate reală, din (4.23) și (4.30) obținem

$$\omega_{12,3} = - \operatorname{Im} U_{3\bar{z}} = - (1/\mu) \operatorname{Im} T_{\bar{z}}, \quad (15)$$

de unde, utilizînd (5) și (7):

$$\omega_{12,3}^m = - (1/\mu) \operatorname{Im} \iint_{\mathcal{D}} \left[- \frac{1}{4(1+\nu)} \alpha \bar{z} - \frac{1+2\nu}{4(1+\nu)} \alpha z + \frac{1}{2} c + i\mu\tau \right] dD,$$

și deci

$$\omega_{12,3}^m = - \tau + (\nu/E) \operatorname{Im} (\alpha z_0). \quad (16)$$

Aceasta înlocuiește formula (4.31). Starea elastică a secțiunilor e deci caracterizată de formulele (4.26), (4.29) și (16). Primele două au caracter elementar. După cum va rezulta din § 19, constanta τ depinde de asemenea numai de constantele elastice, de sarcină, și (de data aceasta sub o formă neelementară) de configurația geometrică a lui \mathcal{D} .

b) Ecuațiile fizico-geometrice

Pentru determinarea componentelor deplasării, ne rămân de integrat ecuațiile (4.21)–(4.24), unde vom introduce (3) și (10). Obținem :

$$U_{,\bar{i}} = 0, \quad (17)$$

$$U_{,i} = -\frac{\nu}{E}(x_3 - l)\bar{\alpha}_{\bar{\delta}} + \frac{\nu}{E}(x_3 - l)c + if(x_3), \quad (18)$$

$$U_{,3} = -2u_{3,\bar{i}} + \left(i\tau + \frac{c}{2\mu}\right)\bar{\delta} - \frac{1+2\nu}{8\mu(1+\nu)}\bar{\alpha}_{\bar{\delta}}^2 - \\ - \frac{1}{4\mu(1+\nu)}\alpha_{\bar{\delta}\bar{\delta}} + \overline{\varphi'(\bar{\delta})}, \quad (19)$$

$$u_{3,3} = \frac{1}{2E}(x_3 - l)(\bar{\alpha}_{\bar{\delta}} + \alpha_{\bar{\delta}} - 2c). \quad (20)$$

Calculând derivata $U_{,3\bar{i}}$ din (18) și din (19), egalând valorile obținute, și ținând seama că $(1+\nu)/E = 1/2\mu$, căpătăm

$$2u_{3,3\bar{i}} = -(1/2E)(\bar{\alpha}_{\bar{\delta}} + \alpha_{\bar{\delta}} - 2c) + i\tau - if'(x_3),$$

de unde, întrucît în primul membru avem o cantitate reală :

$$f(x_3) = \tau x_3 + C, \quad u_{3,3\bar{i}} = -(1/4E)(\bar{\alpha}_{\bar{\delta}} + \alpha_{\bar{\delta}} - 2c), \quad (21)$$

unde C este o constantă reală.

Integrînd ecuația (20) în raport cu x_3 , obținem

$$u_3(\bar{\delta}, \bar{\delta}, x_3) = (1/4E)(x_3^2 - 2lx_3)(\bar{\alpha}_{\bar{\delta}} + \alpha_{\bar{\delta}} - 2c) + w_1(\bar{\delta}, \bar{\delta}), \quad (22)$$

unde w_1 este o funcție reală; a doua relație (21) dă acum

$$w_{1,3\bar{i}} = -(1/4E)(\bar{\alpha}_{\bar{\delta}} + \alpha_{\bar{\delta}} - 2c), \quad (23)$$

de unde prin integrare în raport cu $\bar{\delta}$ și $\bar{\delta}$, obținem

$$w_1(\bar{\delta}, \bar{\delta}) = -(1/8E)(\bar{\alpha}_{\bar{\delta}} + \alpha_{\bar{\delta}} - 4c)\bar{\delta}\bar{\delta} + w_2(\bar{\delta}) + \overline{w_3(\bar{\delta})}. \quad (24)$$

Întrucît atît w_1 cît și paranteza din membrul al doilea din (24) sînt cantități reale, deducem că $w_2 \equiv w_3$, astfel că (22) devine

$$u_3 = (1/4E)(x_3^2 - 2lx_3)(\bar{\alpha}_{\bar{\delta}} + \alpha_{\bar{\delta}} - 2c) - \\ - (1/8E)(\bar{\alpha}_{\bar{\delta}} + \alpha_{\bar{\delta}} - 4c)\bar{\delta}\bar{\delta} + w_2(\bar{\delta}) + \overline{w_2(\bar{\delta})}. \quad (25)$$

Ecuațiile (17)–(19) iau acum forma

$$U_{,i} = 0, \quad (26)$$

$$U_{,i} = -\frac{\nu}{E}(x_3 - l)\bar{\alpha}_\delta + \frac{\nu}{E}(x_3 - l)c + i\tau x_3 + iC, \quad (27)$$

$$U_{,3} = -\frac{1}{2E}(x_3^2 - 2lx_3)\alpha + i\tau_\delta + \frac{\nu}{E}c_\delta - \\ -\frac{\nu}{2E}\bar{\alpha}_\delta^2 + [\overline{\varphi'(\delta)} - 2\overline{w'_2(\delta)}]. \quad (28)$$

Ținând seama de (26) în (28), rezultă că paranteza dreaptă — funcție de $\bar{\delta}$ — se reduce la o constantă complexă $B - iA$, de unde deducem

$$2w_2(\delta) = \varphi(\delta) - (B + iA)\delta + H + iK, \quad (29)$$

astfel că (25) devine în definitiv

$$u_3 = \operatorname{Re} \varphi(\delta) + \frac{x_3^2 - 2lx_3}{4E}(\bar{\alpha}_\delta + \alpha_\delta - 2c) - \\ - \frac{1}{8E}(\bar{\alpha}_\delta + \alpha_\delta - 4c)\delta\bar{\delta} - \operatorname{Re}[(B + iA)\delta] + H. \quad (30)$$

Totodată, ținând seama de (29) în (28), putem integra ecuațiile (26)–(28), de unde căpătăm pe rînd

$$U(\delta, x_3) = -\frac{x_3^3 - 3lx_3^2}{6E}\alpha + i\tau_\delta x_3 + \frac{\nu}{E}c_\delta x_3 - \frac{\nu}{2E}\bar{\alpha}_\delta^2 x_3 + \\ + (B - iA)x_3 + U_1(\delta),$$

$$U(\delta, x_3) = -\frac{\nu}{2E}(x_3 - l)\bar{\alpha}_\delta^2 + \frac{\nu}{E}(x_3 - l)c_\delta + \\ + i\tau_\delta x_3 + iC_\delta + U_2(x_3),$$

ceea ce e posibil dacă și numai dacă

$$U_1(\delta) - \frac{\nu}{2E}l\bar{\alpha}_\delta^2 + \frac{\nu}{E}lc_\delta - iC_\delta = \\ = U_2(x_3) + \frac{x_3^3 - 3lx_3^2}{6E}\alpha - (B - iA)x_3 \equiv F + iG,$$

de unde conchidem în definitiv

$$U(\delta, x_3) = -\frac{x_3^3 - 3lx_3^2}{6E}\alpha - \frac{\nu}{2E}(x_3 - l)(\bar{\alpha}_\delta^2 - 2c_\delta) + \\ + i\tau_\delta x_3 + (B - iA)x_3 + iC_\delta + F + iG. \quad (31)$$

Termenii care depind de constantele A, B, C, F, G, H sînt identici cu cei din (5.14) și (5.16), și corespund deci unei roto-translații rigide a barei în ansamblu (vezi (5.17)). Făcînd abstracție de ei, obținem componentele deplasării sub forma

$$U = -\frac{\alpha}{2E} \left(\frac{1}{3} x_3^3 - l x_3^2 \right) - \frac{\nu}{2E} (x_3 - l) (\bar{\alpha}_3^2 - 2c_3) + i\tau_3 x_3, \quad (32)$$

$$u_3 = \operatorname{Re} \varphi(\zeta) + \frac{x_3^2 - 2lx_3}{4E} (\bar{\alpha}_3 + \alpha_3 - 2c) - \frac{1}{8E} (\bar{\alpha}_3 + \alpha_3 - 4c) \zeta \bar{\zeta}.$$

Formulele (3), (10) și (32), împreună cu relațiile (4.12), (4.8) și (14) care dau valorile constantelor α, c, τ , rezolvă problema: funcția lui Capildeo și Milne-Thomson se dovedește a fi un *potențial de deplasare* (și deci și de tensiune) al problemei. Aceste formule concentrează acum întreaga dificultate asupra determinării funcției $\varphi(\zeta)$ din condiția la limită (4.17) și condiția de normare (4.18), singurele rămase încă nefolosite.

Pentru a fixa constantele A, B, C, F, G, H sînt necesare date suplimentare. Din punct de vedere practic, este important să exprimăm exact condițiile de fixare ale barei — condiții care depind adesea de natura materialelor barei și corpului în care ea este fixată, precum și de felul în care este realizată fixarea (sudură, nituire etc.). Eventuale greșeli în această chestiune nu alterează valorile deformației și tensiunii, dar pot conduce la valori cu totul eronate ale componentelor deplasării.

§ 9. ANALIZA STĂRII ELASTICE A BAREI ACȚIONATE PE BAZA $x_3 = l$ DE SARCINI TANGENȚIALE

a) Comportarea secțiunilor

Ca și în § 6, începem prin a face uz de relațiile generale (4.26), (4.29) și (4.31) — înlocuită acum prin (8.16). Întrucît avem $M = \mathcal{Q}_3 = 0$, din (4.26) deducem

$$\varepsilon_{31}^m + i\varepsilon_{32}^m = (1/2\mu) (R/D), \quad \varepsilon_{33}^m = 0. \quad (1)$$

Mai departe, ținînd seama de expresiile (8.11), (8.30) și (8.31) ale tensiunii și deplasării în (4.27) și (4.30), obținem

$$\begin{aligned} \omega_{31} + i\omega_{32} = -U_{,3} + \frac{1}{2\mu} T = \frac{\alpha}{2E} (x_3^2 - 2lx_3) - \frac{1-2\nu}{8E} \bar{\alpha}_3^2 + \\ + \frac{1-\nu}{2E} c_3 - \frac{1}{2} i\tau_3 - \frac{1}{4E} \alpha_3 \bar{\alpha}_3 + \frac{1}{2} \overline{\varphi'(\zeta)} - B + iA, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\omega_{12} = -\operatorname{Im} U_{,3} = -\frac{i\nu}{2E} (x_3 - l) (\bar{\alpha}_3 - \alpha_3) - \tau x_3 - C,$$

astfel că (vezi și (4.29) și (8.16))

$$\omega_{31,3}^m + i\omega_{32,3}^m = (\alpha/E)(x_3 - l), \quad (3)$$

și

$$\omega_{12,3}^m = -\tau + (\nu/E) \operatorname{Im}(\bar{\alpha}\beta_0). \quad (4)$$

Prin urmare, secțiunile sînt supuse simultan la alunecare, încovoiere și torsiune. Spre deosebire de cazul încovoierii pure (vezi (6.3)), rotirile din (3) sînt funcții de x_3 ; așadar, dacă $R \neq 0$, starea secțiunilor nu este aceeași în lungul barei.

Măsura alunecării și încovoierii rezultă din (1) și (3) ca funcție de R . Măsura torsiunii rezultă din (4) ca funcție de R și \mathcal{M}_3 .

De aci urmează că prezintă interes cazul particular $R = 0$, $\mathcal{M}_3 \neq 0$: alunecările și încovoierile sînt nule, tensiunea normală σ_{33} este de asemenea nulă, iar bara, supusă în toate secțiunile numai la tensiuni tangențiale $T(\beta, \bar{\beta})$, se zice că este în stare de *torsiune pură*. Această stare va fi studiată în §§ 13–18.

Cazul $R \neq 0$, $\mathcal{M}_3 = 0$ nu este complementar celui dintîi. (Dacă $R \neq 0$, egalitatea $\mathcal{M}_3 = 0$ în raport cu un anumit punct nu are semnificație fizică.)

Am văzut în § 2 că sarcina este echivalentă cu o forță unică dirijată în lungul axei centrale (2.3):

$$\mathcal{R}_2 x_1 - \mathcal{R}_1 x_2 - \mathcal{M}_3^0 = 0, \quad x_3 = l. \quad (5)$$

Notînd cu β_r punctul de aplicare al forței R , momentul acesteia față de origine este dirijat după Ox_3 și are mărimea $\mathcal{R}_2 x_1^r - \mathcal{R}_1 x_2^r$. O astfel de forță este deci static echivalentă cu sistemul format din forța R aplicată în origine, plus un cuplu de moment $\mathcal{M}_3 = \mathcal{R}_2 x_1^r - \mathcal{R}_1 x_2^r$ (vezi și (3.26)).

Oricum am alege originea (eventual chiar în β_r), formula (4) arată că trebuie să ne așteptăm în general la apariția unei torsiuni nenule.

Așadar, încovoierea sub acțiunea unei forțe tangențiale este întotdeauna însoțită de alunecare, și în general și de torsiune. Acest tip de încovoiere se numește *încovoiere în consolă*, și va fi studiat în §§ 19–22.

Pentru un sistem de sarcini de rezultantă $R \neq 0$, nu prezintă deci utilitate reducerea tursorului la forma minimală, întrucît prin aceasta torsiunea nu dispăre. Dacă $R \neq 0$, pentru o origine și axe alese într-un mod oarecare, vom considera deci cazul general $R \neq 0$ și $\mathcal{M}_3 \neq 0$ relativ la un punct oarecare.

b) Elemente geometrice esențiale

Ca și în § 6, vom alege acum drept axe, axele centrale principale de inerție ale secțiunii. Din (4.12) obținem

$$\alpha = (\mathcal{R}_1/l_2) + i(\mathcal{R}_2/l_1), \quad (6)$$

astfel că formulele (8.3) și (8.32) devin (compară cu (6.17) și (6.18))

$$\sigma_{33} = (x_3 - l) [(\mathcal{R}_1/l_2) x_1 + (\mathcal{R}_2/l_1) x_2], \quad (7)$$

respectiv

$$\begin{aligned} u_1 = & -\frac{\mathcal{R}_1}{2El_2} \left[\frac{1}{3} x_3^3 - lx_3^2 + \nu(x_3 - l)(x_1^2 - x_2^2) \right] - \\ & - \nu \frac{\mathcal{R}_2}{El_1} (x_3 - l) x_1 x_2 - \tau x_3 x_2, \\ u_2 = & -\frac{\mathcal{R}_2}{2El_1} \left[\frac{1}{3} x_3^3 - lx_3^2 + \nu(x_3 - l)(x_2^2 - x_1^2) \right] - \\ & - \nu \frac{\mathcal{R}_1}{El_2} (x_3 - l) x_1 x_2 + \tau x_3 x_1, \end{aligned} \quad (8)$$

$$u_3 = \operatorname{Re} \varphi(\beta) + \left(\frac{\mathcal{R}_1}{El_2} x_1 + \frac{\mathcal{R}_2}{El_1} x_2 \right) \left[\frac{1}{2} x_3^2 - lx_3 - \frac{1}{4} (x_1^2 + x_2^2) \right].$$

Luînd aci $x_1 = x_2 = 0$, obținem ecuația liniei elastice (compară cu (6.19), (6.20)) :

$$u_1^0 = -\frac{\mathcal{R}_1}{2El_2} \left(\frac{1}{3} x_3^3 - lx_3^2 \right), \quad u_2^0 = -\frac{\mathcal{R}_2}{2El_1} \left(\frac{1}{3} x_3^3 - lx_3^2 \right), \quad (9)$$

$$u_3^0 = \operatorname{Re} \varphi(0) = \text{const.},$$

sau încă

$$x_1 = -\frac{\mathcal{R}_1}{2El_2} \left(\frac{1}{3} x_3^3 - lx_3^2 \right), \quad x_2 = -\frac{\mathcal{R}_2}{2El_1} \left(\frac{1}{3} x_3^3 - lx_3^2 \right), \quad (10)$$

de unde rezultă evident că linia elastică este o curbă plană. Ca și în cazul încovoierii pure, sîntem deci conduși la a considera un *plan de încovoiere*, de ecuație

$$(\mathcal{R}_2/l_1) x_1 - (\mathcal{R}_1/l_2) x_2 = 0. \quad (11)$$

De asemenea, din (7) deducem că există un *plan neutru*

$$(\mathcal{R}_1/l_2) x_1 + (\mathcal{R}_2/l_1) x_2 = 0, \quad (12)$$

pe care avem $\sigma_{33} = \varepsilon_{33} = 0$. (Compară cu (6.21), (6.22).)

Planele (11) și (12) sînt evident perpendiculare.

Pentru a determina raza de curbură a liniei elastice, avem de repetat calculele din § 6. Luînd $x_3 \cong s$, și deci $d^2 x_3 = 0$, obținem din (6.23) și (10)

$$A = -(\mathcal{R}_2/El_1) (x_3 - l) (dx_3)^3, \quad B = -(\mathcal{R}_1/El_2) (x_3 - l) (dx_3)^3, \quad C = 0, \quad (13)$$

de unde în definitiv obținem formulele corespunzătoare cu (6.29) :

$$\rho_1^{-1} = -(\mathcal{R}_1/E|_2)(x_3 - l), \quad \rho_2^{-1} = -(\mathcal{R}_2/E|_1)(x_3 - l), \quad \rho_0^{-2} = \rho_1^{-2} + \rho_2^{-2}. \quad (14)$$

Semnele alese pentru ρ_1, ρ_2 se explică ușor, ținând seama că $x_3 - l < 0$, și că pentru $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2 > 0$, din (9) urmează $u_1^0 > 0, u_2^0 > 0$. Introducând $\beta = \mathcal{R}_3 = 0$ în (4.10), deducem, pe o secțiune oarecare,

$$M(x_3) = -i(x_3 - l)R, \quad (15)$$

adică (vezi și (3.24), (3.25)) :

$$\mathcal{M}_1(x_3) = (x_3 - l)\mathcal{R}_2, \quad \mathcal{M}_2(x_3) = -(x_3 - l)\mathcal{R}_1, \quad (16)$$

astfel că primele două formule (14) devin

$$\rho_1^{-1} = \mathcal{M}_2(x_3)/E|_2, \quad \rho_2^{-1} = -\mathcal{M}_1(x_3)/E|_1. \quad (17)$$

Sub această formă, analogia cu (6.29) este evidentă. (Totuși, momentele sînt aci funcții de x_3 .) Acest fapt permite să interpretăm fenomenul încovoierii în consolă — *din punctul de vedere al acțiunii momentelor* — ca o suprapunere de încovoieri pure locale.

A treia formulă (14) arată că încovoierea nu mai are loc în arc de cerc.

Din (9) se vede că, pentru $x_3 \cong s$, avem

$$\partial^2 u_1^0 / \partial x_3^2 = \rho_1^{-1}, \quad \partial^2 u_2^0 / \partial x_3^2 = \rho_2^{-1}, \quad (18)$$

de unde, comparînd cu (17),

$$\partial^2 u_1^0 / \partial x_3^2 = \mathcal{M}_2(x_3)/E|_2, \quad \partial^2 u_2^0 / \partial x_3^2 = -\mathcal{M}_1(x_3)/E|_1, \quad (19)$$

ceea ce justifică teorema momentelor încovoietoare din rezistența materialelor.

Să înlocuim în (8.32) expresiile $\frac{1}{3}x_3^3 - lx_3^2$ și $x_3^2 - 2lx_3$ prin $\frac{1}{3}(x_3 - l)^3$, respectiv $(x_3 - l)^2$, ceea ce revine la a adăuga deplasării o deplasare rigidă. Ținînd seama de (14), obținem acum

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{2} \rho_1^{-1} \left[\frac{1}{3} (x_3 - l)^3 + \nu (x_1^2 - x_2^2) \right] + \nu \rho_2^{-1} x_1 x_2 - \tau x_3 x_2, \\ u_2 &= \frac{1}{2} \rho_2^{-1} \left[\frac{1}{3} (x_3 - l)^3 + \nu (x_2^2 - x_1^2) \right] + \nu \rho_1^{-1} x_1 x_2 + \tau x_3 x_1, \\ u_3 &= \operatorname{Re} \varphi(\zeta) - (\rho_1^{-1} x_1 + \rho_2^{-1} x_2) \left[\frac{1}{2} (x_3 - l) - \frac{1}{4} \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_3 - l} \right], \end{aligned} \quad (20)$$

relații apropiate de (6.31), dacă facem abstracție de prezența lui $\varphi(\zeta)$. De aci rezultă totodată limpede că problema încovoierii consolei nu poate fi rezolvată corect în cadrul ipotezei secțiunilor plane.

Neglijind încă în (20) componentele unei roto-translații rigide, obținem pentru linia elastică expresii apropiate de (6.32):

$$u_1^0 = \frac{1}{2} \rho_1^{-1} \left(\frac{1}{3} x_3^2 - \frac{2}{3} l x_3 \right), \quad u_2^0 = \frac{1}{2} \rho_2^{-1} \left(\frac{1}{3} x_3^2 - \frac{2}{3} l x_3 \right), \quad u_3^0 = \operatorname{Re} \varphi(0). \quad (21)$$

Mai departe, din (7), (11) și (12) obținem acum pentru *tensiunea normală*:

$$\sigma_{33} = -E(\rho_1^{-1} x_1 + \rho_2^{-1} x_2); \quad (22)$$

pentru *planul de încovoiere*:

$$\rho_2^{-1} x_1 - \rho_1^{-1} x_2 = 0; \quad (23)$$

pentru *planul neutru*:

$$\rho_1^{-1} x_1 + \rho_2^{-1} x_2 = 0. \quad (24)$$

Considerind și planul ce trece prin origine și conține vectorul de componente $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ — obținem, ținând seama de (14), pentru *planul sarcinii*:

$$l_1 \rho_2^{-1} x_1 - l_2 \rho_1^{-1} x_2 = 0. \quad (25)$$

Relațiile (22) — (25) *coincid* cu relațiile corespunzătoare (6.30), (6.33), (6.34) și (6.47) din cazul încovoierii pure — cu deosebirea că razele de curbura ρ_1, ρ_2 sînt acum funcții liniare de x_3 .

La fel ca în problema încovoierii pure, își găsesc deci și aci justificare îndepărtarea materialului de planul neutru și folosirea de bare cu momente centrale principale de inerție mult diferite. De asemenea își păstrează valabilitatea cele spuse în § 6 relativ la încovoierea în planul de rigiditate, și la caracterul variației stării elastice o dată cu abaterea planului sarcinii de la planul de rigiditate.

Desigur însă că *de aci nu rezultă că fenomenul încovoierii în consolă ar fi de același tip cu cel al încovoierii pure*: cele de mai sus se referă numai la informațiile pe care componenta elementară a soluției — cea relativă la tensiunile normale — ni le furnizează; ele nu se referă la fenomenele de alunecare și torsionare, determinate de apariția tensiunilor tangențiale.

OBSERVAȚIE. Unele relații din teoria încovoierii în consolă pot fi obținute direct din cele corespunzătoare, cunoscute din teoria încovoierii pure. Astfel, componenta σ_{33} se capătă înlocuind pur și simplu β prin $(x_3 - l)\alpha$. Din (4.15) și (4.12) se vede că aceasta revine la a înlocui M prin $-iR(x_3 - l)$, adică \mathcal{M}_1 prin $(x_3 - l)\mathcal{R}_2$, și $-\mathcal{M}_2$ prin $(x_3 - l)\mathcal{R}_1$. Relația (6.17) se transformă astfel direct în (7), dar transcrierea relației (6.18) nu este permisă, întrucît deplasarea tangențială depinde și de tensiunea tangențială, care este nulă în cazul încovoierii pure. Dimpotrivă, expresiile (6.30), (6.33), (6.34) și (6.47) — care depind numai de tensiunea normală — conduc imediat la (22) — (25).

§ 10. OBSERVAȚII ASUPRA SOLUȚIEI PROBLEMEI ANTIPLANE

Studiul problemei antiplane a cerut două secole de la prima sa formulare pînă la prima sa soluție, și a putut fi dus pînă la capăt numai datorită metodei semiinverse și a principiului lui Saint-Venant.

Istoriceste vorbind, metoda semiinversă a fost utilizată separat, cu ipoteze distincte (uneori în tensiuni, alteori în deplasări) pentru fiecare din sub-problemele ce se desprind din problema antiplană. În fapt însă, ipoteza unică (3.9) se dovedește îndestulătoare pentru rezolvarea coerentă a întregii probleme, constituind astfel un exemplu ne-banal de fertilitate a metodei semiinverse.

La examinarea rezultatelor obținute, se constată caracterul elementar al soluției corespunzătoare sarcinii normale, și caracterul neelementar al celei corespunzătoare sarcinii tangențiale.

Tensiunea normală σ_{33} și deplasarea tangențială complexă U sînt întotdeauna polinoame în \bar{z} , $\bar{\bar{z}}$, x_3 . Tensiunea tangențială complexă T și deplasarea normală u_3 depind esențialmente de funcția $\varphi(\bar{z})$, ceea ce în cazul torsiunii și al încovoierii consolei conferă caracterul ne-elementar al acestei probleme.

Faptul că atît în problema încovoierii pure, cît și în problema încovoierii consolei avem de-a face la prima vedere cu încovoierea barei sub acțiunea unor momente încovoietoare în fiecare secțiune, nu trebuie să mascheze deosebirea principală dintre cele două probleme, care constă tocmai în apariția tensiunilor tangențiale în cea de a doua dintre ele.

Toate soluțiile astfel obținute satisfac ecuațiile elasticității pentru forțe de volum nule și pentru suprafața laterală liberă.

a) Aplicarea principiului lui Saint-Venant

În ce privește solicitarea bazelor, este frecvent cazul în care pe una din ele este aplicată o sarcină activă, de natură cu totul oarecare, în timp ce pe cealaltă bază sînt aplicate reacțiuni, funcții de sarcina activă și care au ca rol solidarizarea barei cu ansamblul unei construcții, mașini etc.

Avem deci de-a face în fond cu date de tip Neumann — dar sub o formă integrală — pe una din baze, fie ea $x_3 = l$, și ne rămîne să ne preocupăm de natura deplasărilor pe baza $x_3 = 0$.

Acestea rezultă, pentru întinderea pură, din (6.10) :

$$u_1 = -(\nu \mathcal{R}_3 / ED) x_1, \quad u_2 = -(\nu \mathcal{R}_3 / ED) x_2, \quad u_3 = 0; \quad (1)$$

pentru încovoierea pură, din (6.14) :

$$U(\bar{z}, 0) = -(\nu / 2E) (\bar{\beta} \bar{z}^2 - 2d\bar{z}), \quad u_3(\bar{z}, \bar{\bar{z}}, 0) = 0, \quad (2)$$

pentru torsiune și încovoierea în consolă, din (8.32) :

$$\begin{aligned} U(\beta, 0) &= (\nu l/2E) (\bar{\alpha}\beta^2 - 2c\beta), \\ u_3(\beta, \bar{\beta}, 0) &= \operatorname{Re} \varphi(\beta) - (1/8E) (\bar{\alpha}\beta + \alpha\bar{\beta} - 4c) \beta\bar{\beta}. \end{aligned} \quad (3)$$

Valorile la limită ale tensiunilor pe baza $x_3 = l$ rezultă, pentru întinderea pură, din (6.10) :

$$\sigma_{33}(\beta, \bar{\beta}, l) = \mathcal{R}_3/D; \quad (4)$$

pentru încovoierea pură, din (6.13) :

$$\sigma_{33}(\beta, \bar{\beta}, l) = \frac{1}{2} (\bar{\beta}\beta + \beta\bar{\beta} - 2d); \quad (5)$$

pentru torsiune și încovoierea în consolă, din (8.3), (8.10) :

$$\sigma_{33}(\beta, \bar{\beta}, l) = 0, \quad \sigma_{31} + i\sigma_{32} = T(\beta, \bar{\beta}) \neq 0. \quad (6)$$

În virtutea teoremei de unicitate, soluțiile obținute sînt soluții *exacte* (inclusiv pentru cazul barei cilindrice scurte), și chiar *singurele* soluții regulate posibile în cazul liniar — dacă baza $x_3 = l$ este acționată de sarcini distribuite după legile (4)–(6) și dacă punctele bazei $x_3 = 0$ se deplasează în conformitate cu (1)–(3).

Aparent, aceasta înseamnă că soluțiile prezentate mai sus corespund numai condițiilor la limită — foarte restrictive — din (1)–(6). Importanța principiului lui Saint-Venant constă tocmai în faptul că el garantează valabilitatea *universală* a acestor soluții.

Pentru aceasta, este suficient ca bara să fie destul de zveltă (cel puțin de 3–4 ori mai lungă decît dimensiunile ei transversale); ca natura fixării bazei $x_3 = 0$ să nu contrazică flagrant condițiile (1)–(3) (căci pentru deplasări nu dispunem de un echivalent al principiului lui Saint-Venant); ca secțiunea \mathcal{D} să fie de așa natură încît aplicarea principiului lui Saint-Venant să fie permisă.

Prima condiție este evidentă.

Cea de a doua cere ca, în cazul întinderii sau încovoierii pure, baza fixată să nu admită deplasări în lungul axei Ox_3 , și să fie îngăduită o *anume* deplasare în chiar planul ei; iar în cazul torsiunii și al încovoierii în consolă, să fie îngăduită o *anumită* libertate de deplasare a bazei fixate, atît în planul ei, cît și în afara acesteia (*deplanare*).

Dacă o astfel de libertate nu există (de ex., dacă $u_3(\beta, \bar{\beta}, 0) \equiv 0$), soluția își pierde valabilitatea. În acest caz apare o legătură între tensiunile tangențiale și cele longitudinale, care pierd caracterul lor elementar.

Încovoierea sau torsiunea în sensul problemei antiplane se numește *liberă*; în cazul contrar mai sus menționat, spunem că avem de-a face cu încovoiere sau torsiune *împiedicată*. Aceste din urmă stări sînt încă destul de puțin studiate, cu toată importanța lor. Pentru unele rezultate mai vechi, vezi de exemplu A. Föppl și L. Föppl [1], § 77; P. Papkovici [4], § 7.21; S. Timoshenko și J. Goodier [1], § 103. Pentru torsiunea împiedicată, vezi încă articolele lui E. Reissner [5]–[7]; G. Gheongian [1], J. Nowinski [1], V. Prokopov [1] (pentru secțiuni pline); S. Birman [1], K. Kovalev și I. Iagn [1] (pentru secțiuni închise cu pereți subțiri).

În fine, a treia condiție cere ca secțiunea \mathcal{S} să fie de așa natură încît orice sistem de sarcini echivalent cu zero aplicat pe baza $x_3 = l$ să dea tensiuni ce tind la zero la distanțe relativ mici de bază. Pot exista cazuri cînd lucrurile nu se petrec așa. Într-adevăr, să considerăm o bară de secțiune în I, solicitată de patru forțe dispuse ca în figură. Dacă grosimea pereților barei este mică (*profil cu pereți subțiri*) atunci cele două aripi ale profilului se încovoale — în direcții opuse — separat, și tensiunile σ_{33} sînt cu atît mai mari, cu cît grosimea inimii (care solidarizează aripile) este mai mică. Evident, nerespectarea principiului lui Saint-Venant provine din faptul că cea mai mică dintre dimensiunile bazei este mică în raport cu dimensiunile ei de ansamblu, astfel încît efectul de redistribuție a tensiunilor, caracteristic pentru principiul lui Saint-Venant, nu se mai poate manifesta.

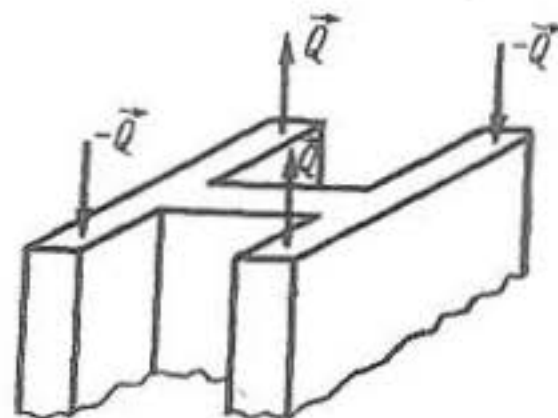


Fig. 5.10.1

Primejdia nerespectării celei de a treia condiții este deosebit de mare în cazul — de mare importanță practică — al unor profile cu pereți subțiri, cum sînt de pildă profilele uzuale de traverse (în T, în I, corniere), grinzi, tuburi, frecvent folosite în construcții. Menționăm că și problema flambajului unor astfel de bare se pune altfel decît la barele cu secțiune „plină”. Pentru barele cu pereți subțiri, cercetările lui V. Z. Vlassov [2], [3] au făcut epocă. Pentru unele indicații, vezi de ex. N. Beliaev [2], capitolul 30; M. Filonenko-Borodici et al. [1], volumul 2, capitolele 15, 18 și 19; Iu. Rabotnov [2], capitolul 11; vezi încă articolul de analiză al lui G. Djanelidze [2].

În cadrul astfel precizat, cele de mai sus trebuie înțelese în sensul că, pentru fiecare bară dată, solicitată de o sarcină oarecare pe baze, există o anumită repartitie-standard a deplasărilor, deformațiilor și tensiunilor în interior, repartitie către care cea reală tinde la distanță suficientă de baze dacă condițiile la limită pe baza $x_3 = l$ sînt respectate global, și cu care ea coincide dacă condițiile pe ambele baze sînt respectate în fiecare punct.

Soluția problemei antiplane constituie un mare pas înainte față de soluțiile rezistenței materialelor. Într-adevăr, în cadrul problemei antiplane, numai sarcina e schematizată, fiind înlocuită cu o anumită sarcină-standard, de același tursor. Aspectul geometric al barei și al deformației sale este însă deplin respectat. Dimpotrivă, în rezistența materialelor — atunci cînd se poate ataca problema — se schematizează și acest din urmă aspect, ceea ce conduce la incompatibilități cu ecuațiile exacte ale fenomenului. (Numai ecuațiile de echilibru sînt respectate.)

Principiul lui Saint-Venant afirmă că în cazul barei zvelte, repartitia tensiunilor depinde în esență de geometria secțiunii și în plus, numai ca parametri, de anumiți factori ce descriu sarcina și materialul. Această soluție este deci cu atît mai de preț cu cît aspectul secțiunii este mai complicat, și deci tensiunile — funcții de $\varphi(\delta)$ — se abat mai mult de la cele prezumate de rezistența materialelor.

Spre deosebire de rezistența materialelor, caracterul unidimensional al problemei constă deci aici *numai* în aplicarea principiului lui Saint-Venant.

Chestiunea se complică încă mai mult în cazul torsiunii și încovoierii împiedicate a barelor cu pereți subțiri. Împiedicarea deplasării anumitor secțiuni are o mare importanță practică, întrucât apariția de noi componente ale tensiunii echivalează cu intrarea în funcțiune a unor rezerve de rezistență ale materialului, nefolosite în cazul torsiunii și încovoierii libere.

b) Criterii de rezistență

Să examinăm acum pe scurt chestiunea rezistenței barei cilindrice, folosind criteriile (4.3.1) și (4.3.2).

Amintim că tensorul tensiune are aici forma

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \sigma_{31} \\ 0 & 0 & \sigma_{32} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Invariantii acestui tensor (vezi (2.5.19)) au forma

$$\Sigma_1 = \sigma_{33}, \quad \Sigma_2 = -\sigma_{31}^2 - \sigma_{32}^2 = -|T|^2, \quad \Sigma_3 = 0; \quad (8)$$

ecuația cubică (2.5.20) devine

$$\sigma^3 - \sigma_{33} \sigma^2 - |T|^2 \sigma = 0, \quad (9)$$

și are rădăcinile

$$\sigma_1 = \frac{1}{2} [\sigma_{33} + \sqrt{\sigma_{33}^2 + 4|T|^2}], \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = \frac{1}{2} [\sigma_{33} - \sqrt{\sigma_{33}^2 + 4|T|^2}]. \quad (10)$$

Oricare ar fi semnul componentei σ_{33} , avem evident $\sigma_1 \geq 0 \geq \sigma_3$. În cazul întinderii și încovoierii pure, (10) se reduce la

$$\sigma_1 = \sigma_{33}, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = 0. \quad (11)$$

În cazul torsiunii pure, găsim

$$\sigma_1 = |T|, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = -|T|. \quad (12)$$

Stările de întindere și de încovoiere pură pot fi deci privite ca stări de întindere în fiecare punct, axele $Ox_1x_2x_3$ fiind axele principale; starea de torsiune este o stare de alunecare pură (compară cu (3.4.8) și (3.4.11)).

Conform criteriului tensiunilor tangențiale maximele⁶⁾, limita de rezistență a materialului este dată de (4.3.1):

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sqrt{\sigma_{33}^2 + 4|T|^2} \leq \sigma_s,$$

⁶⁾ Aci este vorba de tensiunea tangențială T pe un element de suprafață din planul bisector a două din planele principale ce trec prin punctul considerat — ceea ce nu trebuie desigur confundat cu tensiunea tangențială (complexă) T pe un element de suprafață din planul secțiunii normale a barei.

de unde deducem

$$\sigma_{33}^2 + 4|T|^2 \leq \sigma_s^2. \quad (13)$$

Folosind criteriul (4.3.2) al energiei de distorsiune maximale, obținem condiția

$$\sigma_1^2 + \sigma_3^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 \leq \sigma_s^2,$$

de unde urmează

$$\sigma_{33}^2 + 3|T|^2 \leq \sigma_s^2. \quad (14)$$

Rezultatele diferă prin ponderea deosebită a termenului corespunzător tensiunii tangențiale. Dar ambele arată că corpul este cu atât mai periclitat într-un punct dat, cu cât acest punct este mai departe de planul neutru, și cu cât în acel punct modulul tensiunii tangențiale complexe este mai mare.

Din (13) și (14) urmează în particular că, cu cât bara e mai lungă, cu atât rolul componentei σ_{33} e mai important în încovoierea în consolă (vezi (8.3)). Desigur, secțiunea cea mai periclitată e în acest caz $x_3 = 0$.

Pentru determinarea extremelor funcțiilor din (13), (14), trebuie să folosim formulele (A.4.15)–(A.4.20). (Valorile pe frontieră necesită un examen separat.)

În cazul întinderii sau încovoierii pure, chestiunea se reduce la determinarea punctelor celor mai depărtate de planul neutru; în cazul torsiunii pure, la găsirea punctelor de maxim ale funcției $|T|^2$.

Pentru a determina direcțiile principale într-un punct oarecare, avem de rezolvat sistemul în tensiuni analog cu (1.7.5) care, ținând seama de (7), se scrie acum:

$$-\sigma_1 n_{11} + \sigma_{13} n_{13} = 0, \quad -\sigma_1 n_{12} + \sigma_{23} n_{13} = 0, \quad (15)$$

$$\sigma_{13} n_{11} + \sigma_{23} n_{12} + (\sigma_{33} - \sigma_1) n_{13} = 0.$$

A treia ecuație (15) poate fi înlocuită cu condiția de normare

$$n_{11}^2 + n_{12}^2 + n_{13}^2 = 1. \quad (16)$$

Introducând primele două ecuații (15) în (16), deducem mai întâi

$$n_{13}^2 = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2 + |T|^2} = 1 - 2 \frac{|T|^2}{\sigma_{33}^2 + \sigma_{33} \sqrt{\sigma_{33}^2 + 4|T|^2} + 4|T|^2}, \quad (17)$$

și mai departe, reținând de aci soluția $n_{13} > 0$, ținând seama că $\sigma_1 \geq 0$, și revenind la primele două ecuații (15):

$$n_{11} = \sigma_{31} / \sqrt{\sigma_1^2 + |T|^2}, \quad n_{12} = \sigma_{32} / \sqrt{\sigma_1^2 + |T|^2}, \quad n_{13} = \sigma_1 / \sqrt{\sigma_1^2 + |T|^2}, \quad (18)$$

iar în cazul particular al torsiunii (vezi (12)):

$$n_{11} = \sigma_{31} / \sqrt{2}|T|, \quad n_{12} = \sigma_{32} / \sqrt{2}|T|, \quad n_{13} = 1 / \sqrt{2}. \quad (19)$$

Cosinușii directori definiți în (18) sînt funcții și de x_3 , în timp ce aceia din (19) depind numai de x_1, x_2 . În particular, din a treia relație (19) avem

$$\arccos n_{13} = \widehat{(x'_1, x_3)} = \pm \pi/4, \quad (20)$$

astfel că, la torsiune, elementele de suprafață pe care acționează tensiunea normală maximă σ_1 au normala înclinată sub un unghi de 45° față de axa cilindrului. Din (17) urmează că în cazul încovoierii în consolă, pentru $\sigma_{33} > 0$ avem $n_{13}^2 \geq 1/2$, astfel că unghiul corespunzător este mai mic decît 45° . Pentru l mare și x_3 mic, n_{13} este apropiat de 1, și elementul pe care acționează tensiunea normală maximă formează un unghi foarte mic cu secțiunea normală $x_3 = \text{const.}$

Aceste rezultate sînt în general confirmate de faptele experimentale. În particular, la barele din materiale casante supuse la torsiune, se constată distrugerea prin separare sub acțiunea sarcinilor normale maxime (vezi și § 4.3, pag. 132) după suprafețe ce formează un unghi de 45° cu secțiunile normale.

§ 11. FUNCȚIA LUI CAPILDEO ȘI MILNE-THOMSON

a) Probleme la limită

După raționamentele din §§ 8–10, problema este redusă la a găsi funcția $\varphi(\zeta)$. În acest scop, dispunem de proprietatea de olomorfie a derivatei sale, de condiția la limită (4.17), de relația (8.10), și de unele informații ce decurg din (8.32).

Amintim că punctul curent pe frontieră se va nota $t = \zeta|_{\mathcal{L}}$. De asemenea, că toate valorile la limită sînt înțelese în sensul din (1.1.6)–(1.1.8), pentru $\zeta \rightarrow t \in \mathcal{L}$, $\zeta \in \mathcal{D}^t$. În genere, nu vom specifica faptul că ne situăm pe frontieră — aceasta va rezulta din notație și din context.

Introducînd (8.10) în (4.17), obținem condiția (valabilă pe toate componentele \mathcal{L}_j ale frontierei \mathcal{L} a lui \mathcal{D}):

$$\begin{aligned} \mu \operatorname{Im} [\varphi'(t) \bar{t}'(s)] = \operatorname{Im} \left\{ \left[\left(i\mu\tau - \frac{1}{2}c \right) + \frac{1}{4(1+\nu)} \alpha t + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1+2\nu}{8(1+\nu)} \alpha \bar{t} \right] \bar{t} t'(s) \right\}. \end{aligned} \quad (1)$$

Din expresia (8.32) a componentei u_3 — care trebuie să fie uniformă — rezultă că au sens numai acele soluții pentru care funcția $p(x_1, x_2) = \operatorname{Re} \varphi(\zeta)$ este uniformă. (Vezi și § 15, exemplul a).

Întrucît avem $\varphi(z) = p + iq$ (vezi (8.9)), iar funcțiile p și q satisfac astfel ecuațiile Cauchy-Riemann (A.5.4), deducem — folosind (A.3.12) — că (1) devine :

$$\mu p_{,s} = \operatorname{Im} \left\{ \left[\left(i\mu\tau - \frac{1}{2}c \right) + \frac{1}{4(1+\nu)} \bar{\alpha}t + \frac{1+2\nu}{8(1+\nu)} \alpha \bar{t} \right] \bar{t} t' (s) \right\}, \quad (2)$$

ceea ce constituie o problemă Neumann pentru funcția armonică $p(x_1, x_2)$.

Întrucît ecuațiile Cauchy-Riemann se pot scrie și sub forma (A.5.8), rezultă că primul membru din (2) este egal cu valoarea pe \mathcal{L} a lui $\mu q_{,s}$; integrînd în raport cu arcul s , obținem pe fiecare curbă \mathcal{L} , în parte :

$$\begin{aligned} \mu q [x_1(s), x_2(s)] \Big|_0^s &= \frac{1}{2} \mu \tau t \bar{t} \Big|_0^s + \frac{1}{4} ic \int_0^s (\bar{t} dt - t d\bar{t}) - \\ &- \frac{1+2\nu}{16(1+\nu)} i \int_0^s (\alpha \bar{t}^2 dt - \bar{\alpha} t^2 d\bar{t}) - \frac{1}{8(1+\nu)} i \int_0^s t \bar{t} (\bar{\alpha} dt - \alpha d\bar{t}) + \mu F_s; \end{aligned} \quad (3)$$

F_s sînt aci niște constante de integrare, *necunoscute, dar nu arbitrare*, și care diferă în general de la o componentă a frontierei la alta. Aceste constante trebuie determinate în fond tot din condiția ca $p(x_1, x_2) = \operatorname{Re} \varphi(z)$ să fie uniformă.

Problema (1) conduce deci la o problemă similară problemei Dirichlet pentru funcția — de asemenea armonică — $q(x_1, x_2)$. Această problemă, numită *problema lui Dirichlet generalizată* (din cauza prezenței constantelor F_s) a fost abordată pe căi diferite de către C. Iacob [1], [3], [4] (vezi și [5], cap. 3); S. Mihlin [1], partea II; N. Mushelişvili [3], capitolul 3. Vezi și S. Bergman [1], R. Reynolds [1].

Cele de mai sus arată că teoria potențialului newtonian în plan permite rezolvarea completă a problemei. Soluția se obține sub forma de potențiali de simplu sau dublu strat, cu densitățile date de (2), respectiv (3). O expunere exhaustivă a metodelor de utilizat (inclusiv legătura cu teoria funcțiilor de o variabilă complexă) este dată de C. Iacob [5], §§ 3.1—3.42. Unele noțiuni și formule utile în acest sens vor fi pe scurt prezentate mai jos, în § 7.2.

Amintim aci că problema lui Dirichlet interioară pentru un domeniu mărginit de o frontieră Liapunov pe porțiuni, și cu date la limită continui, are întotdeauna soluție și una singură. Aceeași afirmație este valabilă pentru problema lui Neumann interioară, dacă datele la limită (posedînd chiar discontinuități de prima speță) satisfac anumite condiții integrale.

Expresiile din membrul al doilea din (2), (3) sînt expresii liniare în $x_1, x_2, x_1^2, x_2^2, x_1 x_2, n_1$ și n_2 (vezi și (A.4.22)). Întrucît prin ipoteză \mathcal{L} este o curbă Liapunov pe porțiuni, rezultă că $n_1, n_2 \in C_\mu^0(\mathcal{L})$, și deci expresiile amintite sînt h lderiene pe porțiuni, avînd cel mult discontinuități de prima speță. Membrul al doilea din (3), obținut prin integrarea unei astfel de funcții, este o funcție h lderiană pe frontieră, chiar dacă aceasta are puncte unghiulare.

Prin urmare, soluția problemei la limită (3) — și tot astfel a problemelor (2) și (1) — *există și este unică* (depinzând încă de τ ca parametru).

După cum rezultă din (1)–(3), (8.10) și (8.32), funcțiile $\varphi(\zeta)$ și $p(x_1, x_2)$ sînt potențiali de deplasare, în timp ce $q(x_1, x_2)$ este numai un potențial de tensiune. Vom reține numai astfel de potențiali, pentru care componentele deplasării și tensiunii sînt continue în $\mathcal{D} + \mathcal{L}$ (vezi finele § 4.10). Vom numi deci *soluții regulate* — acele soluții pentru care avem $\varphi(\zeta), \varphi'(\zeta) \in C^0(\mathcal{D} + \mathcal{L})$, respectiv $p(x_1, x_2), q(x_1, x_2) \in C^1(\mathcal{D} + \mathcal{L})$.

În ce privește proprietățile lor în \mathcal{D} , acestea sînt dictate de faptul că $\varphi(\zeta)$ este analitică — astfel că p, q sînt funcții armonice, deci analitice în \mathcal{D} .

Pentru indicații mai amănunțite asupra comportării potențialilor newtonieni și a derivatelor lor în vecinătatea frontierei, vezi de exemplu V. Smirnov [2], volumul 4, pct. 208.

Cele de mai sus sînt valabile și în vecinătatea unor puncte unghiulare. În astfel de puncte, se poate întîmpla însă ca soluția să nu fie acceptabilă din considerente mecanice (de ex., datorită apariției unor tensiuni infinite). Însăși teorema de existență a soluției (subînțeles: mărginite, și de clasă C^2) a ecuațiilor elasticității este acum în defect, arătînd că ecuațiile încetează să mai descrie corect fenomenul mecanic. Pentru exemple simple, vezi mai departe § 18, exemplu **b** și **d**. Vezi de asemenea rezultatele lui Chien Wei Zang et al. [1] (reproduse de N. Arutiunian și B. Abramian [1], § 1.7).

În ultimii ani, apare evident de preferat reprezentarea complexă a soluției și în legătură cu aceasta, abordarea directă a problemei (1) — așa cum vom proceda în cea mai mare parte a capitolului. Există însă cazuri în care reprezentarea soluției prin potențiali newtonieni poate fi utilă. Mai mult, există cazuri în care soluția se scrie efectiv *fără* utilizarea acestora; astfel de cazuri vor fi examinate în §§ 15 și 20.

b) Gradul de arbitrar

Dacă funcția $\varphi(\zeta)$ este cunoscută, sînt cunoscute și tensiunea T și deplasarea U, u_3 . (Deplasarea U depinde de $\varphi(\zeta)$ numai prin intermediul lui τ ; tensiunea σ_{33} este independentă de $\varphi(\zeta)$.)

Pentru a stabili gradul de determinare al funcției $\varphi(\zeta)$, așadar faptul dacă — invers — pentru o stare elastică dată, funcția $\varphi(\zeta)$ este și ea determinată, este suficient să găsim funcția $\varphi^0(\zeta)$ corespunzătoare stărilor nule: adăugînd-o unei funcții $\varphi(\zeta)$ deja găsite, starea elastică nu se schimbă.

Dacă $T \equiv 0$, din (8.4) urmează $\alpha = 0$; din (8.15) și (8.16) decurge $\tau = 0$. În fine, din (8.10) conchidem că $d\varphi^0(\zeta)/d\zeta \equiv 0$, astfel că avem cu necesitate $\varphi^0(\zeta) \equiv \gamma$ (constantă complexă).

Prin urmare, $\varphi(\zeta)$ trebuie determinată numai abstracție făcînd de o constantă complexă; valoarea ei într-un punct oarecare, de exemplu $\varphi(0)$, rămîne arbitrară.

Din (8.32) rezultă că $\operatorname{Re} \gamma$ corespunde unei translații rigide a barei în ansamblu; $\operatorname{Im} \gamma$ nu are semnificație mecanică.

În particular, de aci urmează că se poate atribui o valoare arbitrară uneia din constantele F_j din (3). Pe viitor vom alege întotdeauna $F_0 = 0$.

c) Natura funcției $\varphi(z)$

Să presupunem că domeniul \mathcal{D} este multiplu conex. Să notăm cu \mathcal{C} o curbă simplă închisă din \mathcal{D} ; cu \mathcal{A}^+ domeniul mărginit de \mathcal{C} , și cu z_{0c} centrul său de greutate. (Dacă $\mathcal{C} = \mathcal{L}_j$, avem $\mathcal{A}^+ = \mathcal{D}_j^+$, și $z_{0c} = z_{0j}$). Variația unei funcții F după parcurgerea în sens direct a curbei \mathcal{C} se notează $[F]_{\mathcal{C}}$ (dacă $\mathcal{C} = \mathcal{L}_j$, notăm $[F]_j$), în ipoteza că această variație nu depinde de punctul din care pornim pentru a parcurge \mathcal{C} .

Din (3) avem imediat

$$\begin{aligned} \mu [q]_j = & \frac{1}{4} i c \oint_{\mathcal{L}_j} (\bar{t} dt - t d\bar{t}) - \frac{1 + 2\nu}{16(1 + \nu)} i \oint_{\mathcal{L}_j} (\alpha \bar{t}^2 dt - \bar{\alpha} t^2 d\bar{t}) - \\ & - \frac{1}{8(1 + \nu)} i \oint_{\mathcal{L}_j} t \bar{t} (\bar{\alpha} dt - \alpha d\bar{t}), \end{aligned} \quad (4)$$

de unde, făcînd uz de formula lui Stokes (A.4.29):

$$[q(s)]_j = (D_j/2\mu) [\bar{\alpha}(z_{0j} - z_0) + \alpha(\bar{z}_{0j} - \bar{z}_0)]. \quad (5)$$

Pe de altă parte, din (8.32) conchidem (întrucît u_3 este uniformă):

$$[p(s)]_j = 0 \quad (6)$$

astfel că perioadele funcției $\varphi(z)$ rezultă a fi pur imaginare.

Întrucît $\varphi(z)$ este primitiva funcției olomorfe $\Phi(z)$ (vezi (8.9)), din (A.5.60) urmează că ea are forma

$$\varphi(z) = \sum_{j=1}^m \gamma_j \ln(z - z_j) + \varphi_0(z), \quad (7)$$

unde $\varphi_0(z)$ este olomorfă în \mathcal{D} , iar $z_j \in \mathcal{D}_j^+$.

Or, din (7) avem evident

$$[\varphi(z)]_j = 2\pi i \gamma_j, \quad (8)$$

astfel că din (5) și (6) rezultă că γ_j sînt reale și au valoarea

$$\gamma_j = (D_j/4\pi\mu) [\bar{\alpha}(z_{0j} - z_0) + \alpha(\bar{z}_{0j} - \bar{z}_0)], \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (9)$$

Coeficienții termenilor multiformi din (7) sînt deci determinați în funcție de datele geometrice, de rezultanta R , și de constanta μ . După cum urmează din (7), funcția $\varphi(z)$ este uniformă dacă și numai dacă:

- 1° rezultanta R este nulă;
- 2° domeniul \mathcal{D} este simplu conex;
- 3° domeniul \mathcal{D} este dublu conex, iar mărimea $\bar{\alpha}(\mathfrak{z}_{01} - \mathfrak{z}_0)$ este pur imaginară, sau în particular nulă (centrul de greutate \mathfrak{z}_0 coincide cu centrul de greutate \mathfrak{z}_{01} al orificiului interior).

În fiecare din aceste cazuri, condițiile la limită considerate servesc la determinarea unei funcții *olomorfe* în \mathcal{D} .

Întrucît avem $\mathfrak{z}_i \in \mathcal{D}_i^+$, funcțiile $\ln(\mathfrak{z} - \mathfrak{z}_i)$ sînt continui pe \mathcal{L} . Prin urmare, dacă $\gamma_i \neq 0$, putem introduce (7) în condiția la limită, și trece în membrul al doilea termenii logaritmici — obținînd astfel o condiție la limită de același tip, dar pentru funcția *olomorfă* $\varphi_0(\mathfrak{z})$.

În ce privește funcția $\Phi(\mathfrak{z}) = \varphi'(\mathfrak{z})$, ea este totdeauna *olomorfă*.

Cazul $R = 0$ prezintă importanță deosebită. Întrucît avem acum $\alpha = c = 0$, componenta σ_{33} este nulă, și tensiunile se reduc la tensiunea tangențială τ . Din (9.1), (9.3), (9.4) urmează că alunecările și încovoierile sînt nule, și bara este în stare de *torsiune pură*. Vom nota în acest caz (compară cu (8.9)):

$$\varphi(\mathfrak{z}) = \tau \psi(\mathfrak{z}), \quad \psi(\mathfrak{z}) = r(x_1, x_2) + i t(x_1, x_2). \quad (10)$$

Întrucît avem $R = 0$, funcția $\psi(\mathfrak{z})$ este totdeauna *olomorfă*.

d) Schimbări de axe

Funcția $\varphi(\mathfrak{z})$ odată determinată, poate fi utilă transcrierea ei în alte axe — în particular cele ce se obțin din cele dintîi printr-o translație sau o rotație.

Vom nota cu indicele „1” superior toate mărimile relative la noile axe. Astfel, în cazul translației vom avea

$$\mathfrak{z} = \mathfrak{z}^1 + \mathfrak{z}^0 \quad (11)$$

(\mathfrak{z}^0 este afixul noii origini în axele vechi), iar pentru o rotație de un unghi ϑ :

$$\mathfrak{z} = [\exp(i\vartheta)] \mathfrak{z}^1. \quad (12)$$

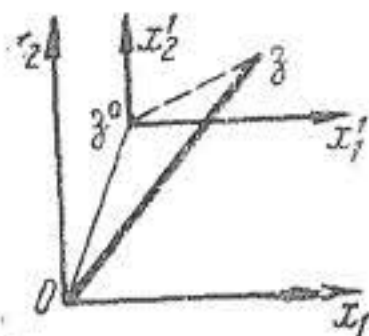


Fig. 5.11.1

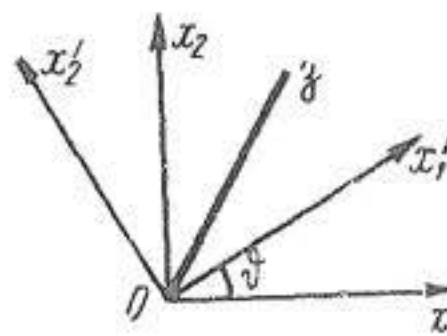


Fig. 5.11.2

În particular, o funcție F se numește *invariantă* la o schimbare de coordonate dacă, notînd cu F^1 sau F_1 expresia ei în noile axe, avem

$$F^1(\delta^1, \bar{\delta}^1) \equiv F(\delta, \bar{\delta}), \quad (13)$$

astfel că pentru a obține expresia ei în noile axe, este suficient să efectuăm schimbarea de coordonate direct în formula deja cunoscută în axele vechi.

În cazul rotației, pentru o cantitate complexă $V = V_1 + iV_2$ (unde V_1, V_2 sînt componentele unui vector: deplasare, tensiune etc.) avem evident

$$V = [\exp(i\vartheta)]V^1. \quad (14)$$

Aceasta este valabil în particular pentru $T = \sigma_{31} + i\sigma_{32}$ (rezultat care se poate obține și direct, ținînd seama de formulele de transformare (2.5.5), de ipoteza (3.9) și de faptul că $n_{31} = n_{32} = 0$.)

Așadar, avem

$$T = [\exp(i\vartheta)]T^1. \quad (15)$$

Pentru momentele de inerție, deducem din (A.7.27) și (4.13):

$$I_0 = I_0^1, \quad I = [\exp(2i\vartheta)]I^1, \quad \delta = \delta^1. \quad (16)$$

Întrucît (14) este valabilă pentru R , din (4.12) decurge

$$\alpha = [\exp(i\vartheta)]\alpha^1. \quad (17)$$

Prin urmare, scriind relația (8.10) în ambele sisteme de coordonate și ținînd seama de (15), obținem

$$\begin{aligned} \left(i\mu\tau + \frac{1}{2}c\right)\delta - \frac{1+2\nu}{8(1+\nu)}\bar{\alpha}\delta^2 - \frac{1}{4(1+\nu)}\alpha\bar{\delta}\bar{\delta} + \mu\overline{\Phi(\delta)} = \\ = [\exp(i\vartheta)]\left[\left(i\mu\tau^1 + \frac{1}{2}c^1\right)\delta^1 - \frac{1+2\nu}{8(1+\nu)}\bar{\alpha}^1(\delta^1)^2 - \right. \\ \left. - \frac{1}{4(1+\nu)}\alpha^1\delta^1\bar{\delta}^1 + \mu\overline{\Phi^1(\delta^1)}\right]. \end{aligned} \quad (18)$$

Or, din relația de definiție (4.8) deducem ușor

$$c = c^1. \quad (19)$$

Tot astfel, întrucît $\omega_{12,3}^m$ este evident un invariant, din (9.4) urmează

$$\tau = \tau^1. \quad (20)$$

În felul acesta, relația (18) conduce la

$$\Phi(\delta) = [\exp(-i\vartheta)]\Phi^1(\delta^1), \quad (21)$$

de unde

$$\varphi(\bar{z}) = \varphi^1(\bar{z}^1), \quad (22)$$

ceea ce se vede ușor dacă derivăm (22) și ținem seama de (12). Prin urmare, funcția lui Capildeo și Milne-Thomson este *invariantă* de orice rotație.

Trecând acum la cazul translației (11), avem evident

$$R = R^1, \quad \alpha = \alpha^1, \quad T(\bar{z}, \bar{z}) = T^1(\bar{z}^1, \bar{z}^1). \quad (23)$$

Din (4.8) și (11) obținem

$$c = c^1 + \frac{1}{2}(\alpha \bar{z}^0 + \bar{\alpha} z^0), \quad (24)$$

iar din (9.4) urmează

$$\tau = \tau^1 - (i\nu/2E)(\bar{\alpha} z^0 - \alpha \bar{z}^0). \quad (25)$$

Ținând seama de (11), (24) și (25) în cea de-a treia relație (23), obținem, după calcule elementare,

$$\mu \overline{\Phi^1(\bar{z}^1)} = \left(i\mu\tau + \frac{1}{2}c\right) \bar{z}^0 - \frac{1+2\nu}{8(1+\nu)} \bar{\alpha} (z^0)^2 - \frac{1}{4(1+\nu)} \alpha \bar{z}^0 \bar{z} + \mu \overline{\Phi(\bar{z})}, \quad (26)$$

de unde urmează

$$\begin{aligned} \mu \varphi(\bar{z}) = & \left(i\mu\tau - \frac{1}{2}c\right) \bar{z}^0 \bar{z} + \frac{1+2\nu}{8(1+\nu)} \alpha (\bar{z}^0)^2 \bar{z} + \\ & + \frac{1}{8(1+\nu)} \bar{\alpha} \bar{z}^0 \bar{z}^2 + \mu \varphi^1(\bar{z}^1). \end{aligned} \quad (27)$$

În cazul particular al torsiunii pure, ținând seama de notația (10) și de faptul că $\alpha = c = 0$, formula (27) se reduce la

$$\psi(\bar{z}) = \psi^1(\bar{z}^1) + i \bar{z}^0 \bar{z}, \quad (28)$$

de unde, separînd partea reală și cea imaginară :

$$r = r^1 + \frac{1}{2} i(\bar{z}^0 \bar{z} - z^0 \bar{z}), \quad t = t^1 + \frac{1}{2} (\bar{z}^0 \bar{z} + z^0 \bar{z}). \quad (29)$$

Totuși, în cazul torsiunii se poate construi o funcție invariantă în raport cu o translație oarecare. Anume, luînd

$$f = t - \frac{1}{2} \bar{z} \bar{z}, \quad (30)$$

deducem ușor din (29) că

$$f = f^1. \quad (31)$$

§ 12. FUNCȚIA LUI PRANDTL ȘI TIMOSHENKO, TEOREMA LUI BREDT ȘI LEIBENZON

Lucrările lui Capildeo și Milne-Thomson au fost precedate de cercetări care au introdus alte funcții cu rol de potențial; acestea păstrează în continuare o mare importanță practică, dar acum e mai comod să le obținem pornind de la funcția $\varphi(z)$.

a) Funcția lui Prandtl și Timoshenko

Ne propunem să determinăm o funcție *reală*, cu rol de potențial al deplasărilor, sau cel puțin al tensiunilor. În acest scop, să căutăm o funcție reală (*sau* pur imaginară) F^* , așa fel ca

$$T(z, \bar{z}) = F_{,1}^* + iF_{,2}^* + T_F^*, \quad (1)$$

unde este de dorit ca termenul de corecție T_F^* să fie cât mai simplu.

Ținând seama de (A.4.5), avem desigur

$$T = 2F_{,z}^* + T_F^*, \quad (2)$$

sau încă, integrând în raport cu \bar{z} și ținând seama de (8.10):

$$2F^* + \int T_F^* d\bar{z} = \left(i\mu\tau + \frac{1}{2}c \right) z\bar{z} - \frac{1+2\nu}{8(1+\nu)} \bar{\alpha} z^2 \bar{z} - \frac{1}{8(1+\nu)} \alpha \bar{z}^2 z + \mu \overline{\varphi(z)} + T_1^*(z), \quad (3)$$

unde $T_1^*(z)$ este o funcție arbitrară.

Întrucât intenționăm ca în funcția căutată să intervină termenul $i\mu\tau z\bar{z}$ (care *nu* dispăre în cazul torsiunii), vom lua $F^* = -iF$, unde F este o funcție reală. Alegând $T_1^* = -\mu\overline{\varphi(z)}$, transcriem (3) sub forma

$$\begin{aligned} -2iF + \int T_F d\bar{z} &= \left(i\mu\tau + \frac{1}{2}c \right) z\bar{z} + \mu [\overline{\varphi(z)} - \varphi(z)] - \\ &\quad - \frac{1+2\nu}{8(1+\nu)} (\bar{\alpha}z - \alpha\bar{z}) z\bar{z} - \frac{1}{4} \alpha \bar{z}^2 z, \end{aligned} \quad (4)$$

de unde urmează

$$F = \mu \left(q - \frac{1}{2} \tau z\bar{z} \right) - \frac{1+2\nu}{16(1+\nu)} i (\bar{\alpha}z - \alpha\bar{z}) z\bar{z}, \quad T_F = \frac{1}{2} c z - \frac{1}{2} \alpha \bar{z}. \quad (5)$$

Acum, (2) ia forma definitivă

$$T(z, \bar{z}) = -2iF_{,z} + T_F = F_{,z} - iF_{,1} + T_F. \quad (6)$$

Funcția reală $F(x_1, x_2)$ astfel introdusă a fost considerată de L. Prandtl [1], [2] în cazul torsiunii pure, și de S. Timoshenko [1] (vezi S. Timoshenko și J. Goodier [1], § 12.106) în cazul încovoierii în consolă. Pe viitor o vom numi *funcția lui Prandtl și Timoshenko*.

OBSERVAȚIE. Spre deosebire de funcția lui Capildeo și Milne-Thomson, funcția lui Prandtl și Timoshenko este *numai* un potențial de tensiune. Totuși, ea e cu succes utilizabilă în probleme în care reprezentarea conformă (larg utilizată pentru a găsi funcția $\varphi(\zeta)$) nu aduce simplificări esențiale, și în chestiuni legate de metodele experimentale. (Vezi mai departe § 16, c, și § 20, c.)

Derivînd în raport cu ζ și $\bar{\zeta}$ în ambii membri ai primei egalități (5), obținem pentru F ecuația lui Poisson

$$\Delta F = -2\mu\tau - \frac{1+2\nu}{2(1+\nu)} i (\bar{\alpha}\zeta - \alpha\bar{\zeta}). \quad (7)$$

Pentru a găsi condiția la limită careia îi satisface funcția F , vom remarca că din (5) și (11.3) avem

$$\begin{aligned} F \Big|_{\mathcal{L}_j} = & \frac{1}{4} ic \int_0^s (\bar{t} dt - t d\bar{t}) - \frac{1+2\nu}{16(1+\nu)} i \int_0^s (\alpha \bar{t}^2 dt - \bar{\alpha} t^2 dt) - \\ & - \frac{1}{8(1+\nu)} i \int_0^s t \bar{t} (\bar{\alpha} dt - \alpha d\bar{t}) + \mu F_j - \frac{1+2\nu}{16(1+\nu)} i t \bar{t} (\bar{\alpha} t - \alpha \bar{t}) \Big|_0^s. \end{aligned} \quad (8)$$

Derivînd în raport cu s a doua și a treia integrală, și ultima expresie din (8), unii termeni se reduc, și, integrînd din nou, căpătăm

$$F \Big|_{\mathcal{L}_j} = \frac{1}{4} ic \int_0^s (\bar{t} dt - t d\bar{t}) - \frac{1}{4} i \int_0^s t \bar{t} (\bar{\alpha} dt - \alpha d\bar{t}) + \mu F_j. \quad (9)$$

Desigur, funcția F definită în (7), (9) nu este uniformă. Perioadele ei se deduc cu ușurință din (9), sau ținînd seama de (5) și (11.5):

$$[F(s)]_j = \frac{1}{2} D_j \{ \bar{\alpha}(\zeta_{0j} - \zeta_0) + \alpha(\bar{\zeta}_{0j} - \bar{\zeta}_0) \}. \quad (10)$$

Perioada sa pe \mathcal{L}_0 este egală cu suma perioadelor pe componentele interioare \mathcal{L}_j (parcuse în sens direct). Într-adevăr, avem

$$\begin{aligned} D_0 &= D + \sum_{j=1}^m D_j, \\ D\zeta_0 &= \iint_{\mathcal{D}} \zeta dD = \iint_{\mathcal{D}_0 - \bigcup_{j=1}^m \mathcal{D}_j^+} \zeta dD = D_0 \zeta_{00} - \sum_{j=1}^m D_j \zeta_{0j}, \end{aligned} \quad (11)$$

astfel că din (10) obținem

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m [F(s)]_j &= \operatorname{Re} \left\{ \alpha \sum_{j=1}^m D_j \bar{\delta}_{0j} - \alpha \bar{\delta}_0 \sum_{j=1}^m D_j \right\} = \\ &= \operatorname{Re} \{ \alpha (D_0 \bar{\delta}_{00} - D \bar{\delta}_0) - \alpha (D_0 - D) \bar{\delta}_0 \} = \operatorname{Re} \{ \alpha D_0 (\bar{\delta}_{00} - \bar{\delta}_0) \} = [F(s)]_0. \end{aligned} \quad (12)$$

Uneori poate prezenta interes căutarea lui F sub forma $F_0(x_1, x_2) + F_1(x_2) + F_2(x_1)$, unde F_1, F_2 sînt funcții arbitrare care, potrivit alese, permit simplificarea fie a ecuației, fie a condiției la limită.

În acest caz, ecuația (7) devine

$$\Delta F_0 = -2\mu\tau - \frac{1+2\nu}{2(1+\nu)} i(\bar{\alpha}\delta - \alpha\bar{\delta}) - F_1''(x_2) - F_2''(x_1), \quad (13)$$

iar condiția la limită (9) trebuie de asemenea modificată, prin scăderea în membrul al doilea a valorilor $F_1(x_2)|_{\mathcal{L}} + F_2(x_1)|_{\mathcal{L}}$.

b) Teorema lui Bredt și Leibenzon

Ne rămîne să examinăm chestiunea determinării — în principiu — a constantelor F_j . Problema a fost rezolvată de R. Bredt [1] pentru cazul torsiunii (cu ajutorul funcției conjugate a lui Saint-Venant — vezi § 13), și de către L. Leibenzon (vezi [1], § 112) pentru cazul încovoierii consolei (cu ajutorul funcției lui Timoshenko).

Din (11.3) și (9) rezultă limpede că constantele F_j nu pot interveni în derivata tangențială a lui F pe \mathcal{L} . Aceasta sugerează în schimb să le căutăm cu ajutorul derivatei normale a acestei funcții, întrucît valorile lor sînt vizibil legate de variația lui F de la o componentă la alta a frontierei.

Formulele (A.3.12) dau

$$F_{,n} = F_{,1} x_2'(s) - F_{,2} x_1'(s) = -\operatorname{Re} [(F_{,2} - iF_{,1}) \bar{\delta}'(s)], \quad (14)$$

astfel că, punînd (6) sub forma

$$F_{,2} - iF_{,1} = T - T_F, \quad (15)$$

căpătăm pentru o curbă oarecare \mathcal{C} din \mathcal{D} :

$$\oint_{\mathcal{C}} F_{,n} ds = -\frac{1}{2} \oint_{\mathcal{C}} (\bar{T} - \bar{T}_F) d\delta + (T - T_F) d\bar{\delta}. \quad (16)$$

Din (14) și (15) urmează că derivata normală $F_{,n}$ este uniformă. Ținînd seama de expresiile (8.10) și (5) pentru T și T_F , obținem

$$T - T_F = i\mu\tau\delta - \frac{1+2\nu}{8(1+\nu)} \bar{\alpha}\delta^2 + \frac{1+2\nu}{4(1+\nu)} \alpha\bar{\delta} + \mu\overline{\varphi'(\delta)}, \quad (17)$$

astfel că integrala din (16) devine

$$\oint_{\mathcal{S}} F_{,n} ds = \frac{1}{2} i\mu\tau \oint_{\mathcal{S}} (\bar{z} dz - z d\bar{z}) + \frac{1+2\nu}{16(1+\nu)} \oint_{\mathcal{S}} (\alpha \bar{z}^2 dz + \bar{\alpha} z^2 d\bar{z}) - \\ - \frac{1+2\nu}{8(1+\nu)} \oint_{\mathcal{S}} z \bar{z} (\bar{\alpha} dz + \alpha d\bar{z}) - \frac{1}{2} \mu \oint_{\mathcal{S}} (\varphi'(z) dz + \overline{\varphi'(z)} d\bar{z}). \quad (18)$$

Ultima din aceste integrale este nulă, deoarece integrandul ei este $2 \operatorname{Re} d\varphi(z)$, iar funcția $\operatorname{Re} \varphi(z)$ este uniformă. Integralele rămase în (18) au o semnificație pur geometrică, putând fi calculate chiar pentru curbe ce nu sînt cuprinse în \mathcal{D} . Formula lui Stokes (A.4.29) conduce la valoarea

$$\oint_{\mathcal{S}} F_{,n} ds = - \left[2\mu\tau + \frac{1+2\nu}{2(1+\nu)} i (\bar{\alpha}_{\partial\mathcal{D}} - \alpha_{\partial\mathcal{D}}) \right] A, \quad (19)$$

unde A este aria domeniului \mathcal{A}^+ mărginit de \mathcal{S} . Membrul al doilea din (19) este cunoscut, abstracție făcînd de τ , care joacă rol de parametru.

Relația (19) exprimă *teorema de tip Bredt și Leibenzon* (pentru domenii și axe oarecare). Ea poate sluji — în principiu — la determinarea constantelor F_j . Într-adevăr, întrucît F este soluția ecuației (7) cu condiția la limită (9), ea are forma (vezi de ex. V. Smirnov [2], volumul 2, pct. 198 și 201; vezi și mai jos (7.2.37)) :

$$F(x_1, x_2) = - \iint_{\mathcal{D}} G \Delta F dD - \oint_{\mathcal{S}} F|_{\mathcal{S}} G_{,n} ds, \quad (20)$$

unde G este funcția lui Green a lui \mathcal{D} . Prin urmare, F depinde liniar de constantele F_j . Scriind relația (19) pe cele m componente interioare ale frontierei, obținem un sistem de m ecuații algebrice liniare pentru cele m constante F_j . Formula (20) dă acum soluția problemei în funcție de parametrul τ , care trebuie determinat din (8.14) sau din altă relație echivalentă, conținînd $F(x_1, x_2)$ în loc de $\varphi(z)$.

Dacă funcția lui Prandtl și Timoshenko se caută sub forma $F_0(x_1, x_2) + F_1(x_2) + F_2(x_1)$, atunci avem (vezi (14) și (A.3.19)) :

$$\oint_{\mathcal{S}} F_{1,n} ds = - \oint_{\mathcal{S}} F'_1(x_2) dx_1 = \iint_{\mathcal{A}^+} F''_1(x_2) dD, \quad (21) \\ \oint_{\mathcal{S}} F_{2,n} ds = \oint_{\mathcal{S}} F'_2(x_1) dx_2 = \iint_{\mathcal{A}^+} F''_2(x_1) dD,$$

expresii care trebuie introduse, cu semnul minus, în membrul al doilea din (19).

Integrala $\oint_{\mathcal{S}} \bar{T} dz + T d\bar{z}$ din (16) are o semnificație mecanică simplă. Anume, să considerăm componenta tangențială $T(s)$ a tensiunii

$$T(s) = \sigma_3 \cdot s = \sigma_{31} \cos(s, x_1) + \sigma_{32} \cos(s, x_2). \quad (22)$$

Acesta este un scalar real, care nu trebuie confundat cu tensiunea tangențială complexă, de care este legat prin relația

$$T(s) = \operatorname{Re} [\overline{T_3'(s)}]. \quad (23)$$

Pentru integrala

$$\oint_{\mathcal{C}} T(s) ds = \frac{1}{2} \oint_{\mathcal{C}} \bar{T} d\bar{z} + T dz, \quad (24)$$

numită *circulația tensiunilor tangențiale pe curba \mathcal{C}* , se obține ușor valoarea

$$\oint_{\mathcal{C}} T(s) ds = \left[2\mu\tau + \frac{\nu}{2(1+\nu)} i (\bar{\alpha}_{30c} - \alpha_{30c}) \right] A. \quad (25)$$

§ 13. PROBLEMA TORSIUNII PURE. FUNCȚIILE LUI SAINT-VENANT

a) Funcții de torsiune

În §§ 13—18 vom studia cazul particular menționat în § 9, pag. 205, când singura componentă ne-nulă a torsiunii sarcinii este \mathcal{M}_3 . După cum am văzut în § 11, pag. 218, singurele componente ne-nule ale tensiunii sînt acum cele tangențiale, independente de x_3 . Toate secțiunile sînt supuse numai la torsiune, care, după cum urmează din (9.4), este caracterizată de *gradul de torsiune* (torsiunea pe unitatea de lungime a generatoarei)⁶⁾:

$$-\omega_{12,3}^m = \tau. \quad (1)$$

Intrucît τ măsoară unghiul de rotire al secțiunilor una față de alta în jurul unei axe paralele cu Ox_3 , dimensiunea sa este L^{-1} . Gradul de torsiune se măsoară în rad/cm, sau grade/cm.

În practică, se admit (în funcție de material) valori mergînd pînă la $0,2^\circ - 2^\circ/\text{metru}$.

Din (11.2) se vede că, dacă $\tau = 0$, am avea $p(x_1, x_2) = \text{const.}$ și deci și $q(x_1, x_2) = \text{const.}$ Din (8.10) ar urma $T \equiv 0$, și deplasarea s-ar reduce la o roto-translație rigidă. Prin urmare, vom presupune întotdeauna $\tau \neq 0$, ceea ce justifică notația introdusă în (11.10):

$$\varphi(z) = \tau \psi(z), \quad \psi(z) = r(x_1, x_2) + it(x_1, x_2). \quad (2)$$

⁶⁾ Semnul „minus” din (1) provine din alegerea notațiilor din (1.4.5) și (1.4.10) (vezi și nota de la pag. 41). Pentru $\mathcal{M}_3 > 0$, avem și $\tau > 0$ (vezi mai jos (15) și (23)), ceea ce corespunde unei rotații a secțiunilor în sensul direct. În notațiile din § 1.4, din (1.4.6) urmează $\delta \xi_1 = p_3 \xi_2$, $\delta \xi_2 = -p_3 \xi_1$, astfel că pentru $p_3 = \omega_{12} > 0$, secțiunile s-ar roti în sens retrograd. Rotația în sens direct corespunde deci unor valori $p_3 = \omega_{12}$ negative, ceea ce explică aspectul formulei (1).

Tot astfel, în cazul torsiunii pure vom nota $F_j = \tau f_j$.

Funcția armonică $r(x_1, x_2)$ este *funcția de torsiune a lui Saint-Venant* (notată de obicei în literatură cu φ), iar $t(x_1, x_2)$ este *funcția de torsiune conjugată a lui Saint-Venant* (notată de obicei cu ψ). Preferăm notațiile de aci, care evită confuzia cu cele folosite în problema plană.

Saint-Venant a rezolvat problema torsiunii cu ajutorul funcției $r(x_1, x_2)$, construind ulterior și funcția $\psi(z)$ și rezolvând și unele probleme după o metodă de tip invers. Studiul sistematic al problemei directe cu ajutorul funcției $\psi(z)$, inclusiv utilizarea reprezentării conforme, a fost realizat de către N. Mushelişvili [5], capitolul 7 (vezi și I. Sokolnikoff [2], §§ 4.33—4.51). Indicăm de asemenea R. L'Hermite [1], capitolul 4; L. Milne-Thomson [3], capitolul 4; monografiile lui N. Arutiunian și B. Abramian [1] (cu o excelentă bibliografie)⁷⁾ și C. Weber și W. Günther [1], ambele consacrate exclusiv torsiunii; monografia lui Chien-Wei-Zang et al. [1] — din păcate, în limba chineză... O bogată colecție de exemple este dată de Th. Higgins [2] (soluții exacte), [3] (metode aproximative), [4]—[6] (metode experimentale și analogii). Prezintă încă azi interes memoriul lui A. Dinnik [2] și articolul de sinteză al lui J. Geckeler [1], capitolul 2. Menționăm și punctul de vedere al lui R. Baldacci [1], [2]. Pentru importanța sa istorică, vezi și articolul inițial al lui B. de Saint-Venant [1]. Generalizări la cazul dinamic aparțin lui M. Mișicu [5], [6], cu o bogată bibliografie. Indicații privind alte metode, general valabile pentru problema antiplană, vor fi date la finele § 22.

b) Probleme la limită

Rezolvarea problemei depinde de determinarea unei singure funcții olomorfe $\psi(z)$, pentru care condițiile la limită (11.1)—(11.3) devin :

$$\operatorname{Im} [\psi'(t) \bar{t}'(s)] = \operatorname{Re} [\bar{t} t'(s)] \text{ pe } \mathcal{L}, \quad (3)$$

$$r_n = \operatorname{Re} [\bar{t} t'(s)] \text{ sau } r_n = x_2 n_1 - x_1 n_2 \text{ pe } \mathcal{L}, \quad (4)$$

$$t = \frac{1}{2} t \bar{t} + f_j \text{ pe } \mathcal{L}_j. \quad (5)$$

Evident, (4) este o condiție Neumann, iar (5) — o condiție Dirichlet generalizată. (A nu se confunda t cu \bar{t} !)

Deosebirea între (3)—(5) și cazul general din § 11 stă numai în aspectul foarte simplu al celui de al doilea membru al condițiilor la limită. Prin urmare, rezolvarea efectivă a problemei torsiunii pure poate fi mai simplă, pentru un profil dat, decât cea a încovoierii în consolă. *Dar din punct de vedere principal, deosebire nu există.*

Funcția $\psi(z)$ odată găsită, din (8.10) deducem

$$T(z, \bar{z}) = \mu \tau [\overline{\psi'(z)} + i z], \quad (6)$$

⁷⁾ Vezi și A. Lurie [5].

de unde

$$\sigma_{31} = \mu\tau(r_{,1} - x_2), \quad \sigma_{32} = \mu\tau(r_{,2} + x_1), \quad (7)$$

sau încă, ținând seama de ecuațiile Cauchy-Riemann :

$$\sigma_{31} = \mu\tau(t_{,2} - x_2), \quad \sigma_{32} = -\mu\tau(t_{,1} - x_1). \quad (8)$$

Pentru componentele deplasării, obținem din (8.32)

$$U = i\tau x_3 \bar{z}, \quad u_3 = \tau \operatorname{Re} \psi(z), \quad (9)$$

adică formulele simple

$$u_1 = -\tau x_2 x_3, \quad u_2 = \tau x_1 x_3, \quad u_3 = \tau r(x_1, x_2), \quad (10)$$

asupra cărora vom reveni la punctul *e*.

Determinarea funcțiilor $\psi(z)$, $r(x_1, x_2)$, $t(x_1, x_2)$ rezolvă problema. Uneori, se poate face uz de o metodă de tip invers, dându-ne funcția de torsiune, și determinând \mathcal{D} din condițiile (3)–(5), privite ca definind ecuația frontierei.

Astfel, dacă ne dăm o funcție armonică și uniformă $t(x_1, x_2)$, și dacă curba de ecuație

$$t(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) + \text{const.} \quad (11)$$

este închisă și conținută în domeniul de olomorfie al funcției $\psi = r + it$, atunci domeniul mărginit de ea poate fi privit drept secțiune \mathcal{D} a unei bare torsionate; din (5) rezultă că funcția armonică conjugată $r(x_1, x_2)$ este tocmai funcția de torsiune, gata construită pentru \mathcal{D} .

Luând drept ecuație a frontierei, ecuația

$$-r(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) + \text{const.} \quad (12)$$

atunci funcția de torsiune rezultă a fi $t(x_1, x_2)$.

OBSERVAȚIE. Numai o funcție armonică *uniformă*, a cărei conjugată este de asemenea *uniformă*, poate juca rolul de funcție de torsiune a lui Saint-Venant. Din (4), (5) se vede că funcțiile de torsiune au dimensiunea L^2 . Aceste fapte trebuie ținute în seamă la aplicarea metodei.

După cum am văzut în § 11, problema Neumann are totdeauna o soluție $r(x_1, x_2)$ unic determinată, abstracție făcând de o constantă. Din uniformitatea funcției $t(x_1, x_2)$ urmează că și această funcție este unic determinată, astfel că $\psi(z)$ rezultă unic determinată, abstracție făcând de o constantă complexă, fie ea $\psi(0)$ —care poate fi dată arbitrar (vezi § 11, pag. 216) Partea imaginară a acestei constante se alege de obicei în așa fel încât $f_0 = 0$.

Acest fapt constituie o teoremă de existență și unicitate a soluției problemei torsiunii pure.

Soluția problemei (4) este vizibil funcție numai de configurația lui \mathcal{D} , și nu depinde nici de constantele elastice, nici de sarcină. Urmează că funcțiile $\psi(z)$, $r(x_1, x_2)$, și $t(x_1, x_2)$ depind numai de geometria lui \mathcal{D} — așadar fiecărei secțiuni îi corespund anumite funcții de torsiune, deplin determinate de geometria secțiunii, și independente de sarcină și de material. Acest fapt nu are numai importanță teoretică: el ușurează studiul experimental (pe modele) a acelor tipuri de profile, pentru care o soluție analitică nu este cunoscută.

c) Rigiditatea geometrică la torsiune

Pentru scrierea efectivă a soluției este necesară cunoașterea, pe lângă $\psi(z)$, și a lui τ (vezi (7)–(10)). În cazul torsiunii pure, (8.14) se reduce la

$$\mathcal{M}_3^0 = \mu \tau \left(J_0 - \operatorname{Im} \iint_{\mathcal{D}} z \psi'(z) dD \right) \quad (13)$$

(unde J_0 este momentul polar de inerție în axe oarecare), paranteza fiind de data asta (compară cu (8.14)) independentă de τ . Întrucît pentru $R = 0$ avem $\mathcal{M}_3^0 = \mathcal{M}_3$, și întrucît paranteza din (13) se explicitază sub forma:

$$C = \iint_{\mathcal{D}} (x_1^2 + x_2^2 + x_1 r_{,2} - x_2 r_{,1}) dD, \quad (14)$$

putem scrie (13) sub forma

$$\mathcal{M}_3 = \mu \tau C. \quad (15)$$

Așadar, momentul \mathcal{M}_3 (care caracterizează sub formă globală sarcina) este produsul a trei termeni, care depind separat de forma lui \mathcal{D} , de caracteristica globală a deformației τ , și de material. Este vizibil că, cu cît C e mai mare, cu atît — pentru \mathcal{M}_3 și μ dați — gradul de torsiune τ este mai mic, și deci atît deplasările cît și tensiunile sînt mai mici. În spiritul celor arătate în § 6, pag. 189, mărimea C se numește *rigiditate geometrică la torsiune*, iar produsul μC este *rigiditatea la torsiune*. (În literatură, se întîlnește de obicei notația C pentru ceea ce aci am desemnat prin μC .)

Expresia (14) poate fi încă pusă sub forma echivalentă

$$C = \iint_{\mathcal{D}} (x_1^2 + x_2^2 - x_1 t_{,1} - x_2 t_{,2}) dD. \quad (16)$$

O a treia formă se obține utilizînd (A.3.12), (A.3.19):

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{D}} (x_1 r_{,2} - x_2 r_{,1}) dD &= \iint_{\mathcal{D}} [(x_1 r)_{,2} - (x_2 r)_{,1}] dD = \\ &= \oint_{\mathcal{D}} r (x_1 n_2 - x_2 n_1) ds = - \oint_{\mathcal{D}} r (x_1 dx_1 + x_2 dx_2) = - \frac{1}{2} \oint_{\mathcal{D}} r d(x_1^2 + x_2^2). \end{aligned} \quad (17)$$

Formula (14) devine acum

$$C = J_0 - \frac{1}{2} \oint_{\mathcal{L}} r d(x_1^2 + x_2^2) \quad (18)$$

sau, integrând prin părți și ținând seama că $r(x_1, x_2)$ este uniformă :

$$C = J_0 + \frac{1}{2} \oint_{\mathcal{L}} (x_1^2 + x_2^2) r_{,s} ds, \quad (19)$$

sau încă, ținând seama în (18) de condiția la limită (5) și de faptul că funcțiile r și t sînt armonic conjugate (vezi A.5.8)) :

$$C = J_0 - \oint_{\mathcal{L}} r r_{,n} ds. \quad (20)$$

Rigiditatea geometrică la torsiune este o cantitate strict pozitivă. Într-adevăr, să transcriem (14) sub forma

$$C = \iint_D [(r_{,1} - x_2)^2 + (r_{,2} + x_1)^2] dD - \iint_D [x_1 r_{,2} - x_2 r_{,1} + (r_{,1})^2 + (r_{,2})^2] dD. \quad (21)$$

Ținând seama de prima formulă a lui Green (7.2.10) pentru operatorul lui Laplace în plan

$$\iint_D v \Delta u dD = - \iint_D (\text{grad } u \cdot \text{grad } v) dD + \oint_{\mathcal{L}} v u_{,n} ds,$$

luînd aci $u = v = r(x_1, x_2)$, utilizînd armonicitatea lui r , condiția (4), și relația (17), obținem

$$\iint_D [(r_{,1})^2 + (r_{,2})^2] dD = \oint_{\mathcal{L}} r r_{,n} ds = \iint_D (-x_1 r_{,2} + x_2 r_{,1}) dD, \quad (22)$$

astfel că (21) se reduce la

$$C = \iint_D [(r_{,1} - x_2)^2 + (r_{,2} + x_1)^2] dD > 0. \quad (23)$$

Introducînd încă (22) în (20), putem scrie și

$$C = J_0 - \iint_D [(r_{,1})^2 + (r_{,2})^2] dD. \quad (24)$$

Cel mai simplu mod de a reprezenta pe C prin intermediul funcției $\psi(z)$ provine din (18), de unde căpătăm

$$C = J_0 - \frac{1}{2} \oint_{\mathcal{L}} \text{Re } \psi(t) d(\bar{t}\bar{t}). \quad (25)$$

Pentru secțiuni pentru care nu dispunem de o soluție exactă, este importantă evaluarea aproximativă a rigidității geometrice la torsiune, inclusiv a marginilor (inferioară și superioară) pentru C . Problema e amănunțit studiată de G. Polya și G. Szegő [1] (mai ales în cap. 5, în particular cu ajutorul reprezentării conforme). Vezi de asemenea J. Bartha [1]–[3]; E. Berger [1]; J. Diaz [1]; P. Germain [1], § 8.6; L. Leibenzon [2] („Metode variaționale”, cap. 7); E. Makai [1] (evaluare mai puțin exactă decât cea a lui Polya); L. Milne-Thomson [3], §§ 4.37 și 4.38; G. Polojii [2]; H. Weinberger [1]; A. Weinstein [3].

Toate cele de mai sus sînt valabile și pentru bare de secțiune multiplu-conexă. În acest caz, este necesară și determinarea constantelor f_i — chestiune asupra căreia ne vom opri în § 14. Dacă \mathcal{D} este simplu conex, aceste constante nu mai intervin, și condiția (5) se reduce la o condiție Dirichlet.

d) Cîmpul deplasărilor

Din (10) rezultă că originea axelor în \mathcal{D} nu se deplasează decât în lungul barei; așadar, lucrurile se petrec ca și cum secțiunile s-ar roti în jurul originilor respective. Pe de altă parte însă, în toate cele de mai sus, poziția originii în orientarea axelor nu a jucat nici un rol.

În fapt, se verifică ușor că o roto-translație a axelor Ox_1x_2 conduce numai la apariția unei roto-translații rigide a barei. Pentru a arăta aceasta, să considerăm un nou sistem de axe obținut din cel inițial printr-o translație și o rotație. Din (11.22) rezultă că funcția $\psi(\beta)$, și deci și funcțiile $r(x_1, x_2)$, $t(x_1, x_2)$, sînt invariante de o rotație a axelor, astfel că ne rămîne de considerat numai cazul translației. Din prima formulă (11.29) obținem ⁸⁾

$$r^1 = r - x_2^0 x_1 + x_1^0 x_2. \quad (26)$$

Din (11.25) urmează că în cazul torsiunii avem și pentru o translație $\tau = \tau^1$, și deci și $C = C^1$. (Acest rezultat se obține și scriind condiția (4) în axele noi, și constatînd că diferența celor două soluții coincide cu cea care rezultă din (26) — după care un calcul efectiv conduce la concluzia $C = C^1$.)

Cu aceasta, dispunem de două soluții:

$$u_1 = -\tau x_2 x_3, \quad u_2 = \tau x_1 x_3, \quad u_3 = \tau r, \quad (27)$$

$$u_1^1 = -\tau x_2^1 x_3, \quad u_2^1 = \tau x_1^1 x_3, \quad u_3^1 = \tau r^1 = \tau (r - x_2^0 x_1 + x_1^0 x_2), \quad (28)$$

de unde

$$u_1^1 = u_1 + \tau x_2^0 x_3, \quad u_2^1 = u_2 - \tau x_1^0 x_3, \quad u_3^1 = u_3 - \tau x_2^0 x_1 + \tau x_1^0 x_2, \quad (29)$$

astfel că soluția în axele noi se obține prin adăugarea unor deplasări corespunzătoare unui vector de rotație de componente $(\tau x_1^0, \tau x_2^0, 0)$, așadar unei rotații în jurul unei axe perpendiculare pe Ox_3 .

Aceasta înseamnă că sîntem liberi de pildă să alegem originea și orientarea axelor în modul care permite să scriem ecuația frontierei sub forma cea mai comodă. Cele 6 con-

⁸⁾ Aci x_1^0, x_2^0 nu sînt coordonatele centrului de greutate.

stante arbitrare introduse în acest mod se adaugă în fond constantelor ce intervin în (8.30), (8.31), și care au fost neglijate când am scris deplasările sub forma (8.32), de unde am dedus (10).

Vom lua deci în general (vezi (5.17)) :

$$\begin{aligned} u_1 &= -\tau x_2 x_3 - Cx_2 + Bx_3 + F, \\ u_2 &= \tau x_1 x_3 + Cx_1 - Ax_3 + G, \\ u_3 &= \tau r(x_1, x_2) - Bx_1 + Ax_2 + H; \end{aligned} \quad (30)$$

dacă presupunem că vecinătatea *originii aci alese* nu se deplasează și nu se rotește, toate constantele astfel introduse sînt nule.

Se mai poate admite că secțiunea $x_3 = 0$ nu se deplasează și nu se rotește în planul ei (așadar $u_1 = u_2 = 0$ pentru $x_3 = 0$), și că cele 6 constante sînt alese astfel încît media patratică pe secțiune a deplasării longitudinale u_3 să fie minimă. Condiția relativă la deplasările u_1, u_2 dă mai întîi :

$$u_1 = -\tau x_2 x_3 + Bx_3, \quad u_2 = \tau x_1 x_3 - Ax_3, \quad u_3 = \tau r(x_1, x_2) - Bx_1 + Ax_2 + H. \quad (31)$$

Este vizibil că punctul de coordonate

$$x_1^t = A/\tau, \quad x_2^t = B/\tau \quad (32)$$

nu se deplasează tangențial pe nici o secțiune. Pentru acest motiv el poartă numele de *centru de torsiune* (A. Weinstein [1]).

Punînd și condiția de extremum pentru integrala

$$I(u_3) = \iint_D u_3^2 dD, \quad (33)$$

privită ca funcție de A, B, H , obținem ecuațiile

$$\iint_D u_3 x_2 dD = 0, \quad \iint_D u_3 x_1 dD = 0, \quad \iint_D u_3 dD = 0. \quad (34)$$

Alegînd drept axe, axele centrale principale de inerție ale secțiunii, obținem din (31) și (34) :

$$\iint_D (\tau r x_2 + Ax_2^2) dD = \iint_D (\tau r x_1 - Bx_1^2) dD = \iint_D (\tau r + H) dD = 0,$$

de unde

$$\begin{aligned} A &= -(\tau/I_1) \iint_D x_2 r(x_1, x_2) dD, \quad B = (\tau/I_2) \iint_D x_1 r(x_1, x_2) dD, \\ H &= -(\tau/D) \iint_D r(x_1, x_2) dD. \end{aligned} \quad (35)$$

(Vezi și mai departe § 19, pag. 308.)

e) Notă istorică

Formulele (4), (5), (7), (8), (10), ca și considerarea funcțiilor $r(x_1, x_2)$ și $t(x_1, x_2)$, se datorează lui Saint-Venant. Acestea au avut o deosebită importanță atât în dezvoltarea teoriei torsiunii, cât și pentru utilizarea metodei semi-inverse.

Problema torsiunii a fost abordată de către C. Coulomb [1] pentru cilindrul circular (în legătură cu studiile sale asupra pendulului de torsiune electro-static). Coulomb a dat soluția în cadrul ipotezei secțiunilor plane, presupunând $u_3 = 0$, și admitând că secțiunile normale se rotesc în planul lor ca un tot rigid în jurul centrului cercului, iar unghiul de rotație este proporțional cu distanța x_3 la baza fixată (ipoteza lui Coulomb). Desigur, acestea sînt cele mai simple presupuneri ce se puteau face.

Această soluție s-a dovedit a fi corectă. Dar încercarea lui L. Navier de-a folosi aceleași ipoteze pentru alte secțiuni a dus la rezultate eronate. (Ipoteza secțiunilor plane poate fi infirmată experimental, cu ajutorul unui cilindru necircular din cauciuc, pe a cărui suprafață laterală se trasează o rețea de generatoare și de traiectorii ortogonale lor.) A. Cauchy [7] a renunțat la ipoteza secțiunilor plane, dar nu a obținut nici el rezultatul corect.

Saint-Venant a căutat soluția problemei în deplasări, pornind de la ipoteza lui Coulomb, și admitând că secțiunile nu rămîn plane, dar deplanează toate în același mod, independent de x_3 (ipoteza lui Saint-Venant).

În conformitate cu ipoteza lui Coulomb, deplasarea tangențială este normală pe raza vectoare, de unde $u_1 x_1 + u_2 x_2 = 0$, sau încă, în coordonate polare ($x_1 + ix_2 = R \exp(i\chi)$):

$$u_1 \cos \chi + u_2 \sin \chi = 0. \quad (36)$$

Mai departe, ea este proporțională cu distanța la baza $x_3 = 0$, și cu raza vectoare $R = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, astfel că

$$u_1 = kx_3 R, \quad u_2 = hx_3 R, \quad (37)$$

ceea ce, împreună cu relațiile de mai sus, dă

$$u_1/u_2 = k/h = -\sin \chi/\cos \chi,$$

și deci, notînd cu τ un coeficient de proporționalitate:

$$u_1 = -\tau x_3 R \sin \chi, \quad u_2 = \tau x_3 R \cos \chi,$$

așadar tocmai primele două relații (10):

$$u_1 = -\tau x_2 x_3, \quad u_2 = \tau x_1 x_3. \quad (38)$$

Fenomenul torsiunii se produce deci fără deformarea secțiunii (și deci a frontierei) în planul ei. (Din (8.32), se vede că în cazul general proprietatea nu se menține.)

Evaluînd unghiul η dintre raza vectoare a punctului (x_1, x_2) și cea a aceluiași punct după deformare $(x_1 + u_1, x_2 + u_2)$, căpătăm

$$\eta \cong \operatorname{tg} \eta = \tau x_3, \quad (39)$$

ceea ce corespunde semnificației lui τ din (1).

Acceptînd ipoteza lui Coulomb, dar renunţînd la presupunerea $u_3 = 0$, Saint-Venant a introdus ca ipoteză independentă presupunerea

$$u_3 = u_3(x_1, x_2), \quad (40)$$

care coincide în fapt cu a treia relaţie (10), şi a rezolvat în acest mod problema torsiunii, făcînd uz de ecuaţiile lui Lamé.

În fapt însă, ipoteza (40) nu este o ipoteză independentă. Pentru a ne convinge de aceasta, să introducem (38) în ecuaţiile lui Lamé. Întrucît acum avem

$$\theta = \operatorname{div} \mathbf{u} = u_{3,3}, \quad (41)$$

ecuaţiile (4.8.7) se reduc la

$$u_{3,13} = 0, \quad u_{3,23} = 0, \quad u_{3,11} + u_{3,22} + u_{3,33} + (1 - 2\nu)^{-1}u_{3,33} = 0. \quad (42)$$

Primele două din ele conduc la concluzia că

$$u_{3,1} = f(x_1, x_2), \quad u_{3,2} = g(x_1, x_2), \quad u_{3,3} = h(x_3), \quad (43)$$

astfel că a treia ecuaţie (42) devine

$$-\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}(u_{3,11} + u_{3,22}) = u_{3,33} = 2a, \quad (44)$$

unde a este o constantă. De aci urmează

$$u_{3,3} = h(x_3) = 2ax_3 + b, \quad u_3 = ax_3^2 + bx_3 + w_0(x_1, x_2), \quad (45)$$

unde b este de asemenea o constantă. Pentru σ_{33} obţinem uşor de aci

$$\sigma_{33} = (\lambda + 2\mu)(2ax_3 + b). \quad (46)$$

Întrucît prin ipoteză avem $\mathcal{R}_3 = 0$ pe ambele baze, conchidem că

$$\iint_{x_3=l} (2ax_3 + b) dD = \iint_{x_3=0} (2ax_3 + b) dD = 0, \quad (47)$$

de unde urmează $a = b = 0$; pentru componenta u_3 obţinem deci o funcţie independentă de x_3 , aşadar tocmai forma (40).

Ipoteza lui Saint-Venant este deci o *consecinţă* a ecuaţiilor elasticităţii şi a ipotezei lui Coulomb. De aci rezultă în particular că dacă baza $x_3 = 0$ (sau o secţiune oarecare) este fixată într-un mod care interzice deplanaţia (*torsiune împiedică*), atunci şi ipoteza rotaţiei rigide a secţiunilor trebuie respinsă.

Pentru un istoric detaliat al problemei torsiunii, vezi N. Arutiunian şi B. Abramian [1], § 1.13.

§ 14. FUNCȚIA LUI PRANDTL ȘI CONSTANTELE LUI PRANDTL

a) Funcția lui Prandtl

Funcția lui Prandtl și Timošenko — considerată pentru prima oară⁹⁾ de către L. Prandtl [1], [2] pentru cazul *torsiunii* — se dovedește mai ușor de manevrat din punct de vedere teoretic, și cu semnificații mecanice mai simple decât funcțiile lui Saint-Venant.

Notînd în acest caz,

$$F(x_1, x_2) = \mu\tau f(x_1, x_2), \quad (1)$$

obținem din (12.7) ecuația lui Poisson

$$\Delta f = -2, \quad (2)$$

iar din (12.9), condiția la limită

$$f|_{\mathcal{L}_j} = f_j. \quad (3)$$

Funcția $f(x_1, x_2)$ se numește *funcția lui Prandtl*, iar constantele f_j — *constantele lui Prandtl*. Din (12.10) urmează că funcția lui Prandtl este uniformă. Întrucît în (12.5) avem $T_r = 0$, formulele (12.6) se reduc la

$$T = -2i\mu\tau f_{,3}, \quad (4)$$

sau încă

$$\sigma_{31} = \mu\tau f_{,2}, \quad \sigma_{32} = -\mu\tau f_{,1}. \quad (5)$$

Între funcția lui Prandtl și funcția de torsiune conjugată există legătura ce derivă din (12.5):

$$f = t - \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2), \quad (6)$$

care arată că funcția lui Prandtl este tocmai funcția invariantă din (11.30).

Din comparația relațiilor (4) și (13.6) căpătăm imediat

$$\psi'(\mathfrak{z}) = 2r_{,3} = 2if_{,3} + i\bar{f}. \quad (7)$$

Funcția lui Prandtl este numai un potențial de tensiune: un echivalent al relațiilor (13.10) nu există. (Vezi și § 12, pag. 222). De cîte ori va fi

⁹⁾ În fapt, această funcție era deja folosită de către J. Boussinesq [1].

determinată funcția lui Prandtl, va fi apoi necesară și aflarea funcției $r(x_1, x_2)$, de pildă din (7):

$$r_{,1} = f_{,2} + x_2, \quad r_{,2} = -f_{,1} - x_1. \quad (8)$$

Ținând seama de (1)–(3), relația generală (12.20) devine aci:

$$f(x_1, x_2) = - \sum_{j=1}^m f_j \oint_{\mathcal{L}_j} G_{,n} ds + 2 \iint_{\mathcal{D}} G(x_1, x_2; \xi_1, \xi_2) dD_{\xi}. \quad (9)$$

Această formulă pune în evidență dependența între funcția lui Prandtl și constantele lui Prandtl, deocamdată necunoscute.

b) Constantele lui Prandtl și rigiditatea geometrică la torsiune

Să considerăm (L. Solomon [3]) funcțiile

$$b_j(x_1, x_2) = - \oint_{\mathcal{L}_j} G_{,n} ds, \quad (10)$$

numite *măsurile armonice* ale componentelor \mathcal{L}_j ale frontierei. Se știe (vezi de ex. S. Mihlin [1], § 41) că ele sînt funcții armonice în \mathcal{D} , și satisfac condiția

$$b_j(x_1, x_2)|_{\mathcal{L}_h} = \delta_{jh}. \quad (11)$$

Întrucît extremele unei funcții armonice sînt atinse numai pe frontieră, rezultă $0 < b_j(x_1, x_2) < 1$ în \mathcal{D} . Introducînd (10) în (9), deducem

$$f(x_1, x_2) = \sum_{j=1}^m f_j b_j(x_1, x_2) + 2 \iint_{\mathcal{D}} G(x_1, x_2; \xi_1, \xi_2) dD_{\xi}. \quad (12)$$

Mai departe, transcriind (12.19) pentru cazul torsiunii, căpătăm *formula lui Bredt*¹⁰⁾

$$\oint_{\mathcal{C}} f_{,n} ds = -2A. \quad (13)$$

Scriind această relație pe \mathcal{L}_j (pe \mathcal{L}_0 , ea rezultă atunci identic verificată) și introducînd aci (12), obținem — după operații asupra cărora nu ne oprim — sistemul

$$\sum_{h=1}^m B_{jh} f_h = 2 \left[D_j + \iint_{\mathcal{D}} b_j(x_1, x_2) dD \right], \quad j, h = 1, 2, \dots, m, \quad (14)$$

¹⁰⁾ Aceeași observație ca la pag. 234.

unde am notat

$$B_{jh} = \oint_{\mathcal{L}_j} b_{h,n} ds. \quad (15)$$

Se poate demonstra că sistemul (14) are întotdeauna o soluție unică, ce poate fi găsită prin aproximații succesive; cercetarea acestei soluții arată că $f_j > 0$ ($j \geq 1$), astfel că din (12) urmează acum $f(x_1, x_2) > 0$ în \mathcal{D} .

Întrucât funcția lui Green depinde numai de configurația domeniului \mathcal{D} , din (14) rezultă că constantele lui Prandtl sînt niște *constante geometrice* ale domeniului.

Pentru determinarea lor, vezi încă J. Bartha [2] și P. Narasimhamurthy [1].

Introducînd (8) în (13.14), obținem

$$C = - \iint_{\mathcal{D}} (x_1 f_{,1} + x_2 f_{,2}) dD, \quad (16)$$

de unde, utilizînd formula lui Riemann (A.3.18):

$$\begin{aligned} C &= - \iint_{\mathcal{D}} [(x_1 f)_{,1} + (x_2 f)_{,2} - 2f] dD = \\ &= - \oint_{\mathcal{L}} f(x_1 n_1 + x_2 n_2) ds + 2 \iint_{\mathcal{D}} f(x_1, x_2) dD. \end{aligned}$$

Ținînd seama de condiția la limită (3), luînd $f_0 = 0$, integrînd pe \mathcal{L} cu respectarea sensului pozitiv, și remarcînd că

$$\oint_{\mathcal{L}_j} (x_1 n_1 + x_2 n_2) ds = 2 \iint_{\mathcal{D}_j^+} dD = 2D_j, \quad (17)$$

căpătăm în definitiv importanta formulă (vezi și § 16, pag. 278)

$$C = 2 \sum_{j=1}^m f_j D_j + 2 \iint_{\mathcal{D}} f(x_1, x_2) dD. \quad (18)$$

Mai departe, introducînd aci expresia (12), obținem

$$C = 2 \sum_{j=1}^m f_j \left[D_j + \iint_{\mathcal{D}} b_j(x_1, x_2) dD \right] + 4 \iiint_{\mathcal{D} \times \mathcal{D}} G(x_1, x_2; \xi_1, \xi_2) dD_x dD_\xi \quad (19)$$

sau încă, ținînd seama de ecuațiile (14):

$$C = 2 \sum_{j,h=1}^m B_{jh} f_j f_h + 4 \iiint_{\mathcal{D} \times \mathcal{D}} G(x_1, x_2; \xi_1, \xi_2) dD_x dD_\xi, \quad (20)$$

ceea ce dă expresia rigidității C prin intermediul funcției lui Green. Întrucît avem $G > 0$, $b_j > 0$, $f_j > 0$, din (19) rezultă din nou $C > 0$.

În cazul unui domeniu simplu-conex, formulele se simplifică. Astfel, funcția lui Prandtl este în acest caz soluția problemei

$$\Delta f = -2 \text{ în } \mathcal{D}, \quad f = 0 \text{ pe } \mathcal{L}, \quad (21)$$

așadar a unei probleme Dirichlet. Din (12) urmează :

$$f(x_1, x_2) = 2 \iint_{\mathcal{D}} G(x_1, x_2; \xi_1, \xi_2) dD_{\xi}, \quad (22)$$

iar pentru C avem, în loc de (18), (19), formulele simple

$$C = 2 \iint_{\mathcal{D}} f(x_1, x_2) dD = 4 \iiint_{\mathcal{D} \times \mathcal{D}} G(x_1, x_2; \xi_1, \xi_2) dD_x dD_{\xi}. \quad (23)$$

c) Imagine geometrică

Pentru a înțelege semnificația funcției lui Prandtl, să exprimăm cu ajutorul ei vectorul-tensiune $(\sigma_{31}, \sigma_{23}, 0)$ într-un punct oarecare al secțiunii \mathcal{D} . În acest scop, să considerăm familia de curbe

$$f(x_1, x_2) = \text{const.} \quad (24)$$

Întrucât cosinuşii directori ai normalei la o curbă oarecare a familiei sînt proporționali cu $f_{,1}$ și $f_{,2}$ deducem — ținînd seama de (5) și (A.3.12) — :

$$\sigma_{31} = kn_2 = -k \cos(\mathbf{s}, x_1); \quad \sigma_{32} = -kn_1 = -k \cos(\mathbf{s}, x_2). \quad (25)$$

Prin urmare, vectorul tensiune este dirijat în fiecare punct după tangenta la linia $f = \text{const.}$ ce trece prin acel punct. Liniile $f = \text{const.}$ poartă numele de *traietorii ale tensiunilor tangențiale*. Ele se pot interpreta și ca linii de nivel ale unei suprafețe $X_3 = f(x_1, x_2)$.

Din (3) rezultă că componentele lui \mathcal{L} sînt traietorii ale tensiunilor tangențiale, așadar în fiecare punct-frontieră tensiunea este dirijată după tangenta la \mathcal{L} .

Să calculăm acum proiecția $T(\mathbf{s})$ a vectorului tensiune pe tangenta la o curbă \mathcal{C} oarecare din \mathcal{D} , definită de versorul tangentei \mathbf{s} (vezi (12.22)). Ținînd din nou seama de (5) și (A.3.12), obținem

$$T(\mathbf{s}) = \mu\tau [-f_{,2} n_2 - f_{,1} n_1] = -\mu\tau f_{,n}, \quad (26)$$

unde \mathbf{n} este normala care formează cu tangenta \mathbf{s} un sistem de axe \mathbf{n}, \mathbf{s} orientat la fel cu sistemul x_1, x_2 : prin urmare, pentru o curbă închisă, \mathbf{n} este normala exterioară; dacă $\mathcal{C} = \mathcal{L}_j (j \geq 1)$, \mathbf{n} este normala exterioară la \mathcal{D}_j^+ , așadar normala interioară la \mathcal{D} .

Dacă curba \mathcal{C} este o traiectorie a tensiunilor tangențiale, tensiunea tangențială este dirijată după \mathbf{s} , și prin urmare avem $T(\mathbf{s}) = \pm |T|$.

În definitiv, *direcția* vectorului tensiune într-un punct oarecare (subînțeles : pe un element de normală paralelă cu Ox_3) este dată de direcția tangentei la traiectoria $f(x_1, x_2) = \text{const.}$ ce trece prin acel punct; iar *mărimea* vectorului tensiune este dată de gradientul funcției $f(x_1, x_2)$ (derivata după direcția normalei la traiectorie).

d) Proprietăți extremale

Se poate ușor arăta că mărimea $|T|$ a tensiunii își atinge *maximul* pe frontiera \mathcal{L} ; același lucru este valabil pentru *minimul* funcției $f(x_1, x_2)$.

Într-adevăr, funcția lui Prandtl este *supraarmonică* în \mathcal{D} ($\Delta f < 0$), și astfel de funcții își ating minimul numai pe \mathcal{L} (vezi V. Smirnov [2], vol. 4, pct. 215). În particular, dacă $f(x_1, x_2)$ ar avea un minim într-un punct interior, în acel punct ar trebui să fie

$$f_{,1} = 0, \quad f_{,2} = 0, \quad f_{,11} \geq 0, \quad f_{,22} \geq 0,$$

ceea ce ar contrazice ecuația (2). Întrucât $f_j > 0$ ($j \geq 1$), rezultă că minimul este atins pe componenta \mathcal{L}_0 și valoarea sa este $f_0 = 0$.

Pe de altă parte, din (13.6) avem

$$|T|^2 = T\bar{T} = \mu^2 \tau^2 [\psi'(\zeta) \overline{\psi'(\zeta)} + i\zeta \psi'(\zeta) - i\bar{\zeta} \overline{\psi'(\zeta)} + \zeta \bar{\zeta}], \quad (27)$$

astfel că, ținând seama de forma complexă (A.4.7) a operatorului lui Laplace :

$$\Delta(|T|^2) = 4(T\bar{T})_{,\bar{\zeta}\zeta} = 4\mu^2\tau^2(\psi''\overline{\psi''} + 1) > 0. \quad (28)$$

Funcția $|T|^2$ rezultă a fi *subarmonică* (vezi loc. cit), și își atinge deci maximul pe frontieră. Argumentul elementar de mai sus (cu semnele schimbate) rămîne valabil. Minimul funcției $|T|^2$ este desigur egal cu zero, și poate fi atins atît pe frontieră, cît și în interior. (Vezi § 16, pag. 266).

§ 15. PROBLEMA TORSIUNII. EXEMPLE

În acest paragraf vom da unele exemple de determinare a funcțiilor de torsiune în cazuri în care ele pot fi găsite efectiv, cu mijloace elementare. Un loc important îl ocupă aci metoda inversă, și cea a separării variabilelor.

a) Cerc. Coroană circulară

Fie că \mathcal{D} este un cerc de rază R_0 , sau o coroană de raze R_0 și R_1 (cu $R_1 < R_0$). Căutînd o funcție armonică în \mathcal{D} și care satisface condiția la limită (13.11), găsim soluția evidentă

$$t(x_1, x_2) \equiv \frac{1}{2} R_0^2 = \text{const.}, \quad (1)$$

unde constanta a fost aleasă astfel încît f_0 să fie nulă (vezi (14.6)).

OBSERVAȚIA 1. Aparent, soluția problemei pentru coroana circulară ar putea fi căutată sub forma

$$t(x_1, x_2) = \alpha + \beta \ln R.$$

Într-adevăr, această funcție este armonică, și constantele α, β pot fi determinate din condiția (13.11) scrisă pe cele două cercuri-frontieră. Ea nu este însă acceptabilă, întrucît conjugata armonică a funcției $\ln R$ nu este uniformă în \mathcal{D} (vezi și § 13, pag. 227).

Funcția lui Prandtl în coordonate polare se scrie evident

$$f = \frac{1}{2} (R_0^2 - R^2), \quad R^2 = x_1^2 + x_2^2. \quad (2)$$

Din (1) urmează și $r(x_1, x_2) \equiv \text{const.}$, și deci și $\psi(\beta) \equiv \text{const.}$; alegînd $r(x_1, x_2) \equiv 0$, din (13.8) și (13.10) avem

$$u_1 = -\tau x_2 x_3, \quad u_2 = \tau x_1 x_3, \quad u_3 = 0; \quad \sigma_{31} = -\mu \tau x_2, \quad \sigma_{32} = \mu \tau x_1. \quad (3)$$

Prin urmare, în cazul secțiunii circulare (cu sau fără gol concentric), ipoteza secțiunilor plane este respectată. De altfel, acesta este singurul caz în care ea e respectată: luînd $u_3 = \text{const.}$, deducem $r = \text{const.}$ și deci și $t = \text{const.}$, astfel că din (13.11) obținem ecuațiile unor cercuri concentrice (cel mult două). Acest fapt arată importanța pasului făcut prin ipoteza lui Saint-Venant asupra deplanării.

Pentru rigiditatea geometrică la torsiune obținem din (13.14)

$$C = I_0 = \iint_{\mathcal{D}} R^2 dR d\chi = \frac{1}{2} \pi (R_0^4 - R_1^4), \quad (4)$$

(în cazul cercului, $R_1 = 0$). Valoarea lui τ se calculează acum din (13.15).

Pentru un cerc de arie dată D , deducem din (4)

$$C = D^2/2\pi. \quad (5)$$

OBSERVAȚIA 2. Dacă constanta μ nu este cunoscută, ea poate fi determinată din mărimile cunoscute \mathcal{M}_3 și $C = I_0$, și valoarea măsurată a lui τ . Torsiunea unei bare cilindrice circulare poate constitui deci cea de a doua experiență principal independentă necesară pentru determinarea constantelor elastice (vezi § 3.4, pag. 95).

Soluția (3) (vezi și raționamentele din § 6, pag. 190) sugerează utilizarea de bare tubulare. Astfel, o bară de secțiune circulară cu raza R' are aceeași rigiditate ca o bară tubulară, dacă $R'^4 = R_0^4 - R_1^4$. Alegând de exemplu $R_0 = 6$ cm, $R_1 = 5$ cm, obținem $R' = 5,09$ cm, și deducem că bara tubulară este cu 58 % mai ușoară decât cea plină.

Exemplu numeric. Un arbore de mașină transmite o putere $P = 600$ c.p., lucrând în regim de 120 rotații pe minut. Presupunând arborele cilindric circular (plin), din oțel ($\mu = 750\,000$ kgf/cm²), să se calculeze raza minimă admisibilă pentru ca τ să nu depășească 20'/m, iar $|T(s)|$ să nu depășească 600 kgf/cm².

Puterea dată este $P = 600 \times 75 \text{ kgm/sec} = 45 \cdot 10^5 \text{ kg} \cdot \text{cm/sec}$. Lucrul mecanic produs de cuplul M_3 la o rotire de un unghi η este $M_3\eta$. Intrucît avem $P = M_3\eta/\text{sec}$, și intrucît unghiul de rotație pe secundă este $120 \cdot 2\pi/60 = 4\pi$, obținem $M_3 = 45 \cdot 10^5/4\pi \cong 358 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{cm}$.

Din (3), găsim pe frontieră

$$|\sigma_3| = \sqrt{\sigma_{31}^2 + \sigma_{32}^2} = \mu\tau R_0 = (M_3/C)R_0 = 2M_3/\pi R_0^3.$$

Punînd condiția ca această cantitate să nu depășească 600 kgf/cm², deducem $R_0 \geq \sqrt[3]{380} \text{ cm} \cong 7,24 \text{ cm}$. Aceasta este condiția de rezistență a arborelui (calcul la tensiuni admisibile.)

Pe de altă parte, valoarea gradului de torsiune admis (calcul de rigiditate) dă $M_3/\mu C \leq 20'/\text{m}$, de unde, intrucît $20'/\text{m} = 0,000058$ radian/cm, obținem $R_0 \geq 8,51 \text{ cm}$.

Se adoptă valoarea $R_0 = 8,51 \text{ cm}$ corespunzătoare condiției mai severe.

b) Elipsă

Să considerăm o secțiune a cărei frontieră are ecuația

$$x_1^2/a^2 + x_2^2/b^2 = 1, \quad b \leq a, \quad (6)$$

(B. de Saint-Venant [1], cap. 6). Alegînd

$$f(x_1, x_2) = K(x_1^2/a^2 + x_2^2/b^2 - 1), \quad (7)$$

ceea ce asigură verificarea condiției la limită din (14.21), obținem $\Delta f = 2K(a^{-2} + b^{-2})$. Pentru a asigura și verificarea ecuației (14.21), se ia deci $K = -a^2b^2/(a^2 + b^2)$. Prin urmare, funcția lui Prandtl se scrie

$$f(x_1, x_2) = \frac{a^2b^2}{a^2 + b^2} \left(1 - \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} \right). \quad (8)$$

Introducînd (8) în (14.5), obținem

$$\sigma_{31} = -\frac{2a^2}{a^2 + b^2} \mu\tau x_2, \quad \sigma_{32} = \frac{2b^2}{a^2 + b^2} \mu\tau x_1. \quad (9)$$

Pe de altă parte, ținînd seama de (8) în prima relație (14.23), avem

$$C = 2 \int_D f(x_1, x_2) dD = 2 \frac{a^2b^2}{a^2 + b^2} \iint_D \left(1 - \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} \right) dD. \quad (10)$$

Pentru momentele de inerție ale domeniului mărginit de elipsa (6), căpătăm

$$I_1 = \frac{1}{4} \pi a b^3, \quad I_2 = \frac{1}{4} \pi a^3 b, \quad I_0 = \frac{1}{4} \pi a b (a^2 + b^2), \quad (11)$$

astfel că din (10) urmează

$$C = \pi a^3 b^3 / (a^2 + b^2). \quad (12)$$

Aceasta dă pentru gradul de torsiune valoarea

$$\tau = \mathcal{M}_3 / \mu C = [(a^2 + b^2) / \pi \mu a^3 b^3] \mathcal{M}_3, \quad (13)$$

și deci formulele (9) devin în definitiv

$$\sigma_{31} = - (2 \mathcal{M}_3 / \pi a b^3) x_2, \quad \sigma_{32} = (2 \mathcal{M}_3 / \pi a^3 b) x_1. \quad (14)$$

Pentru modulul $|\sigma_3| = |T|$ al vectorului tensiune avem de aci

$$|T| = (2 \mathcal{M}_3 / \pi a b) \sqrt{x_1^2 / a^4 + x_2^2 / b^4}. \quad (15)$$

Întrucât maximum acestei funcții este atins pe \mathcal{L} , trebuie să găsim punctele de anulare ale derivatei tangențiale $|T|_{,s}$ pe \mathcal{L} . Ținând seama de (A.3.12), (8) și (15), avem pe rînd

$$|T|_{,s} = - |T|_{,1} n_2 + |T|_{,2} n_1 = \alpha (- |T|_{,1} f_{,2} + |T|_{,2} f_{,1}) = \beta (a^{-2} - b^{-2}) x_1 x_2,$$

(unde α, β sînt coeficienți de proporționalitate), astfel că, pentru $a \neq b$, extremele sînt atinse pe axele elipsei. Avînd de ales între extremele mărimilor x_1/a^2 și x_2/b^2 , deducem că mărimea tensiunii ia valoarea maximă pentru $x_1 = 0$, $x_2 = \pm b$, așadar la capetele semiaxei mici ale elipsei (6):

$$|\sigma_3|_{\max} = 2 \mathcal{M}_3 / \pi a b^2. \quad (16)$$

Acest rezultat este contrar celor ce s-ar petrece dacă ipoteza secțiunilor plane ar fi valabilă: am avea atunci $|\sigma_3|^2 = \mu^2 \tau^2 (x_1^2 + x_2^2)$, funcție care ia valoarea maximă pentru $x_2 = 0$, $x_1 = \pm a$. Semnificația acestei proprietăți va fi mai bine înțeleasă în § 16, pag. 266

Pentru a calcula deplasările, este necesară determinarea funcției $r(x_1, x_2)$. Din (14.8) și (8) obținem ușor

$$r_{,1} = - [(a^2 - b^2) / (a^2 + b^2)] x_2, \quad r_{,2} = - [(a^2 - b^2) / (a^2 + b^2)] x_1, \quad (17)$$

de unde urmează

$$r(x_1, x_2) = - [(a^2 - b^2) / (a^2 + b^2)] x_1 x_2. \quad (18)$$

Ținînd seama și de (13), avem în definitiv

$$u_3(x_1, x_2) = - [(a^2 - b^2) / \pi \mu a^3 b^3] \mathcal{M}_3 x_1 x_2. \quad (19)$$

Secțiunile normale se transformă deci în paraboloizi hiperbolici. Deplasările tangențiale sînt cunoscute din (13.10) și (13).

Secțiunea eliptică reprezintă unul din rarele cazuri în care calculele se desfășoară atât de simplu. În particular, acesta este unul din rarele cazuri în care funcția lui Prandtl poate fi căutată sub forma unui produs de funcții, printre care intervine ecuația frontierei sub formă implicită, ceea ce asigură verificarea condiției la limită din (14.21). (Vezi de ex. L. Leibenzon [2].) Lucrurile se petrec astfel, datorită structurii simple a funcției $\psi(\zeta)$. Anume, din (14.6) și (8) deducem

$$t(x_1, x_2) = f(x_1, x_2) + \frac{1}{2} (x_1^2 + x_2^2) = \frac{1}{2} \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} (x_1^2 - x_2^2) + \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}. \quad (20)$$

Întrucât avem evident $-x_1 x_2 + \frac{1}{2} i(x_1^2 - x_2^2) = \frac{1}{2} i\zeta^2$, din (18) și (20) deducem că soluția complexă a problemei are forma

$$\psi(\zeta) = \frac{1}{2} \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} i\zeta^2 + i \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}, \quad (21)$$

unde termenul constant poate fi neglijat (el corespunde valorii $f_0 = 0$).

Soluția aceleiași probleme poate fi obținută și printr-o metodă de tip invers, considerând funcții de forma $h\zeta^n$ (unde h este o constantă complexă, iar n , un număr natural) și determinând domeniile corespunzătoare. Pentru $n = 2$, găsim elipsa.

Să revenim asupra rigidității geometrice la torsiune. Notînd cu

$$D = \pi ab \quad \text{și} \quad k = \sqrt{1 - b^2/a^2} \quad (22)$$

aria și excentricitatea, și ținînd seama de valoarea l_0 , din (11), putem transcrie (12) sub forma

$$C = (D^4/4\pi^2 l_0). \quad (23)$$

Mai departe, avem desigur

$$a = \sqrt{\frac{D}{\pi}} (1 - k^2)^{-1/4}, \quad b = \sqrt{\frac{D}{\pi}} (1 - k^2)^{1/4}, \quad l_0 = \frac{D^2 \left(1 - \frac{1}{2} k^2\right)}{2\pi \sqrt{1 - k^2}}, \quad (24)$$

astfel că (23) devine

$$C = (D^2/2\pi) \sqrt{1 - k^2} : \left(1 - \frac{1}{2} k^2\right). \quad (25)$$

Dezvoltînd în serie această expresie, obținem

$$C = (D^2/2\pi) \left[1 - \frac{1}{8} k^4 + \dots\right], \quad (26)$$

unde am notat (compară mai departe cu (10.7.27)) :

$$l_1(k) = 1 + k^2 + \left(1 - \frac{3}{16}\right) k^4 + \dots \quad (27)$$

Prin urmare, rigiditatea geometrică la torsiune depinde de *aria* D a secțiunii eliptice, și numai în relativ mică măsură de *forma* acesteia, caracterizată de excentricitatea k , sau de aria D și de momentul I_0 . (Desigur, aceste relații își pierd sensul pentru $k \cong 1$.)

Pentru paranteza dreaptă din (26), avem valorile de mai jos :

k	0	0,2	0,4	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95	0,97
$1 - \frac{1}{8} k^4 I_1(k)$	1	0,9998	0,9962	0,9756	0,9458	0,8823	0,7326	0,5688	0,4590

B. de Saint-Venant [3] a propus formula (23) ca expresie *aproximativă* a rigidității pentru *orice* secțiune simplu-conexă. Scriind-o sub forma

$$C = \kappa (D^4 / I_0), \quad (28)$$

unde $\kappa_{\text{elipsă}} = (1/4\pi^2) = 0,02533$, el a calculat valorile exacte ale lui κ pentru diferite secțiuni (chiar secțiuni atât de îndepărtate de cea eliptică, cum sînt profilele în J), obținînd rezultate satisfăcătoare. (Vezi tabela la finele paragrafului, pag. 260, coloana a doua.) Fără îndoială, valabilitatea formulei aproximative a lui Saint-Venant este legată de rolul redus al *forme*i elipsei de secțiune în valoarea lui C , evidențiată în (26).

OBSERVAȚIA 3. Se înțelege că de aci nu rezultă *nimic* în ce privește valorile tensiunii (și în particular, ale tensiunii tangențiale maxime). Vezi de exemplu H. Muștari [1].

Din formula (23) rezultă că, la arie egală, cea mai avantajoasă secțiune este cea cu I_0 minimal. Din (26) urmează că secțiunea optimă este cea circulară ($k = 0$; compară cu (5)). Desigur, aceasta *nu* reprezintă o demonstrație, întrucît formulele au numai caracter aproximativ (dacă \mathcal{D} nu este mărginit de o elipsă). Faptul că, la arie egală, domeniul simplu-conex de rigiditate geometrică maximă la torsiune este discul circular, a fost demonstrat de G. Polya [1]; în cazul domeniilor dublu conexe, rolul de domeniu de rigiditate maximă la aceeași arie îl are coroana circulară (G. Polya și A. Weinstein [1]). O amplă analiză a problemei este prezentată de G. Polya și G. Szegő [1], capitolul 5.

OBSERVAȚIA 4. Funcția (8) este funcția lui Prandtl și pentru orice domeniu dublu conex mărginit de elipsa (6) și de o curbă $f(x_1, x_2) = \text{const.}$

c) Triunghi echilateral

Exemplul ce urmează (B. de Saint-Venant [1], § 105) prezintă sugestiv modul de utilizare a metodei inverse din (13.11), (13.12). Fie deci

$$\psi(\zeta) = k\zeta^3, \quad (29)$$

unde coeficientul k este indispensabil pentru a asigura dimensiunile necesare ale cantităților cu care avem de-a face (vezi § 13, pag. 227). Scriind $\psi(\zeta)$ sub forma (13.2), obținem

$$r(x_1, x_2) = k(x_1^3 - 3x_1x_2^2), \quad t(x_1, x_2) = k(3x_1^2x_2 - x_2^3). \quad (30)$$

Luînd funcția $r(x_1, x_2)$ drept funcție de torsiune, căpătăm din (13.11) ecuația curbei-frontieră sub forma

$$k(3x_1^2x_2 - x_2^3) - \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) = h, \quad (h = \text{const.}). \quad (31)$$

Asimptotele acestei cubice se obțin egallnd cu zero suma termenilor de grad 3 :

$$3x_1^2x_2 - x_2^3 \equiv -x_2(x_2 + \sqrt{3}x_1)(x_2 - \sqrt{3}x_1) = 0.$$

Să considerăm trei drepte respectiv paralele cu aceste asimptote

$$x_2 = a, \quad x_2 + \sqrt{3}x_1 = b, \quad x_2 - \sqrt{3}x_1 = b, \quad (32)$$

și să determinăm k, h pentru care cubica (31) degenerază în ansamblul acestor trei drepte. Identificînd expresiile

$$k(3x_1^2x_2 - x_2^3) - \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) - h \equiv c(x_2 - a)[(x_2 - b)^2 - 3x_1^2],$$

obținem

$$k = 1/6a, \quad h = -\frac{2}{3}a^2; \quad b = -2a, \quad c = -1/6a. \quad (33)$$

Pentru aceste valori, cubica (31) degenerază în ansamblul dreptelor

$$x_2 = a, \quad x_2 + \sqrt{3}x_1 + 2a = 0, \quad x_2 - \sqrt{3}x_1 + 2a = 0, \quad (34)$$

care definesc un triunghi echilateral cu centrul în origine.

Avem deci

$$\psi(\xi) = (1/6a)\xi^3,$$

$$r(x_1, x_2) = (1/6a)(x_1^3 - 3x_1x_2^2), \quad (35)$$

$$f(x_1, x_2) = (1/6a)(3x_1^2x_2 - x_2^3) - \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) + \frac{2}{3}a^2,$$

unde constanta a caracterizează dimensiunile triunghiului. Expresia

$$u_3 = (\tau/6a)x_1(x_1 - \sqrt{3}x_2)(x_1 + \sqrt{3}x_2) \quad (36)$$

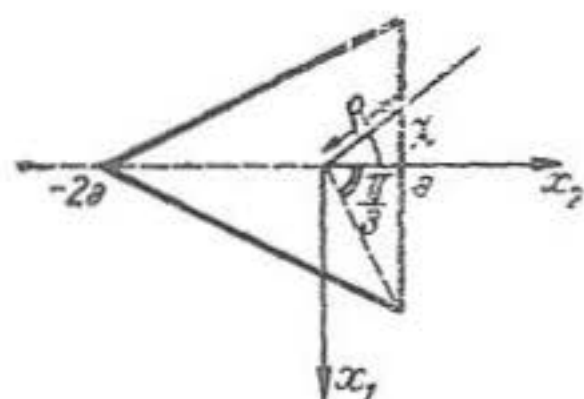


Fig. 5.15.1

definește aspectul după deformație al secțiunilor inițial plane. În particular, înălțimile triunghiului rămân după deformație în planul inițial al secțiunii.

Pentru a determina τ , ne rămîne să calculăm, folosind de pildă (13.24), valoarea

$$C = I_0 - (1/4a^2) \iint_D (x_1^2 + x_2^2)^2 dD. \quad (37)$$

În coordonate polare, deducem (vezi I. Rijk și I. Gradstein [1], formula 2.246)

$$I_0 = 6 \int_0^{\pi/3} d\chi \int_0^{a/\cos \chi} R^3 dR = 3\sqrt{3}a^4, \quad C = \frac{9}{5}\sqrt{3}a^4, \quad (38)$$

sau încă, întrucît latura triunghiului este $l = 2\sqrt{3}a$, iar aria $D = 3\sqrt{3}a^2$:

$$C = 0,1155 D^2 = 0,0222 (D^4/I_0). \quad (39)$$

OBSERVAȚIA 5. Folosind diferite funcții de forma $k\zeta^n$ și combinații de astfel de funcții B. de Saint-Venant (loc. cit.) a rezolvat numeroase probleme de acest tip.

OBSERVAȚIA 6. Pentru triunghiul dreptunghic isoscel, vezi B. Galerkin [2], volumul 1. Pentru alte triunghiuri, soluția nu este elementară. (Vezi de ex. N. Gloumakoff și Yi-Yuan Yu [1]).

d) Lunulă circulară. Concentrarea tensiunilor

Tot în spiritul metodei inverse, să alegem

$$\psi(\zeta) = k\zeta + h\zeta^{-1} + l, \quad (40)$$

(k, h, l — constante reale, deocamdată nedeterminate), de unde

$$r(x_1, x_2) = kx_1 + h \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} + l, \quad t(x_1, x_2) = kx_2 - h \frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2}. \quad (41)$$

Este de preferat să definim ecuația curbei-frontieră a domeniului corespunzător sub forma (13.12), ceea ce echivalează cu a lua în (13.11) drept funcție complexă de torsiune, funcția $i\psi(\zeta)$. Căpătăm astfel

$$kx_1 + h \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} + l - \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) = 0, \quad (42)$$

așadar ecuația unei quartice. Să determinăm valorile k, h, l , pentru care ea se descompune în ansamblul a două conice. În coordonate polare $\zeta = R \exp(i\chi)$, căpătăm ușor

$$(R^2 - 2l) \left(1 - 2k \frac{R^2 + h/k}{R^2 - 2l} \frac{\cos \chi}{R} \right) = 0.$$

Luând aici $2l = c^2$, $h/k = -2l = -c^2$, $k = a$, obținem

$$(R^2 - c^2) [1 - 2a(\cos \chi)/R] = 0, \quad (43)$$

ceea ce, pentru $c < 2a$, este ecuația ansamblului celor două cercuri din figură, unul avînd centrul pe circumferința celuilalt.

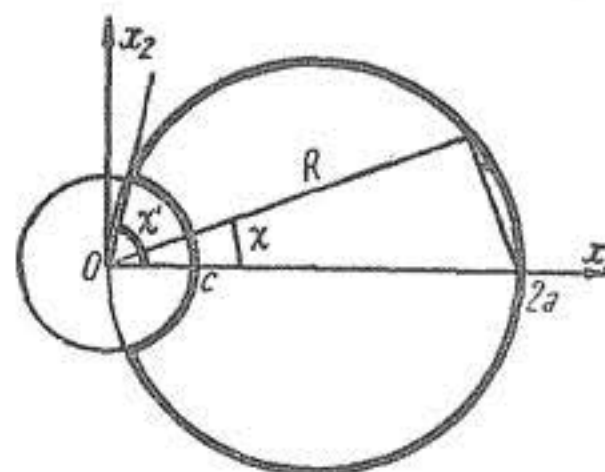


Fig. 5.15.2

Acesta este cazul elementar al problemei lunulei circulare, considerat inițial de C. Weber [1], [2]. Pentru cazul ne-elementar, cînd centrul cercului de rază c nu e situat pe circumferința celuilalt, vezi I. Sokolnikoff [2], § 45; I. Sokolnikoff și E. Sokolnikoff [1]; L. Hamburger et al. [1]; I. Ufliand [2], §§ 2.7–2.9.

Prin urmare, pentru domeniul mărginit de cele două cercuri și care nu conține originea (punct în care funcția (40) nu este olomorfă), avem

$$\psi(\zeta) = ia(\zeta - c^2\zeta^{-1}) + \frac{1}{2}ie^2, \quad (44)$$

$$f(x_1, x_2) = a \left(x_1 - c^2 \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} \right) - \frac{1}{2} (x_1^2 + x_2^2) + \\ + \frac{1}{2} (c^2 - R^2) \left(1 - \frac{2a \cos \chi}{R} \right). \quad (45)$$

(Am ales funcția (44) în locul funcției ce ar rezulta direct din (40) și (13.11), pentru ca axa de simetrie a figurii să fie axa polară.)

Considerînd aci și cazul-limită $c \rightarrow 0$, obținem funcțiile

$$\psi(\zeta) = ia\zeta, \quad f(x_1, x_2) = -\frac{1}{2} R^2 [1 - 2a(\cos \chi)/R], \quad (46)$$

care coincid cu funcțiile corespunzătoare pentru cazul cercului; aceasta decurge din (11.28) (unde trebuie neglijat un termen de forma $i\bar{\zeta}^0 \zeta$, corespunzător unei deplasări rigide după cum rezultă ținînd seama de (8.10)), respectiv din (11.31) (transcriind formula (2) pentru originea aleasă nu în centrul, ci pe frontiera discului de rază a).

Dar aceasta nu înseamnă că tensiunile corespunzătoare cazului limită $c \rightarrow 0$ ar coincide cu cele ce se obțin în cazul discului circular, așadar luînd de la început $c = 0$, și căutînd funcția $\psi(\zeta)$ sub forma din (46) (funcție olomorfă inclusiv în $\zeta = 0$, sau care cel puțin poate fi prelungită prin continuitate în acest punct). Vom reveni mai departe asupra acestei chestiuni.

Pentru rigiditatea geometrică la torsiune, avem din (14.23) și (45):

$$C = \iint_{\mathcal{D}} (c^2 - R^2) [1 - 2a(\cos \chi)/R] R \, dR \, d\chi, \quad (47)$$

cu limitele de integrare

$$c \leq R \leq 2a \cos \chi, \quad -\chi' \leq \chi \leq \chi', \quad (48)$$

unghiul $\chi' = \chi_{\max}$ fiind definit de relația evidentă

$$\cos \chi' = c/2a. \quad (49)$$

Efectuînd calculele în (47), căpătăm

$$C = a^4 \left\{ \left[1 - 2(c/a)^2 - \frac{1}{2} (c/a)^4 \right] \chi' + \left[\frac{1}{2} (c/a) + \frac{7}{4} (c/a)^3 \right] \sin \chi' \right\}, \quad (50)$$

după care din (13.15) se calculează gradul de torsiune $\tau = \mathcal{M}_3/\mu C$.

Pentru a determina tensiunea tangențială, putem face uz de formula (13.6) și (44), sau de (14.5) și (45), de unde

$$T(\zeta, \bar{\zeta}) = -i\mu\tau [a(1 + c^2/\bar{\zeta}^2) - \zeta], \quad (51)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{31} &= \mu\tau \left[-x_2 + ac^2 \frac{2x_1x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} \right], \\ \sigma_{32} &= \mu\tau \left[-a + x_1 - ac^2 \frac{x_1^2 - x_2^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} \right]. \end{aligned} \quad (52)$$

Prezintă interes deosebit examinarea a două cazuri-limită: $c \rightarrow 0$ (disc circular cu o mică slăbire circulară pe frontieră — caz limită al barei cilindrice circulare cu un canal longitudinal circular), și $c \rightarrow 2a$ (lunulă circulară subțire).

În primul din acestea, din (49) deducem $\chi' \rightarrow \frac{1}{2}\pi$. Întrucît $c/2a = \cos \chi' = \sin \left(\frac{1}{2}\pi - \chi' \right) \cong \frac{1}{2}\pi - \chi'$, deducem

$$\chi' \cong \frac{1}{2}(\pi - c/a), \quad \sin \chi' = \sqrt{1 - \frac{1}{4}(c/a)^2} \cong 1 - \frac{1}{8}(c/a)^2. \quad (53)$$

Introducînd aceste valori în (50), constatăm că termenii liniari în c/a se reduc; neglijînd pe cei cubici și de grad superior, obținem

$$C \cong \frac{1}{2}\pi a^4 [1 - 2(c/a)^2]. \quad (54)$$

Prin urmare, dacă $c \rightarrow 0$, căpătăm pentru C tocmai valoarea cunoscută pentru cerc. O slăbire de forma considerată modifică deci numai cu puțin (și anume, cu termeni *patratici* în c/a față de unitate) mărimile cu caracter *global* C și τ .

Să considerăm acum tensiunile ce apar în cazul cercului (așadar să utilizăm funcțiile (46) în loc de (44), (45)):

$$T = -i\mu\tau(a - \zeta), \quad \sigma_{31} = -\mu\tau x_2, \quad \sigma_{32} = \mu\tau(-a + x_1). \quad (55)$$

Dacă raportul $c/|\zeta|$ este mic, diferența între soluțiile (51), (52) și (55) este de asemenea mică, și comparabilă cu *patratul* raportului $c/|\zeta|$ față de unitate. Prin urmare, influența unei slăbiri circulare pe frontieră asupra tensiunilor este și ea neglijabilă la oarecare distanță. Dimpotrivă, la distanță mică tensiunile se modifică sensibil, întrucît raportul $c/|\zeta|$ nu mai este neglijabil. În particular, luînd $\zeta = c \exp(i\chi)$, calculînd din (51) tensiunile pe frontieră, și făcînd apoi $c \rightarrow 0$, căpătăm

$$\lim_{c \rightarrow 0} T(c, \chi) = -i\mu\tau a [1 + \exp(2i\chi)] \quad (56)$$

(unde notația subliniază faptul că tensiunea depinde nu numai de punct, ci și de direcție), în timp ce pentru discul circular deducem

$$T(0) = -i\mu\tau a. \quad (57)$$

După cum se vede, pentru $\chi = \pm \pi/2$ (punctele unghiulare ieșinde ale frontierei) tensiunea tangențială se anulează. Dimpotrivă, pentru $\chi = 0$, ea este la limită cu 100% mai mare decât în cazul discului circular fără slăbire.

În consecință, o mică slăbire circulară pe frontieră (de ex., un canal de ungere al unui arbore) nu modifică sensibil nici parametrii *globali* (C și τ), și nici tensiunile la distanță destul de mare; în schimb, ea duce *local* la creșteri considerabile ale tensiunii, adică la o *concentrare a tensiunilor*, cu un coeficient de concentrare mergând pînă la valoarea 2. (Vezi și § 4.2, pag. 127). Exemplul simplu de față arată limpede primejdia fisurilor—chiar microscopice—în material, și importanța realizării unor conture *cît mai netede*, fără discontinuități ale tangentei (Vezi și exemplul *f*, pag. 259).

Explicația matematică a fenomenului în cazul considerat este legată de faptul că originea este un *pol* al funcției (44). Pentru $c \rightarrow 0$, termenul polar dispare din expresia ei — dar nu și din expresia tensiunii T , care depinde de *derivata* funcției (44) și în care, pentru $c \rightarrow 0$, $\beta \rightarrow 0$, obținem termeni suplimentari față de soluția corespunzătoare cazului $c = 0$.

În al doilea caz-limită, avem $c/2a \rightarrow 1$, așadar $\chi' \rightarrow 0$. Ținînd seama de (49), transcriind (50) sub forma

$$\begin{aligned} C &= a^4 [\chi' (1 - 8 \cos^2 \chi' - 8 \cos^4 \chi') + \sin \chi' (\cos \chi' + 14 \cos^3 \chi')] = \\ &= a^4 \left[\sin \chi' \left(\frac{23}{2} \cos \chi' + \frac{7}{2} \cos 3\chi' \right) - \chi' (6 + 8 \cos 2\chi' + \cos 4\chi') \right], \end{aligned} \quad (58)$$

și efectuînd dezvoltările în serie, obținem

$$C = \frac{64}{105} a^4 \chi'^7 + \dots, \quad (59)$$

unde am neglijat termenii de ordin superior. De aci rezultă că, chiar pentru valori nu prea mici ale unghiului χ' (sub $15^\circ \cong 0,3$ radiani), formula (50) își pierde precizia, și trebuie înlocuită cu (59). Asupra acestui rezultat vom reveni în § 16, exemplul *f*, pag. 271.

e) Dreptunghi

În unele cazuri (mai ales dacă frontiera este alcătuită din arce de ecuații destul de simple: drepte, arce de cerc) soluția problemei se poate obține prin separarea variabilelor și dezvoltări în serie, eventual după o schimbare convenabilă de coordonate.

Fie o bară de secțiune dreptunghiulară, avînd laturile de ecuații $x_1 = \pm a$, $x_2 = \pm b$, unde $b \leq a$. (Pentru soluția originală, vezi B. de Saint-Venant) [1], cap. 8.)

Căutînd funcția lui Prandtl sub forma

$$f(x_1, x_2) = \sum_{n=0}^{\infty} X_n(x_1) Y_n(x_2), \quad (60)$$

obținem ușor din ecuația (14.2)

$$\sum_{n=0}^{\infty} X_n''(x_1) Y_n(x_2) + \sum_{n=0}^{\infty} X_n(x_1) Y_n''(x_2) = -2. \quad (61)$$

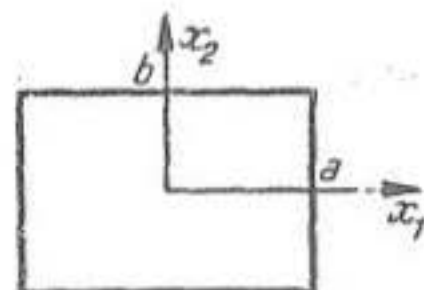


Fig. 5.15.3

Data fiind simetria secțiunii, funcția $f(x_1, x_2)$ trebuie să fie pară.

Să dezvoltăm membrul al doilea din (61) în serie Fourier în intervalul $-b \leq x_2 \leq b$. Pentru aceasta, considerăm funcția

$$h(x_2) = \begin{cases} 2 & \text{pentru } -2b \leq x_2 < -b, \quad b < x_2 \leq 2b, \\ -2 & \text{pentru } -b \leq x_2 \leq b, \end{cases} \quad (62)$$

pentru care obținem ușor dezvoltarea

$$h(x_2) = -\frac{8}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)} \cos \frac{2n+1}{2b} \pi x_2. \quad (63)$$

Notînd

$$\lambda_n = (2n+1) \lambda_0, \quad \lambda_0 = \pi/2b, \quad (64)$$

și alegînd în (60)

$$Y_n(x_2) = \cos \lambda_n x_2, \quad (65)$$

ceea ce asigură verificarea condiției $f(x_1, x_2)|_{\mathcal{L}} = 0$ pe laturile $x_2 = \pm b$ — obținem din (61) pentru $X_n(x_1)$ ecuația

$$X_n''(x_1) - \lambda_n^2 X_n(x_1) = -\frac{8}{\pi} \frac{(-1)^n}{2n+1}, \quad (66)$$

a cărei soluție generală are forma

$$X_n(x) = A_n \operatorname{ch} \lambda_n x_1 + B_n \operatorname{sh} \lambda_n x_1 + \frac{8}{\pi} \frac{(-1)^n}{2n+1} \lambda_n^{-2}. \quad (67)$$

Impunînd condiția $f(x_1, x_2)|_{\mathcal{L}} = 0$ și pe laturile $x_2 = \pm b$, obținem din (67)

$$A_n = -\frac{8}{\pi} \frac{(-1)^n}{2n+1} \frac{1}{\lambda_n^2 \operatorname{ch} \lambda_n a}, \quad B_n = 0. \quad (68)$$

În definitiv, am căpătat astfel funcția lui Prandtl sub forma

$$f(x_1, x_2) = \frac{32b^2}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} \left[1 - \frac{\operatorname{ch} \lambda_n x_1}{\operatorname{ch} \lambda_n a} \right] \cos \lambda_n x_2, \quad (69)$$

așadar o serie foarte rapid convergentă.

Pentru componentele tensiunii obținem din (69) și (14.5)

$$\begin{aligned} \sigma_{31} &= -\frac{16}{\pi^2} b\mu\tau \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \left[1 - \frac{\operatorname{ch} \lambda_n x_1}{\operatorname{ch} \lambda_n a} \right] \sin \lambda_n x_2, \\ \sigma_{32} &= \frac{16}{\pi^2} b\mu\tau \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \frac{\operatorname{sh} \lambda_n x_1}{\operatorname{ch} \lambda_n a} \cos \lambda_n x_2, \end{aligned} \quad (70)$$

astfel că pe frontieră, unde trebuie să apară tensiunile maxime, avem:

$$\sigma_{31}(\pm a, x_2) = 0, \quad \sigma_{32}(\pm a, x_2) = \pm \frac{16}{\pi^2} b\mu\tau \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \operatorname{th} \lambda_n a \cos \lambda_n x_2, \quad (71)$$

$$\sigma_{31}(x_1, \pm b) = \mp \frac{16}{\pi^2} b\mu\tau \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \left[1 - \frac{\operatorname{ch} \lambda_n x_1}{\operatorname{ch} \lambda_n a} \right], \quad \sigma_{32}(x_1, \pm b) = 0. \quad (72)$$

După cum era de așteptat, vectorul tensiune este dirijat după tangenta la \mathcal{L} .

Pentru a determina punctele în care apar tensiunile tangențiale maxime, să considerăm separat seriile din (71), (72).

Funcția $\operatorname{th} \xi$ tinde rapid către 1 pentru $\xi \rightarrow \infty$. Întrucît $a \geq b$, avem $\lambda_n a \geq \frac{1}{2}(2n+1)\pi$, de unde $\operatorname{th} \lambda_0 a \geq 0,917$ și $\operatorname{th} \lambda_n a \cong 1$ pentru $n \geq 1$. Așadar, din (71) obținem cu o bună aproximație

$$\sigma_{32}(a, x_2) \cong \frac{16}{\pi^2} b\mu\tau \left[\operatorname{th} \frac{\pi a}{2b} \cos \frac{\pi x_2}{2b} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \cos \lambda_n x_2 \right], \quad (73)$$

de unde pentru derivată:

$$[\sigma_{32}(a, x_2)]_{,2} \cong -\frac{8}{\pi} \mu\tau \left[\operatorname{th} \frac{\pi a}{2b} \sin \frac{\pi x_2}{2b} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \sin \lambda_n x_2 \right]. \quad (74)$$

Această funcție se anulează pentru $x_2 = 0$ (ca și derivata valorii exacte a tensiunii). Maximul tensiunii pe latura $x_1 = \pm a$ este deci atins pentru $x_2 = 0$:

$$\sigma_{32}(a, 0) \cong \frac{16}{\pi^2} b\mu\tau \left[\operatorname{th} \frac{\pi a}{2b} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \right]. \quad (75)$$

Pentru a calcula suma seriei din (75), amintim că

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} = G = 0,915965\dots \quad (76)$$

unde G este constanta lui Catalan (vezi de ex. I. Rijk și I. Gradshteyn [1], formula 0.234). Prin urmare, (75) devine

$$\sigma_{32}(a, 0) \cong \frac{16}{\pi^2} b \mu \tau \left[\operatorname{th} \frac{\pi a}{2b} - 0,084 \right]. \quad (77)$$

Pe de altă parte, din (72) deducem

$$[\sigma_{31}(x_1, b)]_{,1} = \frac{8}{\pi} \mu \tau \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \frac{\operatorname{sh} \lambda_n x_1}{\operatorname{ch} \lambda_n a}, \quad (78)$$

așadar o expresie ne-negativă, care se anulează numai pentru $x_1 = 0$. Întrucît avem

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)^{-2} = \frac{1}{8} \pi^2, \quad (79)$$

(vezi loc. cit.), deducem pentru maximul corespunzător

$$\sigma_{31}(0, b) = -2b \mu \tau \left[1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \frac{1}{\operatorname{ch} \lambda_n a} \right]. \quad (80)$$

Or, întrucît avem

$$\operatorname{ch} \lambda_0 a = \operatorname{ch} \frac{\pi a}{2b}, \quad \operatorname{ch} \lambda_1 a \geq \operatorname{ch} \frac{3}{2} \pi \cong 55, \quad \operatorname{ch} \lambda_2 a \geq \operatorname{ch} \frac{5}{2} \pi = 1286,$$

rezultă că

$$\sigma_{31}(0, b) \cong -2b \mu \tau \left[1 - \frac{8}{\pi^2} \frac{1}{\operatorname{ch}(\pi a/2b)} - \frac{8}{9\pi^2} \frac{1}{\operatorname{ch}(3\pi a/2b)} \right]. \quad (81)$$

Se constată ușor — cu gradul de aproximație acceptat în acest calcul — că avem $\sigma_{31}(0, b) \geq \sigma_{32}(a, 0)$. Pentru aceasta, trebuie să arătăm că

$$\frac{1}{8} \pi^2 - \frac{1}{\operatorname{ch}(\pi a/2b)} - \frac{1}{9 \operatorname{ch}(3\pi a/2b)} \geq \operatorname{th} \frac{\pi a}{2b} - 0,084.$$

(Întrucît $1 \geq \operatorname{th}(\pi a/2b) \geq 0,917$ și $\pi^2/8 = 1,2337$, ambele cantități sînt pozitive.) Obținem de aci

$$\operatorname{th} \frac{\pi a}{2b} + \frac{1}{\operatorname{ch}(\pi a/2b)} + \frac{1}{9 \operatorname{ch}(3\pi a/2b)} \leq 1,3177,$$

ceea ce conduce la condiția $\exp(\pi a/2b) \geq 4,825$, sau încă $\pi a/2b \geq 1,57$, așadar $a \geq b$, ceea ce este asigurat prin ipoteză.

Tensiunea tangențială maximă este deci atinsă în punctele $(0, \pm b)$, adică la mijlocul laturilor mari ale dreptunghiului. (Vezi și mai sus, pag. 241.) Valoarea tensiunii tangențiale maxime este deci dată de (81) — unde se poate renunța de altfel la al treilea termen.

Pentru rigiditatea geometrică la torsiune obținem din (14.23) și (69)

$$C = 2 \iint_D f(x_1, x_2) dD = \frac{16}{3} ab^3 \left[1 - \frac{192}{\pi^5 a} b \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{th} \lambda_n a}{(2n+1)^5} \right], \quad (82)$$

unde am ținut seama (vezi loc. cit.) că

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)^{-4} = \pi^4/96. \quad (83)$$

Pentru a determina componenta u_3 a deplasării, este necesară cunoașterea funcției $r(x_1, x_2)$. Introduscând (69) în relațiile (14.8), deducem mai întâi

$$r_{,1} = -\frac{16}{\pi^2} b \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \left[1 - \frac{\operatorname{ch} \lambda_n x_1}{\operatorname{ch} \lambda_n a} \right] \sin \lambda_n x_2 + x_2, \quad (84)$$

$$r_{,2} = \frac{16}{\pi^2} b \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \frac{\operatorname{sh} \lambda_n x_1}{\operatorname{ch} \lambda_n a} \cos \lambda_n x_2 - x_1. \quad (85)$$

Integrând relația (63) în raport cu x_2 pentru $-b \leq x_2 \leq b$, obținem

$$-2x_2 = -\frac{16}{\pi^2} b \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \sin \frac{2n+1}{2b} \pi x_2. \quad (86)$$

(Constanta de integrare este nulă). Utilizând (86) în (84), avem deci

$$r_{,1} = \frac{16}{\pi^2} b \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \frac{\operatorname{ch} \lambda_n x_1}{\operatorname{ch} \lambda_n a} \sin \lambda_n x_2 - x_2, \quad (87)$$

și relațiile (85) și (87) sau imediat

$$r(x_1, x_2) = -x_1 x_2 + \frac{32}{\pi^3} b^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} \frac{\operatorname{sh} \lambda_n x_1}{\operatorname{ch} \lambda_n a} \sin \lambda_n x_2. \quad (88)$$

Datorită prezenței factorilor $\operatorname{ch} \lambda_n a$, seriile ce intervin în calcule sînt atît de rapid convergente, încît putem reține numai primul lor termen.

Suma din (82) a fost calculată de Saint-Venant pentru diverse valori ale raportului b/a . Pentru $b/a < 1/3$, ea nu mai depinde practic vorbind de acest raport, și C are valoarea

$$C \cong \frac{16}{3} ab^3 [1 - 0,63 (b/a)]. \quad (89)$$

Pentru $b \ll a$, chiar și primii termeni din aceste serii sînt neglijabili, și obținem

$$C \cong \frac{16}{3} ab^3, \quad r(x_1, x_2) \cong -x_1 x_2, \quad \sigma_{31} = -2\mu\tau x_2, \quad \sigma_{32} \cong 0. \quad (90)$$

Celălalt caz-limită ($b = a$) este cel al pătratului. Din (82) urmează

$$C = \frac{16}{3} a^4 \left\{ 1 - 192 \pi^{-5} \left[\operatorname{th} \frac{1}{2} \pi + \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1)^{-5} \right] \right\}.$$

Ținând seama aci de valorile

$$\operatorname{th} \pi/2 = 0,9172, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1)^{-5} = 0,0046, \quad (91)$$

obținem

$$C = 2,249 a^4 = 0,1405 D^2 = 0,0234 (D^4/l_0). \quad (92)$$

f) Semicoroană circulară. Concentrarea tensiunilor

Problema poate fi studiată în mod analog, prin metoda separării variabilelor — dar de data aceasta în coordonate polare. În loc de (66) se obține o ecuație de tip Euler, astfel că locul liniilor hiperbolice este luat de termeni polinomiali în raport cu raza polară. (Vezi de ex. V. Novojilov [3], § 6.15.)

Vom utiliza aci variabilele complexe $\zeta, \bar{\zeta}$. Modul de rezolvare ales trebuie să slujească și mai departe, în problema încovoierii barei de profil în semicoroană (vezi § 20, exemplul g).

Fie dată o bară de secțiune \mathcal{D} în formă de jumătate de coroană circulară, de raze R_1 și R_0 . Vom folosi mărimile nul-dimensionale

$$R^* = R/R_0, \quad k = 1 - \varepsilon = R_1/R_0 < 1, \quad (93)$$

(ε fiind numită *grosimea redusă*) și funcțiile nul-dimensionale

$$f^*(R^*, \chi) = f(R, \chi)/R_0^2, \quad r^*(R^*, \chi) = r(R, \chi)/R_0^2. \quad (94)$$

Relațiile (14.21) vor fi transcrise sub forma

$$f_{,\chi\chi} = -\frac{1}{2}, \quad f|_{\mathcal{L}} = 0, \quad (95)$$

și vom căuta soluția f ca sumă a unei soluții particulare f_1 a acestei ecuații, cu soluția generală f_0 a ecuației omogene corespunzătoare. (Întrucât domeniul este simplu conex, notațiile f_0, f_1 nu pretează la confuzie.)

Întrucât f_0 este evident armonică și uniformă, este firesc să o căutăm sub forma

$$f_0 = \operatorname{Re} \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \zeta^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} R^n (b'_n \cos n\chi - b''_n \sin n\chi), \quad (96)$$

unde am notat $b_n = b'_n + ib''_n$.

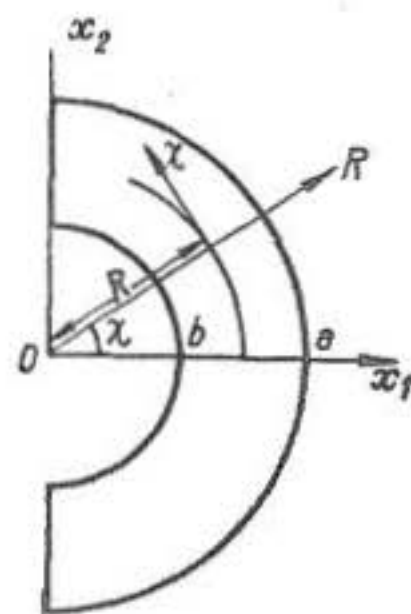


Fig. 5.15.4

Întrucît \mathcal{D} este simetric față de Ox_1 , ca și ecuația și condiția la limită (95), putem alege $f_0(-\chi) = f_0(\chi)$. Aceasta conduce la a lua $b_n'' = 0$; coeficienții b_n sînt deci *reali*, și (96) se reduce la

$$f_0 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n R^n \cos n\chi. \quad (97)$$

Condiția la limită (95) pe porțiunile rectilinii ale lui \mathcal{L} poate fi ușor satisfăcută pentru f_0 : întrucît pentru $x_1 = 0$ avem $\chi = \pm \pi/2$, urmează că

$$\cos n\chi \Big|_{x_1=0} = \cos \left(\frac{1}{2} n\pi \right) = \begin{cases} 0 & \text{pentru } n = 2h + 1, \\ (-1)^h & \text{pentru } n = 2h, \end{cases} \quad (98)$$

și deci, dacă luăm $b_{2h} = 0$, f_0 se scrie sub forma

$$f_0 = \sum_{h=-\infty}^{\infty} b_{2h+1} R^{2h+1} \cos (2h + 1)\chi = \frac{1}{2} \sum_{h=-\infty}^{\infty} b_{2h+1} (\delta^{2h+1} + \bar{\delta}^{2h+1}), \quad (99)$$

ceea ce asigură armonicitatea lui f_0 și verificarea condiției

$$f_0|_{x_1=0} = 0. \quad (100)$$

Prin urmare, soluția particulară f_1 trebuie să se anuleze și ea pentru $x_1 = 0$. Este evident că funcția $-\frac{1}{2} \delta \bar{\delta} = -\frac{1}{2} R^2$ este o soluție particulară a ecuației (95), care nu se anulează însă pentru $x_1 = 0$. Pentru a obține soluția căutată, trebuie să adăugăm acestei funcții, o funcție armonică și astfel aleasă încît suma ei cu funcția $-\frac{1}{2} R^2$ să se anuleze pentru $\chi = \pm \pi/2$. Aceasta sugerează să alegem

$$f_1 = -\frac{1}{2} R^2 (1 + \cos 2\chi) = -\frac{1}{2} \delta \bar{\delta} - \frac{1}{4} (\delta^2 + \bar{\delta}^2). \quad (101)$$

În felul acesta, sîntem conduși la a căuta f sub forma

$$\begin{aligned} f &= -\frac{1}{2} R^2 - \frac{1}{2} \left[R^2 \cos 2\chi + \sum_{h=-\infty}^{\infty} B_{2h+1} R^{2h+1} \cos (2h + 1)\chi \right] = \\ &= -\frac{1}{2} \delta \bar{\delta} - \frac{1}{4} \left[\delta^2 + \bar{\delta}^2 + \sum_{h=-\infty}^{\infty} B_{2h+1} (\delta^{2h+1} + \bar{\delta}^{2h+1}) \right], \end{aligned} \quad (102)$$

unde am notat $B_{2h+1} = -2b_{2h+1}$ și am strîns la un loc termenii armonici de forma $R^m \cos m\chi$.

Pentru a determina coeficienții B_{2h+1} , rămîne să ținem seama de condiția (95) pe cele două semicercuri-frontieră. Pentru $R = R_0$, $R = R_1$, avem deci

$$R^2(1 + \cos 2\chi) + \sum_{h=-\infty}^{\infty} B_{2h+1} R^{2h+1} \cos (2h+1)\chi = 0, \quad (103)$$

relație valabilă în intervalul $-\pi/2 \leq \chi \leq \pi/2$.

Pentru a obține de aici prin identificare valorile coeficienților B_{2h+1} , este suficient să dezvoltăm funcția $1 + \cos 2\chi$ în serie Fourier după multiplii impari ai lui χ . Întrucît funcțiile 1 și $\cos 2\chi$ sînt funcții coordonate ale sistemului trigonometric, o astfel de dezvoltare este desigur imposibilă în intervalul $[-\pi, \pi]$. Putem în schimb să considerăm funcțiile

$$h(\chi) = \begin{cases} -1 & \text{pentru } -\pi \leq \chi < -\pi/2, \pi/2 < \chi \leq \pi, \\ 1 & \text{pentru } -\pi/2 \leq \chi \leq \pi/2, \end{cases} \quad (104)$$

$$g(\chi) = \begin{cases} -\cos 2\chi & \text{pentru } -\pi \leq \chi < \pi/2, \pi/2 < \chi \leq \pi, \\ \cos 2\chi & \text{pentru } -\pi/2 \leq \chi \leq \pi/2. \end{cases} \quad (105)$$

Aceste funcții pot fi dezvoltate în serii Fourier în intervalul $[-\pi, \pi]$, iar suma celor două serii coincide în intervalul $[-\pi/2, \pi/2]$ cu funcția $1 + \cos 2\chi$.

Pentru funcția $h(\chi)$ avem evident din (62), (63) dezvoltarea

$$h(\chi) = \frac{4}{\pi} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(-1)^h}{2h+1} \cos (2h+1)\chi. \quad (106)$$

Pentru coeficienții Fourier g_m ai funcției $g(\chi)$ obținem mai întîi

$$\pi g_m = 2 \int_0^{\pi/2} \cos 2\chi \cos m\chi d\chi - 2 \int_{\pi/2}^{\pi} \cos 2\chi \cos m\chi d\chi. \quad (107)$$

Ținînd seama că $2 \cos 2\chi \cos m\chi = \cos (m+2)\chi + \cos (m-2)\chi$, obținem din (107) pentru $m \neq \pm 2$:

$$\pi g_m = 2 \left[\frac{\sin (m+2)\chi}{m+2} + \frac{\sin (m-2)\chi}{m-2} \right] \Big|_{\chi=\pi/2} \quad (108)$$

iar pentru $m = \pm 2$:

$$g_2 = 0. \quad (109)$$

Întrucît funcția $g(\chi)$ este pară, dezvoltarea în serie corespunzătoare nu conține termeni în sinus; din (108) urmează că coeficienții termenilor de indici pari sînt nuli. În definitiv avem deci

$$g(\chi) = \frac{2}{\pi} \sum_{h=0}^{\infty} (-1)^{h+1} \left(\frac{1}{2h+3} + \frac{1}{2h-1} \right) \cos(2h+1)\chi. \quad (110)$$

Cu aceasta deducem că în intervalul $[-\pi/2, \pi/2]$ avem dezvoltarea

$$1 + \cos 2\chi = \sum_{h=0}^{\infty} l_{2h+1} \cos(2h+1)\chi, \quad (111)$$

unde coeficienții l_{2h+1} se obțin din (106) și (110):

$$l_{2h+1} = -\frac{16}{\pi} (-1)^h \frac{1}{(2h-1)(2h+1)(2h+3)}, \quad h \geq 0. \quad (112)$$

Vom nota uneori acești coeficienți și cu

$$l_m = -\frac{16}{\pi} (-1)^{\frac{1}{2}(m-1)} \frac{1}{m(m^2-4)}, \quad m = 2h+1 > 0, \quad (113)$$

și vom remarca că

$$l_{-m} = l_m, \quad m > 0. \quad (114)$$

Introducînd acum (111) în (103), obținem prin identificare sistemul de ecuații (valabil pentru $m = 2h+1 > 0$):

$$R_0^m B_m + R_0^{-m} B_{-m} = -R_0^2 l_m, \quad R_1^m B_m + R_1^{-m} B_{-m} = -R_1^2 l_m, \quad (115)$$

a cărui soluție (pentru orice m impar, negativ sau pozitiv) este

$$B_m = -\frac{R_0^{m+2} - R_1^{m+2}}{R_0^{2m} - R_1^{2m}} l_m. \quad (116)$$

Făcînd uz de parametrul nul-dimensional k din (93), această soluție poate fi pusă și sub formele echivalente

$$B_m = -\frac{1 - k^{m+2}}{1 - k^{2m}} R_0^{-m+2} l_m, \quad B_m = -\frac{1 - k^{-m-2}}{1 - k^{-2m}} R_1^{-m+2} l_m, \quad (117)$$

dintre care prima este convenabilă pentru $m > 0$ (întrucît își păstrează sensul pentru $R_1, k \rightarrow 0$), iar a doua, pentru $m < 0$ (din același motiv).

Cu aceasta, funcția lui Prandtl este complet determinată:

$$f(R, \chi) = -\frac{1}{2} R^2 (1 + \cos 2\chi) + \frac{1}{2} \sum_{h=0}^{\infty} l_{2h+1} \times \\ \times \left[\frac{1 - k^{2h+3}}{1 - k^{4h+2}} R_0^{-2h+1} R^{2h+1} + \frac{1 - k^{2h-1}}{1 - k^{4h+2}} R_1^{2h+3} R^{-2h-1} \right] \cos(2h+1)\chi. \quad (118)$$

Sub formă complexă — utilă mai departe pentru determinarea tensiunii tangențiale complexe și a funcției $r(x_1, x_2)$, deci a deplasării u_3 — ea se scrie

$$f(\zeta, \bar{\zeta}) = -\frac{1}{2} \zeta \bar{\zeta} - \frac{1}{4} (\zeta^2 + \bar{\zeta}^2) + \frac{1}{4} \sum_{h=0}^{\infty} l_{2h+1} \left[\frac{1 - k^{2h+3}}{1 - k^{4h+2}} R_0^{-2h+1} \times \right. \\ \left. \times (\zeta^{2h+1} + \bar{\zeta}^{2h+1}) + \frac{1 - k^{2h-1}}{1 - k^{4h+2}} R_1^{2h+3} (\zeta^{-2h-1} + \bar{\zeta}^{-2h-1}) \right]. \quad (119)$$

În fine, folosind și (111), deducem (vezi (94)) expresia :

$$f^*(R^*, \chi) = \sum_{h=0}^{\infty} f_{2h+1}^*(R^*) \cos(2h+1)\chi, \\ f_{2h+1}^*(R^*) = -\frac{1}{2} l_{2h+1} \left[R^{*2} - \frac{1 - k^{2h+3}}{1 - k^{4h+2}} R^{*2h+1} - \frac{1 - k^{2h-1}}{1 - k^{4h+2}} k^{2h+3} R^{*-2h-1} \right], \quad (120)$$

utilă pentru determinarea rigidității geometrice la torsiune.

Introducând expresia (119) în formula (14.4), obținem ușor

$$T(\zeta, \bar{\zeta}) = -2i\mu\tau f_{,\bar{\zeta}} = i\mu\tau \left\{ \zeta + \bar{\zeta} - \frac{1}{2} \sum_{h=0}^{\infty} (2h+1) l_{2h+1} \times \right. \\ \left. \times \left[\frac{1 - k^{2h+3}}{1 - k^{4h+2}} R_0^{-2h+1} \bar{\zeta}^{2h} - \frac{1 - k^{2h-1}}{1 - k^{4h+2}} R_1^{2h+3} \bar{\zeta}^{-2h-2} \right] \right\}, \quad (121)$$

unde desigur putem pune în evidență, ca și în (120), parametrii nul-dimensionali R^* și k . Separând partea reală și cea imaginară, obținem componentele σ_{31} și σ_{32} .

Să considerăm în fiecare punct axele locale orientate după raza polară și tangenta la cercul $R = \text{const.}$ și să notăm cu \widehat{Rz} , respectiv $\widehat{\chi z}$ componentele tensiunii tangențiale în raport cu aceste axe (vezi și § 4.1, pag. 121). Din (11.15) obținem

$$\widehat{Rz} + i\widehat{\chi z} = [\exp(-i\chi)] T(\zeta, \bar{\zeta}). \quad (122)$$

Pentru determinarea componentei u_3 , este necesară cunoașterea funcției $r(x_1, x_2)$. Or, întrucât din (14.6) avem $f = t - \frac{1}{2} \zeta \bar{\zeta}$, conchidem că membrul al doilea din (119), cu excepția primului său termen, este pur și simplu $t = \text{Im } \psi(\zeta)$. Pentru partea reală a lui $\psi(\zeta)$ deducem prin urmare

$$r(\zeta, \bar{\zeta}) = -\frac{1}{4} i (\zeta^2 - \bar{\zeta}^2) + \frac{1}{4} i \sum_{h=0}^{\infty} l_{2h+1} \times \\ \times \left[\frac{1 - k^{2h+3}}{1 - k^{4h+2}} R_0^{-2h+1} (\zeta^{2h+1} - \bar{\zeta}^{2h+1}) + \frac{1 - k^{2h-1}}{1 - k^{4h+2}} R_1^{2h+3} (\zeta^{-2h-1} - \bar{\zeta}^{-2h-1}) \right], \quad (123)$$

sau încă

$$\begin{aligned} r(R, \chi) = & \frac{1}{2} R^2 \sin 2\chi - \frac{1}{2} \sum_{h=0}^{\infty} l_{2h+1} \left[\frac{1 - k^{2h+3}}{1 - k^{4h+2}} R_0^{-2h+1} R^{2h+1} - \right. \\ & \left. - \frac{1 - k^{2h-1}}{1 - k^{4h+2}} R_1^{2h+3} R^{-2h-1} \right] \sin (2h+1) \chi. \end{aligned} \quad (124)$$

Pentru a obține funcția de torsiune nul-dimensională din (94), vom remarca mai întâi că din (111) urmează prin derivare

$$\sin 2\chi = \frac{1}{2} \sum_{h=0}^{\infty} (2h+1) l_{2h+1} \sin (2h+1) \chi. \quad (125)$$

Introducând această dezvoltare în serie în (124), deducem

$$\begin{aligned} r^*(R^*, \chi) &= \sum_{h=0}^{\infty} r_{2h+1}^*(R^*) \sin (2h+1) \chi, \\ r_{2h+1}^*(R^*) &= \frac{1}{2} l_{2h+1} \left[\frac{2h+1}{2} R^{*2} - \frac{1 - k^{2h+3}}{1 - k^{4h+2}} R^{*2h+1} + \right. \\ & \quad \left. + \frac{1 - k^{2h-1}}{1 - k^{4h+2}} k^{2h+3} R^{*-2h-1} \right]. \end{aligned} \quad (126)$$

Pentru determinarea lui C este comodă utilizarea formulei (120). Făcând uz și de (14.23), obținem

$$\begin{aligned} C = 2 \iint_{\mathcal{D}} f(x_1, x_2) dD = 2 \sum_{h=0}^{\infty} \int_0^1 l_{2h+1} R_0^4 \left[R^{*3} - \frac{1 - k^{2h+3}}{1 - k^{4h+2}} R^{*2h+2} - \right. \\ \left. - \frac{1 - k^{2h-1}}{1 - k^{4h+2}} k^{2h+3} R^{*-2h} \right] dR^* \int_{\pi/2}^{\pi/2} \cos (2h+1) \chi d\chi \end{aligned}$$

de unde, după calcule elementare,

$$C = \frac{8}{\pi} R_0^4 \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(2h-1)^2 (1 + k^{4h+6}) - (2h+3)^2 k^4 (1 + k^{4h-2}) + 16 (2h+1) k^{2h+3}}{(2h-1)^2 (2h+1)^2 (2h+3)^2 (1 - k^{4h+2})}. \quad (127)$$

Ca și în problema lunulei circulare, prezintă interes examinarea cazurilor limită $k \rightarrow 0$ (semicerc cu o mică slăbire semicirculară pe frontieră, în origine) și cazul $k \rightarrow 1$ (semicoroană circulară cu pereți subțiri).

Soluția problemei semicercului se obține pornind tot de la forma (96) pentru soluția generală a ecuației omogene — luând însă aci $n \geq 0$, și reținând relația (103) numai pentru $R = R_0$, de unde deducem

$$B_{2h+1} = -R_0^{-2h+1} l_{2h+1}, \quad B_{-2h-1} = 0, \quad h \geq 0. \quad (128)$$

Or, aceleași valori se obțin drept caz limită din (117), dacă facem aci $R_1 \rightarrow 0$, $k \rightarrow 0$. Ca și în cazul lunulei, acest fapt nu permite totuși să identificăm soluția problemei semicercului, cu cea a semicercului cu o slăbire pe frontieră — din cauza apariției concentrării tensiunilor.

Pentru rigiditatea geometrică, făcând $k \rightarrow 0$ în (127), obținem

$$C|_{k=0} = \frac{8}{\pi} R_0^4 \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{(2h+1)^2 (2h+3)^2} = 0,2975 R_0^4. \quad (129)$$

Intrucît pentru semicerc avem

$$D = \frac{1}{2} \pi R_0^2, \quad x_1^0 = (4/3 \pi) R_0, \quad J_0 = \frac{1}{4} \pi R_0^4, \quad I_0 = (\pi/4 - 9/8 \pi) R_0^4 = 0,5021 R_0^4,$$

și aceste valori sînt evident valabile și în cazul-limită al semicoroanei pentru $k \rightarrow 0$, din (129) deducem

$$C = 0,1204 D^2 = 0,0245 (D^4/I_0). \quad (130)$$

Valoarea (129) coincide cu cea care se obține tratînd direct cazul semicercului. Prin urmare, existența unei slăbiri semicirculare de rază $R_1 \rightarrow 0$ în origine nu modifică valorile globale C sau τ .

Pentru a studia problema concentrării tensiunilor în vecinătatea originii, să calculăm $T(\zeta, \bar{\zeta})$ în punctul $\zeta = R_1 \exp(i\chi)$, și să facem apoi $R_1 \rightarrow 0$. Din (121) deducem ușor

$$\lim_{R_1 \rightarrow 0} T(R_1, \chi) = i\mu\tau \lim_{R_1 \rightarrow 0} \left\{ -\frac{1}{2} I_1 \left[R_0 - \frac{1-k^{-1}}{1-k^2} R_1^3 R_1^{-2} \exp(2i\chi) \right] \right\},$$

de unde (subliniind prin notație faptul că T depinde și de χ):

$$T(0, 0; \chi) = -(8/3 \pi) i\mu\tau R_0 [1 + \exp(2i\chi)]. \quad (131)$$

Folosind aceeași formulă pentru cazul semicercului, unde însă termenul ultim din paranteză nu apare, obținem valoarea (independentă de χ):

$$T(0, 0) = -(8/3 \pi) i\mu\tau R_0 = -2,8533 (\mathcal{M}_3/R_0^3). \quad (132)$$

(Pentru calculul coeficientului, am făcut uz și de (129).)

Deosebirea provine din existența termenilor polari corespunzători coeficienților $[(1-k^{2h-1})/(1-k^{2h+3})] R_1^{2h+3}$. Pentru $h > 0$, aportul lor e nul; pentru $h = 0$, termenul corespunzător dispare din expresia-limită a funcției lui Prandtl — dar nu și din cea a derivatei acesteia.

Comparînd (131) cu (132), rezultă că în timp ce pentru $\chi = \pm \pi/2$ (punctele unghiulare ieșinde ale frontierei) tensiunea tangențială se anulează, în schimb pentru $\chi = 0$ ea este cu 100% mai mare decît în cazul semicercului.

Fenomenul are un vizibil caracter local: pentru $R_1 \rightarrow 0$ și $|\zeta| > R_1$, în expresia funcției $T(\zeta, \bar{\zeta})$ rămîne același termen perturbator de mai sus, avînd în factor raportul $R_1^2/|\zeta|^2$ — care este mic, și descrește rapid.

În celălalt caz-limită ($\varepsilon \rightarrow 0$), vom calcula aci numai valoarea lui C . În acest scop, vom observa că, notînd numărătorul termenului general din (127) cu

$$c_h(k) = (2h-1)^2 (1+k^{4h+6}) - (2h+3)^2 k^4 (1+k^{4h-2}) + 16(2h+1)k^{2h+3}, \quad (133)$$

obținem pe rînd

$$c_h(1) = c'_h(1) = c''_h(1) = c'''_h(1) = 0, \quad c_h^{IV}(1) = 16(2h-1)^2 (2h+1) (2h+3)^2. \quad (134)$$

Dezvoltind expresia (127) în serie după puterile lui ε (așadar în vecinătatea lui $k = 1$) și făcând uz de (79), căpătăm

$$C = (8/3 \pi) R_0^4 \varepsilon^3 \sum_{h=0}^{\infty} (2h+1)^{-2} = \frac{1}{3} \pi R_0^4 \varepsilon^3. \quad (135)$$

g) Tabel comparativ

Pentru a încheia, prezentăm un tabel de rigidități geometrice la torsiune. (Vezi și G. Polya și G. Szegő[1], Anexe).

Prima coloană a tabelului evaluează rigiditatea C în funcție de aria D — așadar de cheltuiala de material. Se remarcă scăderea catastrofală a lui C în cazul dreptunghiului îngust. De asemenea se vede că sectorul circular cu deschidere de 360° (disc circular cu o fisură radială pînă în centru) rezistă cu mult mai slab solicitării decît discul nefisurat.

A doua coloană dă valorile coeficientului κ din (28), înmulțite cu $4\pi^2$. Faptul că aceste valori sînt apropiate de 1 confirmă utilitatea formulei aproximative (23). Faptul că ele sînt în general subunitare arată că formula (23) dă valori *mai mari* decît cele reale. Aceasta se explică prin prezența colțurilor (unghiurilor) ieșinde, în care tensiunile sînt nule (vezi § 16, pag. 266). A folosi formula (23) înseamnă — printre altele — a neglija efectul acestor colțuri, ceea ce conduce pentru M_3 (și deci și pentru C) la valori mai mari decît cele reale. Exemplul sectorului de 360° arată că formula nu poate fi în nici un caz folosită pentru secțiuni cu fisuri relativ adînci.

Secțiune	$2\pi C D^{-2}$	$4\pi^2 C I_0 D^{-4}$
Cerc	1,000	1,000
exagon regulat	0,964	0,972
patrat	0,883	0,925
triunghi echilateral	0,726	0,877
triunghi dreptunghi isoscel	0,656	0,916
triunghi dreptunghi cu un unghi de 30°	0,597	0,962
elipsă de semi-axe		
$b/a = 0,5$	0,800	1,000
$b/a = 0,1$	0,199	1,000
$b/a = 0,01$	0,020	1,000
dreptunghi de laturi		
$b/a = 0,5$	0,718	0,941
$b/a = 0,1$	0,196	1,038
$b/a = 0,01$	0,021	1,090
sector circular de deschidere		
30°	0,621	0,978
180°	0,758	0,970
360°	0,559	0,559

Cu privire la această tabelă, a se revedea și formulele (5), (39), (92), (130).

§ 16. ANALOGII MECANICE ALE PROBLEMEI TORSIUNII. EXEMPLE

Pentru indicații generale asupra analogiilor, vezi cele spuse în § 4.2, pag. 131. Cu referire specială la problema torsiunii, vezi încă N. Arutiunian și B. Abramian [1], §§ 1.8—1.9; C. Biezeno și R. Grammel [1], § 3.6; Th. Higgins [4]; P. Papkovici [4], §§ 13.1—13.5; I. Sokolnikoff [2], § 46; S. Timoshenko și J. Goodier [1], §§ 93, 99 și 100.

Pentru analogiile electrice, vezi Th. Higgins [6]. Aci, indicăm numai câteva exemple consacrate problemei torsiunii: E. Antonov [1]; N. Arutiunian și B. Abramian [1], § 1.10; C. Biezeno și R. Grammel [1], § 3.7; I. Blagoveșcenski și P. Filciakov [1]; I. Edamoto [1]; H. Nakazawa [1]; H. Nakazawa și T. Yatsuka [1]; L. Naumov și G. Stepanov [1]; P. Papkovici [4], § 13.6; K. Rushton [1]; N. Waner și W. Soroka [1]; J. Weiner [1]. Lucrările lui A. Ugodcikov [1], [2] se ocupă de determinarea electro-analogică a funcției ce realizează reprezentarea conformă a domeniului (simplu conex sau dublu conex) de studiat, cu aplicație la problema torsiunii.

Menționăm încă metodele optice de studiu al stării de tensiune în torsiune (evident, nu mai e vorba de analogii, ci de metode experimentale), expuse de exemplu de M. Frocht [1], volumul 2, capitolul 12. (Vezi încă și cap. 9, consacrat studiului reprezentării conforme.) În acest sens, vezi de exemplu M. Nisida și M. Hondo [1].

Punctul de plecare al oricărei analogii pentru problema torsiunii rezidă în faptul că funcțiile de torsiune depind numai de configurația secțiunii (vezi § 13). Vom prezenta întâi două analogii hidrodinamice, după care ne vom fixa atenția asupra analogiei membranei elastice, care prezintă cea mai mare importanță.

a) Analogia lui lord Kelvin și P. Tait ([1], pct. 704—705)

Să considerăm un tub cilindric de secțiune \mathcal{S} , umplut cu un fluid ideal. Rotind tubul cu o viteză unghiulară constantă ω în jurul axei longitudinale Ox_3 , obținem o mișcare irotatională a fluidului, având funcția de curent $t_1(x_1, x_2)$ care verifică ecuația

$$\Delta t_1 = 0 \quad (1)$$

și condiția la limită

$$t_1|_{\mathcal{S}} = -\frac{1}{2}\omega(x_1^2 + x_2^2) + \text{const.} \quad (2)$$

(vezi C. Iacob [5], §§ 7.3 și 7.8). Alegînd $\omega = -1$, funcția t_1 coincide cu funcția de torsiune conjugată pentru bara de secțiune \mathcal{S} (vezi (13.11)).

b) Analogia lui J. Boussinesq ([1], § 1.9)

Scurgerea laminară a unui fluid viscos incompresibil într-un tub cilindric de secțiune (simplu conexă) \mathcal{D} este descrisă de ecuația

$$\Delta u_3 = (1/\mu_0) p_{,3}, \quad (3)$$

unde u_3 este viteza în lungul axei Ox_3 , μ_0 este coeficientul de vîscozitate, iar $p_{,3}$ este căderea de presiune (constantă) în lungul tubului. (Vezi C. Iacob [5] § 4.36.)

Pe peretele tubului este satisfăcută condiția de aderență

$$u_3|_{\mathcal{L}} = 0. \quad (4)$$

Comparînd (3), (4) cu (14.21), constatăm că aceste relații coincid dacă luăm $p_{,3} = -2 \mu_0$.

c) Analogia membranei elastice (L. Prandtl [1])

Să considerăm o membrană flexibilă (așadar putînd prelua sarcini de întindere în planul ei, dar nu și sarcini de compresiune, sau de încovoare înafara acestui plan) de grosime constantă, ocupînd în planul Ox_1x_2 un domeniu simplu-conex \mathcal{D} . Să presupunem membrana fixată pe conturul \mathcal{L} , și solicitată de o sarcină normală uniform repartizată (constantă) Q . Sub acțiunea acestei sarcini, în membrană apar tensiuni de întindere S și deplasări normale w , acestea din urmă evident supuse condiției

$$w|_{\mathcal{L}} = 0. \quad (5)$$

Vom presupune că deplasările tangențiale sînt neglijabile, și că tensiunile S sînt constante în orice punct și după orice direcție. O astfel de stare este riguros realizată în membranele (filmele) de săpun, și cu satisfacătoare precizie și în membranele de cauciuc, mult mai ușor utilizabile în practică.

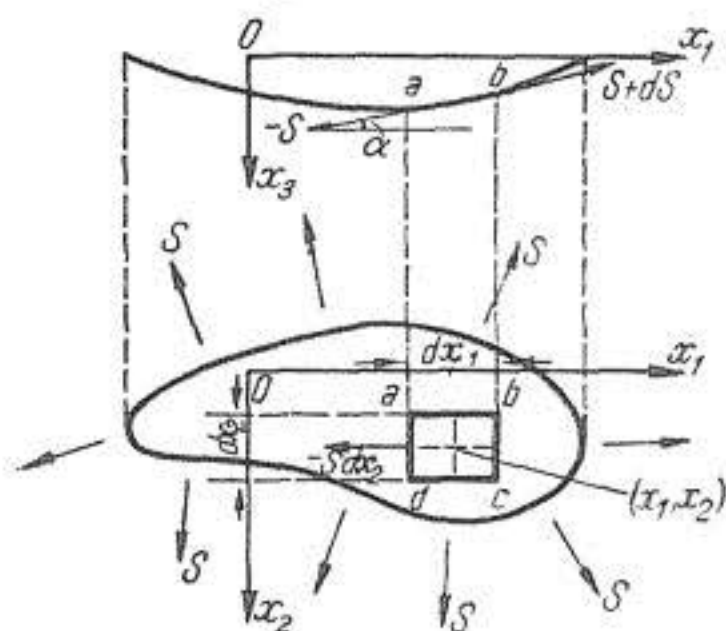


Fig. 5.16.1

cătoare precizie și în membranele de cauciuc, mult mai ușor utilizabile în practică.

Condiția de echilibru a unui element rectangular de laturi dx_1 , dx_2 se scrie ținînd seama numai de proiecția forțelor pe axa Ox_3 . Notînd cu α unghiul format de latura ab (sau cd) cu planul Ox_1x_2 , conchidem că proiecția pe Ox_3 a forței de întindere $-S dx_2$ ce lucrează pe latura ad este egală cu $S dx_2 \cos(\pi/2 - \alpha) = -S dx_2 w_{,1}$ (formulă valabilă pentru deplasări suficient de mici).

În mod analog obținem proiecțiile pe latura bc : $S dx_2 w_{,1} + (S dx_2 w_{,1})_{,1} dx_1$;

pe latura ab : $-S dx_1 w_{,2}$;

pe latura cd : $S dx_1 w_{,2} + (S dx_1 w_{,2})_{,2} dx_2$.

Condiția de echilibru conduce deci la ecuația

$$\Delta w = -Q/S. \quad (6)$$

Comparând (5), (6) cu (14.21), se vede că pentru $Q = 2S$, soluția w coincide cu funcția lui Prandtl pentru domeniul \mathcal{D} .

Așadar, pentru a rezolva problema torsiunii elastice¹¹⁾ pentru o bară de secțiune simplu-conexă \mathcal{D} , este suficient să fixăm o membrană pe conturul \mathcal{L} , să o supunem unei sarcini normale uniforme Q (de obicei, mărind presiunea de aer într-un dispozitiv închis, cu un cadru pe care poate fi fixată membrana), și să măsurăm deplasările w . Rezultă

$$f(x_1, x_2) = 2(S/Q) w(x_1, x_2). \quad (7)$$

Din (14.23) și (7) deducem pentru un domeniu simplu conex,

$$C = 4(S/Q) V, \quad (8)$$

unde V este volumul cuprins între planul Ox_1x_2 și membrana deformată.

Pentru a nu trebui să măsurăm sarcina Q și tensiunea S (necunoscută dinainte) este suficient ca în aparat să existe, pe lângă conturul \mathcal{L} de studiat, și un contur-etalon pentru care soluția exactă este cunoscută (un cerc). Folosind membrane din același material și asigurând aceeași presiune Q (prin comunicarea camerelor prin care se transmite presiunea), raportul Q/S se determină măsurând deplasările w pe membrana-etalon și comparând cu funcția $f(x_1, x_2)$ cunoscută pentru domeniul-etalon.

Pentru precizia măsurărilor, este în general util să modificăm prin omotetie secțiunea de studiat. Întrucât funcția lui Prandtl are dimensiunea L^2 , în urma transformării $\lambda x_1 = X_1$, $\lambda x_2 = X_2$, funcția $f(x_1, x_2)$ este înlocuită prin $\lambda^{-2} f(X_1, X_2)$. În acest caz, (7) se va scrie

$$f(x_1, x_2) = (2S/\lambda^2 Q) w(X_1, X_2), \quad (9)$$

iar (8) va deveni

$$C = (4S/\lambda^4 Q) V. \quad (10)$$

Materialul, dimensiunile domeniului, precum și presiunea trebuie alese în așa fel încât pantele să nu fie prea mari. (În caz contrar, derivatele funcției w din (6) trebuie înlocuite cu inversele razelor de curbură, și fenomenul nu mai este descris de ecuația lui Poisson.)

Pentru bibliografie, tehnica de lucru, și unele exemple, vezi de exemplu E. Nicolau [1].

Analogia membranei își păstrează valabilitatea în cazul unui domeniu multiplu-conex. În acest caz însă, constantele lui Prandtl trebuie cunoscute dinainte, pentru ca membrana să poată fi fixată la nivelul zero

¹¹⁾ Analogia membranei poate fi generalizată și pentru studiul torsiunii barelor anizotrope (W. Olszak [1]), și chiar a barelor în stare elasto-plastică (A. Nadai [1], cap.35).

pe conturul exterior, și la nivelele $(Q/2S) f_j$, deasupra planului Ox_1x_2 pe conturile interioare \mathcal{L}_j .

Aceste constante se obțin, în principiu, din (14.14). Pe cale experimentală, ele pot fi determinate dacă domeniile interioare \mathcal{D}_j^+ sînt acoperite cu discuri de marginea cărora este lipită membrana; aceste discuri se deplasează numai vertical, și efectul greutății lor trebuie anihilat. Pentru această tehnică, vezi de exemplu R. Mindlin și M. Salvadori [1].

În practică, se dovedește mai simplă o cale legată de reprezentarea (14.12) a soluției, și diferind de aceasta numai prin înlocuirea măsurilor armonice $b_j(x_1, x_2)$ din (14.10) prin niște funcții $c_j(x_1, x_2)$ care verifică aceleași condiții la limită (14.11), dar sînt soluții ale ecuației Poisson (6).

Anume, să căutăm funcția $w(x_1, x_2)$ sub forma

$$w(x_1, x_2) = \sum_{j=0}^m a_j c_j(x_1, x_2), \quad (11)$$

unde a_j sînt niște constante necunoscute, și unde

$$\Delta c_j(x_1, x_2) = -Q/S, \quad c_j(x_1, x_2)|_{\mathcal{L}_h} = a \delta_{jh}, \quad j, h = 0, 1, 2, \dots, m, \quad (12)$$

a fiind o constantă de care vom dispune din considerente experimentale.

Funcțiile $c_j(x_1, x_2)$ pot fi determinate experimental, fixînd toate conturile la nivelul zero, cu excepția conturului \mathcal{L}_j , care trebuie fixat la nivelul a . (Așadar, această constantă trebuie aleasă în așa fel încît pantele membranei să nu fie prea mari.) Totul revine deci la efectuarea măsurării cotelor pentru cele $(m+1)$ membrane auxiliare astfel considerate.

Introducînd acum (11) și (12) în (6), conchidem mai întîi că

$$\sum_{j=0}^m a_j = 1. \quad (13)$$

Introducînd (11) în formula lui Bredt (14.13) scrisă pentru cele m componente interioare ale frontierei, și ținînd seama de (7), obținem

$$\sum_{j=0}^m a_j \oint_{\mathcal{L}_h} c_{j,n} ds = -(Q/S) D_h, \quad h = 1, 2, \dots, m. \quad (14)$$

Întrucît funcțiile $c_j(x_1, x_2)$ sînt deja determinate experimental, derivatele lor normale în lungul tuturor componentelor \mathcal{L}_j și deci și integralele din (14), pot fi de asemenea calculate. Prin urmare, relațiile (13), (14) alcătuiesc un sistem de $m+1$ ecuații liniare algebrice pentru cele $m+1$ constante a_j .

Din (11) și (12) urmează deci pe frontieră

$$w(x_1, x_2)|_{\mathcal{L}_h} = a_h a, \quad h = 0, 1, 2, \dots, m, \quad (15)$$

și problema este redusă la rezolvarea ecuației (6) cu condițiile la limită (15). De altfel, noi măsurători nu mai sînt necesare: soluția este dată efectiv de (11).

După cum se vede din (15), pe \mathcal{L}_0 nu avem acum $w = 0$. Pentru a obține $f_0 = 0$, este suficient să scădem din toate constantele a_h aceeași cantitate a_0 .

Pentru \mathcal{D} dublu-conex, sistemul (13), (14) are forma

$$a_0 + a_1 = 1, \quad a_0 \oint_{\mathcal{L}_1} c_{0,n} ds + a_1 \oint_{\mathcal{L}_1} c_{1,n} ds = -(Q/S) D_1, \quad (16)$$

de unde urmează

$$a_0 = \frac{\oint_{\mathcal{L}_1} c_{1,n} ds + (Q/S) D_1}{\oint_{\mathcal{L}_1} c_{1,n} ds - \oint_{\mathcal{L}_1} c_{0,n} ds}, \quad a_1 = - \frac{\oint_{\mathcal{L}_1} c_{0,n} ds + (Q/S) D_1}{\oint_{\mathcal{L}_1} c_{1,n} ds - \oint_{\mathcal{L}_1} c_{0,n} ds},$$

sau încă, scăzând din a_1 pe a_0 și notînd cu a'_1 constanta obținută :

$$a'_1 = \left[2(Q/S) D_1 + \oint_{\mathcal{L}_1} c_{0,n} ds + \oint_{\mathcal{L}_1} c_{1,n} ds \right] : \left[\oint_{\mathcal{L}_1} c_{0,n} ds - \oint_{\mathcal{L}_1} c_{1,n} ds \right]. \quad (17)$$

Precizia rezultatului depinde în mare măsură de diferența de la numitorul din (17) : cu cît această diferență este mai mică, cu atît rezultatul este mai dubios. De aceea este de dorit ca una din integrale să fie nulă, sau cel puțin foarte mică — ceea ce se poate uneori realiza prin modificarea convenabilă a valorii a (vezi (12)), așadar ridicînd și coborînd nivelul discului interior pînă cînd constatăm că membrana este aproximativ *tangentă* la disc (și deci derivata normală $c_{1,n} \cong 0$ pe \mathcal{L}_1). În acest caz, (17) devine

$$a'_1 \cong 1 + 2Q : \left[S \oint_{\mathcal{L}_1} c_{0,n} ds \right]. \quad (18)$$

Pentru alte indicații referitoare la cazul domeniilor multiplu conexe, vezi și F. Klapetek [1]; P. Nemenyi [1].

Importanța practică a analogiei lui Prandtl este excepțională : măsurători (ușor de efectuat) ale deplasării w permit determinarea efectivă a funcției $f(x_1, x_2)$. Mai mult, simplul *aspect* al frontierei domeniului permite acum să tragem unele concluzii asupra solicitării barei torsionate.

În primul rînd, în § 14 am văzut că vectorul tensiune este definit de tangenta la liniile $f = \text{const.}$, și de gradientul $f_{,n}$. Dar liniile $f = \text{const.}$ sînt liniile de nivel ale membranei deformate, și gradientul (panta maximă) e dat de densitatea liniilor de nivel în vecinătatea punctului considerat. Prin urmare, *caracterul* repartiției tensiunilor poate fi imediat sesizat.

De exemplu, dacă curbele $f = \text{const.}$ sînt incluse unele în celelalte, avem întotdeauna $f_{,n} < 0$, și vectorul tensiune nu-și poate schimba sensul. (Astfel, pentru un moment de torsiune pozitiv, el este întotdeauna dirijat în sens direct.) Dimpotrivă, dacă apar bifurcații ale liniilor de nivel, vectorul tensiune își schimbă sensul. (Aceasta se petrece adesea în secțiuni multiplu conexe. Vezi de exemplu figura 5.16.12.)

Pentru secțiuni convexe, densitatea liniilor de nivel este de obicei minimă în vecinătatea unui anumit punct interior. În particular, dacă \mathcal{D} are două axe de simetrie, panta membranei este nulă la intersecția acestora. Întrucît tensiunea maximă apare pe frontieră, putem conchide că de obicei

materialul din interiorul lui \mathcal{D} „nu lucrează”, și deci este avantajos ca secțiunile masive să fie înlocuite cu secțiuni cu pereți subțiri. (Vezi și § 6, pag. 190; § 9, pag. 208)

Uneori, tensiunile se anulează și pe frontieră: de exemplu, densitatea liniilor de nivel pentru triunghiul echilateral tinde la zero în vecinătatea vîrfurilor sale. (Compară cu (15.35).) Mai general, orice punct unghiular ieșind este un punct de tensiune zero — căci vectorul tensiune trebuie să fie dirijat după tangenta la linia de nivel, iar această tangentă nu este aci unică.

Tensiunea maximală apare pe frontieră (vezi § 14, pag. 238). Este de așteptat ca adesea ea să apară în punctele *cele mai apropiate* de zona centrală a secțiunii — întrucît aci densitatea liniilor de nivel trebuie să fie maximă. (Vezi § 15, pag. 241 și 251 — cazul dreptunghiului și elipsei).

Analogia membranei arată de asemenea că pentru dreptunghi este imposibil să ne așteptăm la apariția altui punct de maxim pentru $\sigma_{32}(a, x_2)$, în afară de punctul $x_2 = 0$. Ca și în cazul triunghiului echilateral, tensiunile sînt nule în vîrfuri.

Caracterul general al fenomenului descris în § 15, pag. 248 și 259 poate fi acum cu ușurință explicat. Mici modificări ale frontierei nu alterează sensibil nici rigiditatea geometrică la torsiune (care este proporțional cu volumul acoperit de membrană), nici tensiunile la o distanță suficientă de zona acestei modificări (întrucît liniile de nivel rămîn aci practic intacte). În schimb, ele pot da mari concentrări de tensiuni, pentru că liniile de nivel pot fi puternic alterate *local*.

Raționamente de același tip rămîn valabile și pentru secțiuni multiplu-conexe. În particular, se poate urmări efectul deplasării spre \mathcal{D}_0 a vreuneia din componentele interioare ale frontierei (ceea ce duce inevitabil la apariția de concentrări de tensiuni), efectul apariției de fisuri ale secțiunii etc.

Exemple

d) Fisură rectilinie în lungul razei unei secțiuni circulare

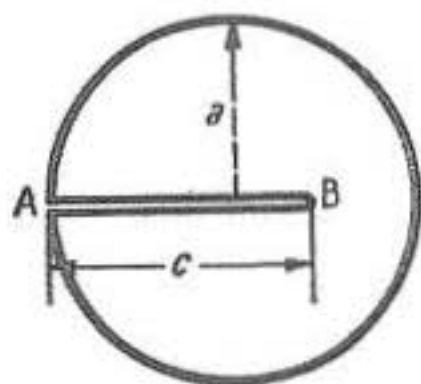


Fig. 5.16.2

Să considerăm secțiunea din figura 5.16.2. Frontiera ei este compusă dintr-un cerc de rază a , plus segmentul AB de lungime c . Acesta este un caz particular al problemei studiate de E. Șiriaev [1]. Măsurătorile necesare pentru analiza ce urmează au fost efectuate de E. Nicolau [2].

În figura 5.16.3 reproducem liniile de nivel pentru diferite adâncimi ale fisurii. (Linia punctată este „cumpăna apelor” pe suprafața membranei.)

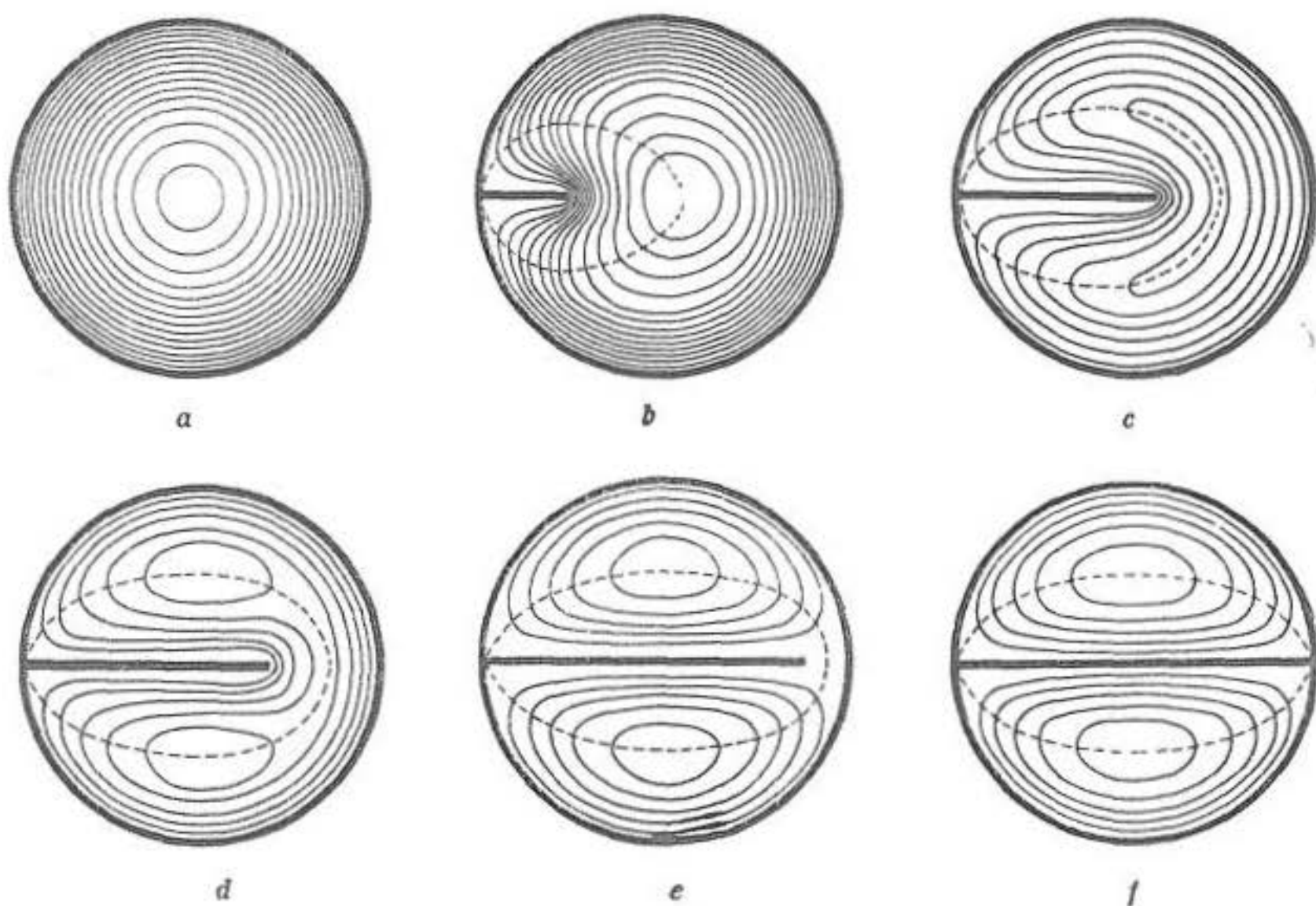


Fig. 5.16.3

Mai departe, în figura 5.16.4 este dată variația rigidității geometrice la torsiune (raportată la cea a secțiunii circulare $C_0 = \pi a^4/2$) ca funcție de adâncimea relativă c/a a fisurii.

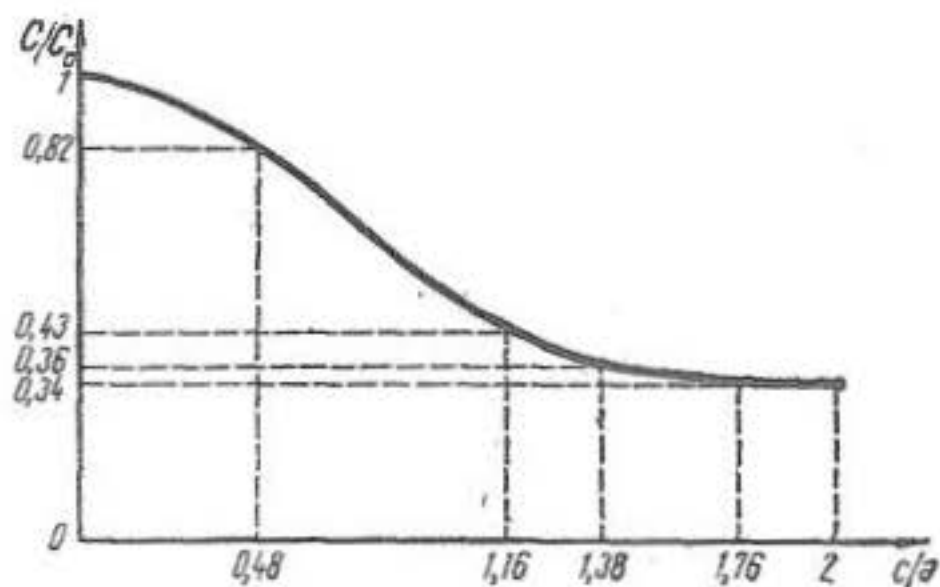


Fig. 5.16.4

În fine, în figura 5.16.5 se dă valoarea pantei α în vârful fisurii (raportată la panta α_0 pe frontiera discului circular în absența fisurii) ca funcție de c/a .

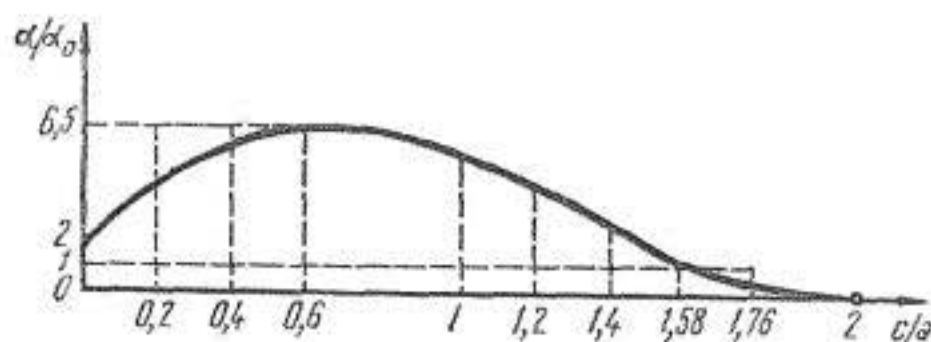


Fig. 5.16.5

Micșorarea numărului de linii de nivel pe măsură ce fisura avansează, arată că volumul acoperit de membrană (și deci și C) descrește, și deci τ (pentru un M_3 dat) crește. Pentru a evalua concentrarea de tensiuni efectivă, fenomenele descrise de figurile 5.16.4 și 5.16.5 trebuie suprapuse (prin multiplicare).

O fisură de adâncime $c = 0,48 a$ produce concentrări de tensiune considerabile, dar nu modifică sensibil rigiditatea C . Totuși (vezi configurația în potcoavă a liniilor de nivel în fig. 5.16.3, b , și c), bara începe să se comporte ca o bară în U (profil deschis cu pereți subțiri), cu o cu totul altă repartitie a tensiunilor decât în bara de secțiune circulară. (Vezi și mai departe exemplul j și ultima figură 5.16.19.)

În intervalul $c \in]0,48 a; 1,16 a[$, rigiditatea C descrește rapid. Această descreștere încetează practic vorbind pentru $c \geq 1,38 a$: în fapt, avem acum de-a face (chiar înainte de despicarea profilului) cu două bare de secțiune *semicirculară* care rezistă *separat* sarcinii. Valoarea experimentală finală a lui C este de 34% din cea inițială — și este ceva mai mică decât valoarea teoretică ce decurge din (15.129).

În ce privește concentrarea de tensiuni în vârful fisurii, se observă că pentru $c \rightarrow 0$, rigiditatea C este aceeași ca pentru discul circular; în schimb, $\alpha/\alpha_0 \rightarrow 2$. (Compară cu § 15, exemplul d .) Pentru $c = 0,6 a$, raportul α/α_0 își atinge maximul (egal cu 6,5), și tensiunea tangențială este de cca. 9 ori mai mare decât în discul fără fisură. Panta începe acum să scadă, dar coeficientul de concentrare a tensiunilor își menține un timp valoarea, întrucât C continuă să scadă. Pentru $c \geq 1,58 a$, raportul α/α_0 devine subunitar; aceasta se datorește faptului că tensiunile se comportă acum ca în vecinătatea unui punct unghiular ieșind.

Desigur, aceasta este numai o descriere *analogică* a înrăutățirii condițiilor de rezistență în bara fisurată. Pentru a înțelege semnificația mecanică a fenomenului, să considerăm o secțiune longitudinală *imaginară* ce trece prin axa Ox_3 , și să separăm — pentru claritate — bordurile sale, așa cum se vede în figura 5.16.6. Întrucât în bara de secțiune circulară tensiunile variază liniar (vezi (15.3)), teorema de reciprocitate (2.4.16) permite să obținem repartitia de tensiuni din figură. (Tensiunile tangențiale ce apar în secțiunile longitudinale au rolul de a deforma secțiunile normale în conformitate cu ipoteza de deplanare a lui Saint-Venant. În cazul de față, ele asigură conservarea configurației plane a acestor secțiuni.)

Dar dacă secțiunea longitudinală este o secțiune *reală*, cele două borduri ale ei aparțin suprafeței laterale *libere* ale barei, și tensiunile tangențiale corespunzătoare dispar. O parte din materialul barei încetează să lucreze, și condițiile de rezistență ale barei în ansamblu se înrăutățesc. Dispariția tensiunilor tangențiale longitudinale duce acum la deplanarea secțiunii circulare fisurate. Este vizibil că avem $u_3 < 0$ în acele puncte, *înspre* care se rotesc secțiunile normale. (Vezi și mai departe pag. 276.)

Cazul unei secțiuni circulare cu *două* fisuri radiale egale și opuse (pentru soluția teoretică, vezi E. Șiriae [2]) a fost studiat cu ajutorul unei analogii electrice de către K. Rushton [1].

e) Secțiune dreptunghiulară îngustă

Acesta este un caz particular al problemei din § 15, exemplul e. Îl vom examina aci pentru a pune în evidență posibilitățile de *calcul* sugerate de analogia membranei, și a compara cu soluția exactă.

Întrucât $b \ll a$, sub acțiunea sarcinii normale Q membrana va lua o formă aproape cilindrică — exceptînd vecinătatea laturilor mici ale dreptunghiului.

În primă aproximație, avem deci $w_{,1} \cong w_{,11} \cong 0$, astfel că ecuația (6) se reduce la

$$w_{,22} = -Q/S, \quad (19)$$

de unde urmează

$$w = (Q/2S) x_2^2 + \gamma x_2 + \delta. \quad (20)$$

Condiția la limită (5), din care nu mai putem reține decît

$$w|_{x_1 = +b} = 0, \quad (21)$$

permit să deducem din (20):

$$w = - (Q/2S) (x_2^2 - b^2). \quad (22)$$

Prin urmare, membrana ia forma unui cilindru parabolic de curbă directoare (22) avînd drept linii de nivel, liniile $x_2 = \text{const.}$ Din (7) și (22) avem acum soluția aproximativă

$$f(x_1, x_2) = b^2 - x_2^2. \quad (23)$$

Făcînd uz și de (14.26), tensiunea tangențială se obține sub forma

$$T(s) = -\mu\tau f_{,n} = 2\mu\tau x_2 = \sigma_{31}. \quad (24)$$

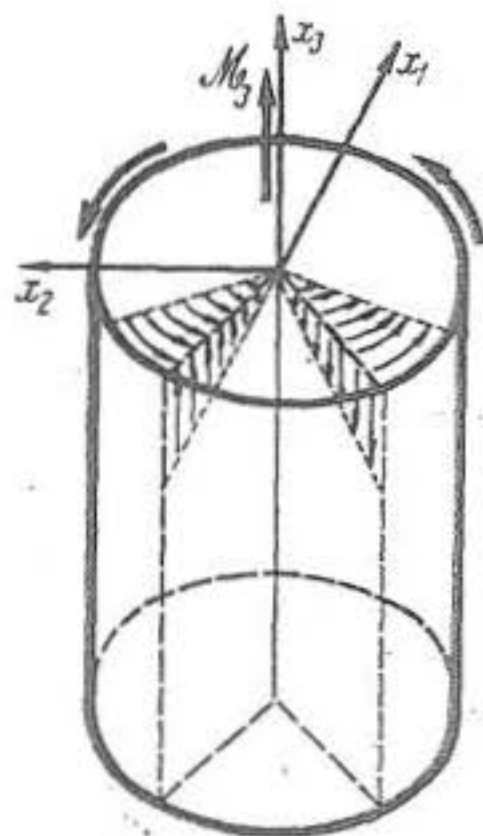


Fig. 5.16.6

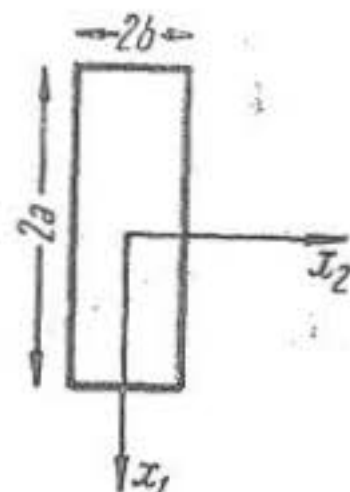


Fig. 5.16.7

După cum se vede, sintem conduși la a neglija componenta σ_{32} — ceea ce este îngăduit la distanță suficientă de laturile mici ale dreptunghiului.

Volumul V acoperit de membrană este produsul ariei A a segmentului de parabolă definit de (22), cu lungimea $2a$. Avem

$$A = -\frac{1}{2} (Q/S) \int_{-b}^{+b} (x_2^2 - b^2) dx_2 = -\frac{2}{3} (Q/S) b^3,$$

de unde, folosind și (8):

$$V = \frac{4}{3} (Q/S) ab^3, \quad C = \frac{16}{3} ab^3, \quad (25)$$

astfel că (13.15) devine

$$\mathcal{M}_3 = \frac{16}{3} \mu \tau ab^3. \quad (26)$$

Formulele (24) și (25) coincid cu formulele limită (15.90). Să remarcăm că dacă am calcula momentul \mathcal{M}_3 ținând seama de (24), am obține numai jumătate din valoarea corectă din (26):

$$\mathcal{M}_3 = \iint_{\mathcal{D}} x_2 \sigma_{31} dD = \frac{8}{3} \mu \tau ab^3. \quad (27)$$

Explicația acestei nepotriviri este simplă: volumul V este bine aproximat (cu un ușor exces) de prima expresia (25), în care se neglijează comportarea reală a membranei într-o porțiune ce contribuie numai cu puțin la valoarea totală a volumului real: în schimb, neglijând componenta σ_{32} în (27), neglijăm termeni de forma $x_1 \sigma_{32}$, în care tensiunile încetează de a fi neglijabile tocmai în vecinătatea laturilor mici ale dreptunghiului, așadar acolo unde variabila x_1 ia valori mari.

Acest exemplu ne arată că analogia lui Prandtl (ca orice analogie de altfel) trebuie folosită cu atenție. Ea va da întotdeauna o bună aproximare a gradului de torsiune (mărime cu caracter *integral*) și o aproximație mai puțin satisfăcătoare pentru componentele tensiunii (mărimi legate de *derivatele* funcției $f(x_1, x_2)$).

f) Bare cu pereți subțiri

Soluția problemei anterioare poate fi extinsă, ca primă aproximație, și la cazul altor secțiuni de formă alungită.

Astfel, pentru secțiunea din figura 5.16.8, vom alege drept linie x_1 , linia mediană (convenabil definită) a secțiunii. Soluția (23) rămâne desigur — din aceleași considerente mecanice — aproximativ valabilă, distanța b fiind acum o funcție $b(x_1)$. Întrucât coordonatele sînt curbilinii, ecuația (14.21) nu mai este riguros verificată — dar analogia membranei arată că această abatere nu are importanță esențială. Condiția la limită din (14.21) este verificată, cu excepția capetelor secțiunii.

Pentru rigiditatea geometrică la torsiune obținem din (14.23)

$$C = 2 \iint_D f(x_1, x_2) dD \cong 2 \left[\int_{x_1'}^{x_1''} b^2(x_1) dx_1 \int_{-b(x_1)}^{+b(x_1)} dx_2 - \right. \\ \left. - \int_{x_1'}^{x_1''} dx_1 \int_{-b(x_1)}^{+b(x_1)} x_2^2 dx_2 \right],$$

de unde urmează

$$C \cong \frac{8}{3} \int_{x_1'}^{x_1''} b^3(x_1) dx_1. \quad (28)$$

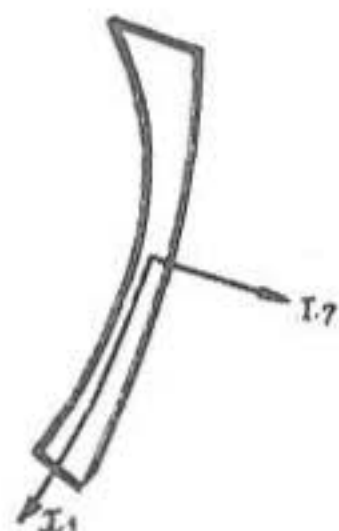


Fig. 5.16.8

Pentru $b(x_1) = \text{const.}$, $x_1' = -a$, $x_1'' = a$, aceasta coincide cu (25).

Pentru o justificare riguroasă a formulei (28), vezi A. Martin [1].

Ca exemplu, să considerăm cazul unei lunule subțiri a cărei frontieră se obține prin intersectarea a două cercuri definite prin razele lor și prin distanța centrelor (fig. 5.16.9). Trasând

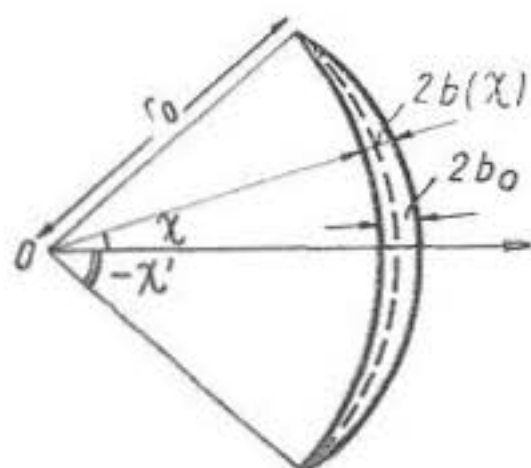


Fig. 5.16.9

cercul median — convenabil definit — al lunulei, determinăm centrul, raza sa r_0 , și unghiul de deschidere $2\chi'$ al lunulei. Vom nota cu a semi-lungimea medie desfășurată, și cu b_0 semi-grosimea maximă. Cunoscând razele și distanța centrelor, mărimile χ' , a , b_0 pot fi determinate exact — și reciproc. În practică, mărimile a , b_0 se măsoară direct, iar χ' se calculează ușor.

Funcția $b(\chi)$ poate fi și ea determinată exact, după calcule elementare, dar laborioase. O expresie aproximativă a ei se obține, ținând seama că b/b_0 este o funcție pară în χ , nulă pentru $\chi = \chi'$, și egală cu 1 pentru $\chi = 0$. Prin urmare, avem

$$a = r_0 \chi', \quad b(\chi) \cong b_0 [1 - (\chi/\chi')^2]. \quad (29)$$

Introducând (29) în (28), unde $x_1 = r_0 \chi$, obținem

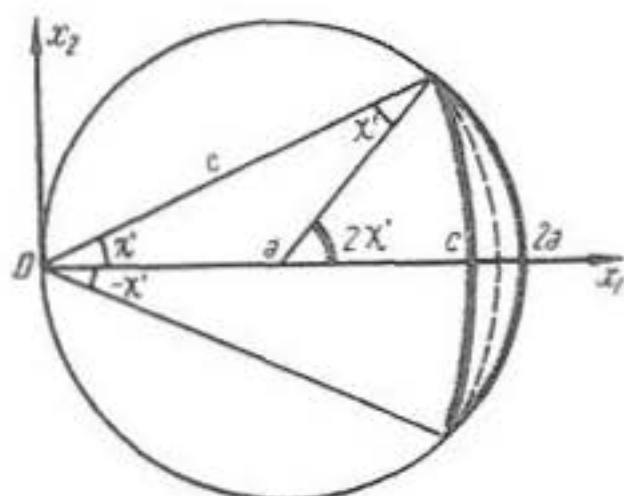


Fig. 5.16.10

$$C = \frac{8}{3} \int_{-\chi'}^{\chi'} b_0^3 [1 - (\chi/\chi')^2]^3 r_0 d\chi = \\ = \frac{256}{105} b_0^3 a. \quad (30)$$

În cazul particular (cercetat însă cu mijloace exacte) din § 15, d, am obținut pentru C expresia (15.59) (notațiile diferă!). Comparând figurile 5.15.2

și 5.16.10, obținem pentru semi-lungimea medie a (în notațiile din § 15) valoarea $2a\chi'$, iar pentru semi-grosimea maximă, valoarea $b_0 = \frac{1}{2} (2a - c) = a(1 - \cos \chi') \cong \frac{1}{2} a \chi'^2$, astfel că formula (30) coincide cu (15.59).

Exemplul confirmă desigur utilitatea formulei aproximative (28).

g) Secțiuni compuse

Analogia membranei permite înțelegerea calitativă a comportării barelor a căror secțiune este alcătuită prin juxtapunere de domenii. Studiul exact al problemei îi este consacrată o vastă literatură. (Pentru detalii, vezi mai departe § 18, pag. 301.)

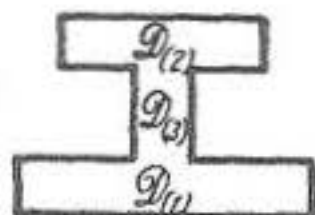


Fig. 5.16.11

Să considerăm ca exemplu o secțiune în I, compusă din dreptunghiuri înguste. Vom folosi notațiile $\mathcal{D}_{(i)}$ pentru componentele dreptunghiulare ale secțiunii. Conform formulei (8), avem în primă aproximație $\mathcal{C} \cong \mathcal{C}_{(1)} + \mathcal{C}_{(2)} + \mathcal{C}_{(3)}$ sau încă, ținând seama de (25) :

$$\mathcal{C} \cong \frac{16}{3} \sum_{i=1}^3 a_i b_i^3, \quad (31)$$

unde $2b_i$ sînt înălțimile dreptunghiurilor. Se vede limpede că, la oarecare distanță de frontierele comune ale domeniilor $\mathcal{D}_{(i)}$, tensiunile rămîn aproximativ aceleași în \mathcal{D} ca în fiecare din subdomeniile $\mathcal{D}_{(i)}$ în parte (pentru același τ). Modificări se constată numai în punctele de „lipire” a domeniilor, și au caracterul unor concentrări locale de tensiuni.

Din (31) rezultă că profilele deschise cu pereți subțiri (așadar cu secțiuni simplu conexe și cu pereți subțiri, putînd fi întotdeauna approximate prin juxtapunere de dreptunghiuri) rezistă slab la torsiune. În fapt, tocmai pentru astfel de profile capătă deosebită importanță fenomenul de torsiune împiedicată: tensiunile normale ce apar atunci constituie o importantă sursă suplimentară de rezistență a barei.

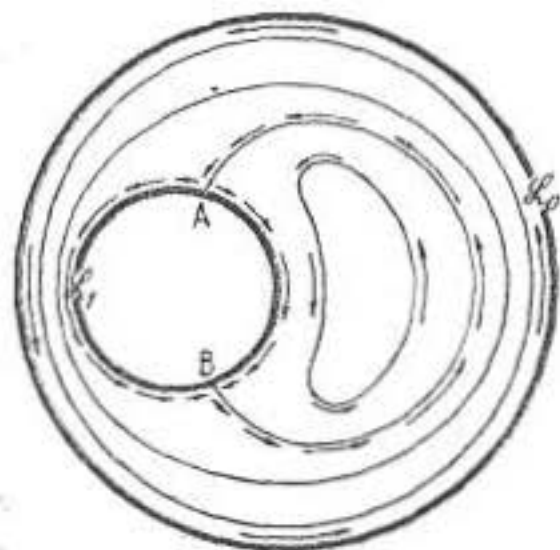


Fig. 5.16.12

h) Coroană circulară excentrică

Soluția exactă a problemei este dată în § 18, exemplul e. Dacă se determină liniile de nivel corespunzătoare, se vede că pe măsură ce componenta interioară a frontierei se deplasează spre cea exterioară, apar concentrări de tensiuni și numărul de linii de nivel scade.

Un caz posibil, prezentat pe figura 5.16.12, arată prezența unei linii de nivel bifurcate. Vectorul tensiune are sensul indicat de săgeți. În punctele A și B, tensiunea schimbă de sens pe \mathcal{L}_1 , trecînd prin zero.

i) Secțiuni multiplu conexe cu pereți subțiri

Determinarea constantelor lui Prandtl poate fi ușor realizată în cazul barelor cu pereți subțiri.

Să considerăm (pentru simplitate) o bară de secțiune dublu conexă. Să notăm cu $2h$ distanța (variabilă) între curbele \mathcal{L}_0 și \mathcal{L}_1 , măsurată de exemplu după normala interioară la \mathcal{L}_0 . În acest caz relația (14.18) se scrie

$$C = 2f_1 D_1 + 2 \iint_{\mathcal{D}} f(x_1, x_2) dD. \quad (32)$$

Întrucât grosimea $2h$ este mică, analogia membranei ne permite să presupunem că funcția lui Prandtl variază liniar după direcția normalei interne la \mathcal{L}_0 . (O lege parabolică nu modifică cu mult rezultatul). Dacă notăm cu \mathcal{L}' locul geometric (convenabil definit) al punctelor egal depărtate de \mathcal{L}_0 și \mathcal{L}_1 , avem

$$f|_{\mathcal{L}'} \cong \frac{1}{2} f_1, \quad f_{,n}|_{\mathcal{L}'} = -\frac{1}{2} f_1/h, \quad (33)$$

unde n este normala externă la \mathcal{L}' . Făcînd uz de formula lui Bredt (14.13) pe \mathcal{L}' , obținem

$$f_1 \oint_{\mathcal{L}'} h^{-1} ds = 4 D', \quad (34)$$

unde $D' = D_1 + \frac{1}{2} D$ este aria mărginită de \mathcal{L}' . Din (34) căpătăm astfel pe f_1 .

Mai departe, ținînd seama de (33) în (32), obținem

$$C = 2 f_1 D_1 + f_1 \iint_{\mathcal{D}} dD = 2 f_1 D', \quad (35)$$

astfel că (13.15) dă pentru momentul de torsiune expresia

$$\mathcal{M}_3 = 2 \mu \tau f_1 D'. \quad (36)$$

Utilizînd și (34), căpătăm astfel

$$\tau = (\mathcal{M}_3 \oint_{\mathcal{L}'} h^{-1} ds) : 8 \mu (D')^2. \quad (37)$$

Într-un astfel de calcul nu poate fi vorba de determinarea tensiunilor tangențiale, ci numai a unor valori medii ale lor, ceea ce se obține ușor din (14.26), (33) și (36):

$$T(s) = -\mu \tau f_{,n} \cong \mu \tau (f_1/2h) = \mathcal{M}_3/4h D'. \quad (38)$$

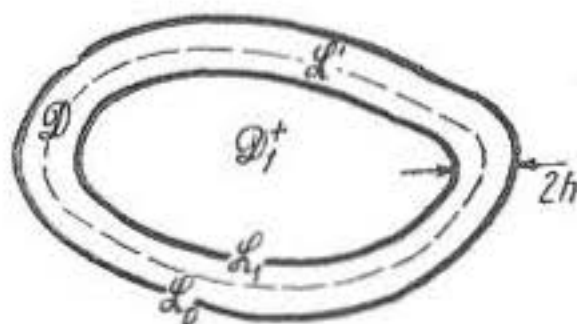


Fig. 5.16.13

Pentru secțiuni de un ordin de conexiune mai înalt, raționamentul rămâne în principiu același. Exemple de acest fel sînt date de pildă de Chi-Teh Wang [1], § 5.6; A. Föppl și L. Föppl [1], §§ 70—72; P. Papkovici [4], § 7.11; S. Timoshenko și J. Goodier [1], §§ 101, 102. Indicații bibliografice asupra puțin numeroaselor soluții exacte sînt date de I. Sokolnikoff [2], § 47.

j) Secțiuni simplu conexe și multiplu conexe

Analogia membranei permite să înțelegem comportarea complet diferită a barelor de secțiune simplu conexă, respectiv multiplu conexă, supuse la torsiune liberă. Pentru a simplifica raționamentele, vom consi-

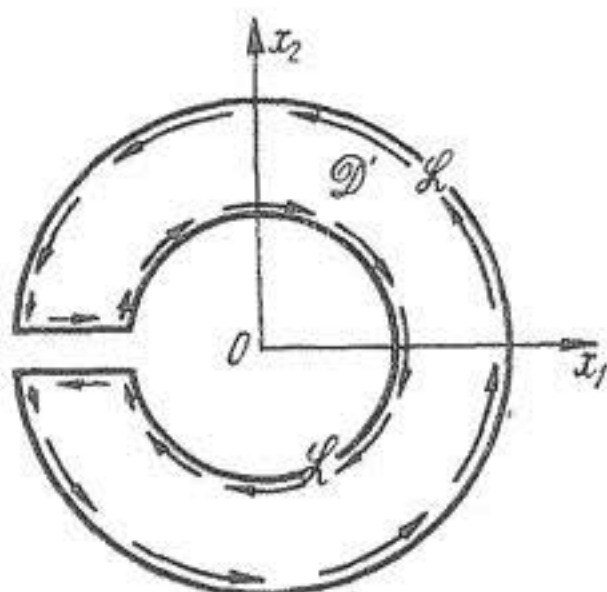


Fig. 5.16.14

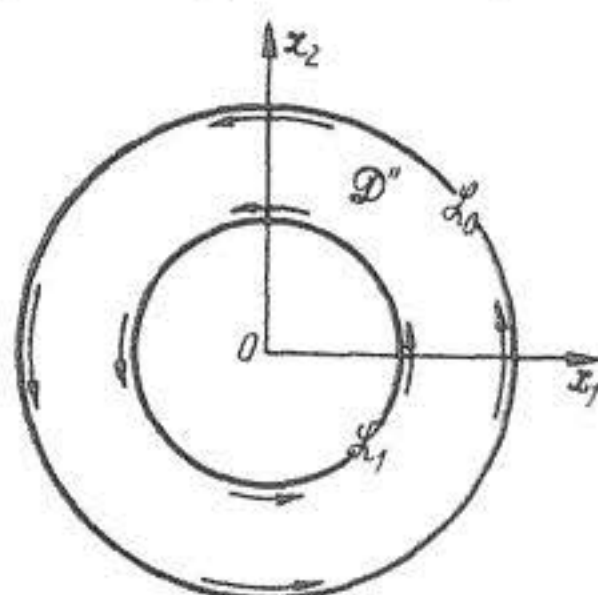


Fig. 5.16.15

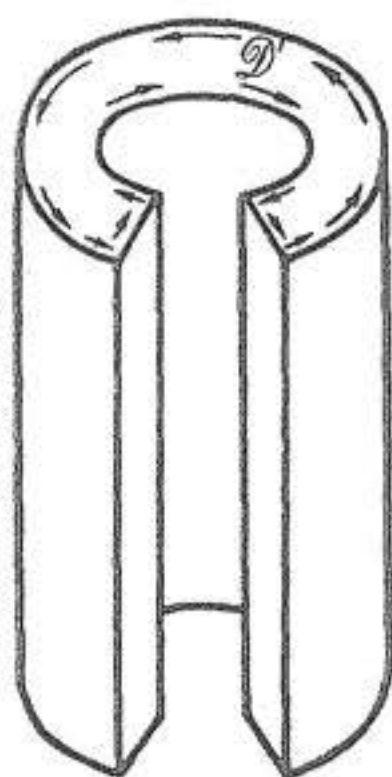


Fig. 5.16.16

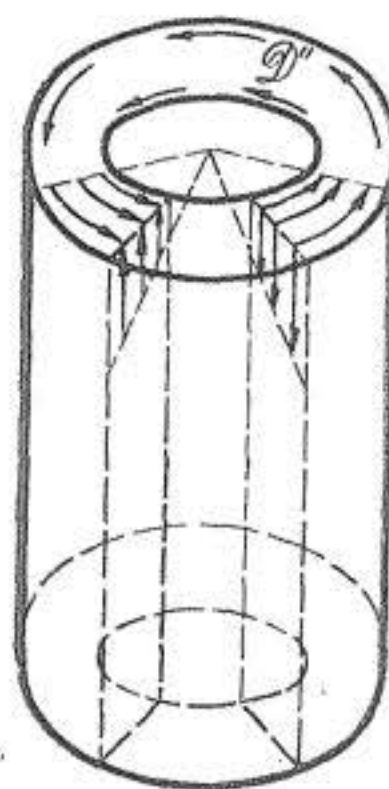


Fig. 5.16.17

dera o coroană circulară (de raze $R_1 < R_0$) cu o fisură radială completă și aceeași coroană circulară, fără fisură. Prima este un domeniu simplu conex \mathcal{D}' , iar a doua un domeniu dublu conex \mathcal{D}'' (vezi fig. 5.16.14—5.16.17).

În cazul ('), avem $f|_{\mathcal{L}} = 0$. În cazul ("), avem $f|_{\mathcal{L}_0} = 0$, $f|_{\mathcal{L}_1} = f_1 > 0$. Vectorul tensiune fiind dirijat după tangenta la liniile $f = \text{const.}$, urmează că tensiunile pe frontieră sînt dirijate după cum arată săgețile din figură, așadar în mod esențial diferit în cele două cazuri.

În figura 5.16.17 (care e similară cu 5.16.6), tensiunile tangențiale pe secțiunile longitudinale imaginare mențin secțiunile normale în forma lor plană inițială. În schimb din figura 5.16.16 este vizibil că trebuie să se manifeste deplanarea secțiunilor; deplasarea longitudinală u_3 va fi negativă pe bordul superior al fisurii (în lungul semiaxei negative Ox_1 din fig. 5.16.14), și pozitivă pe bordul ei inferior.

Argumentele referitoare la înrăutățirea condițiilor de rezistență (pag. 269) își păstrează valabilitatea. Pe lângă aceasta, din considerente evidente de continuitate, este limpede că tensiunile vor fi nule undeva în lungul unei linii din interiorul lui \mathcal{D}' — și deci materialul corespunzător nu va „lucra”. (Vezi și § 6, pag. 190.)

Să calculăm acum rigiditatea C cu ajutorul formulei (14.18) — unde în primul caz avem $m = 0$, iar în al doilea, $m = 1$. Integrala este proporțională cu volumul acoperit de membrană; aceasta din urmă satisface în primul caz condiția $w|_{\mathcal{L}} = 0$, iar în al doilea, condițiile $w|_{\mathcal{L}_0} = 0$, $w|_{\mathcal{L}_1} = w_1 > 0$.

În cazul ('), acest volum este aproximativ egal cu cel acoperit de o membrană dublu conexă, ce satisface însă condițiile $w|_{\mathcal{L}_0} = w|_{\mathcal{L}_1} = 0$. Îl vom determina, integrînd ecuația $\Delta f = -2$, și presupunînd că forma membranei nu depinde de unghiul polar χ . În coordonate polare (vezi (A.4.11) pentru $\partial/\partial\chi = 0$), deducem

$$f(R) = -\frac{1}{2} R^2 + \gamma \ln(R/R_0) + \delta, \quad (39)$$

unde termenul logaritmîc este scris sub o formă care nu depinde de alegerea unității de măsură. (Spre deosebire de cele spuse în observația din § 15, pag. 239, o astfel de soluție este acum justificată, întrucît facem uz de ea pentru domeniul \mathcal{D}' , care este în fapt simplu conex.)

Impunînd în general condițiile $f(R_0) = 0$, $f(R_1) = f_1$, deducem din (39):

$$\gamma = [2f_1 - (R_0^2 - R_1^2)] : 2 \ln(R_1/R_0), \quad \delta = \frac{1}{2} R_0^2. \quad (40)$$

Întrucît în cazul (') avem $f_1 = 0$, soluția (39) se scrie

$$f^{(')} = \frac{1}{2} (R_0^2 - R^2) - [(R_0^2 - R_1^2)/2 \ln(R_1/R_0)] \ln(R/R_0). \quad (41)$$

În cazul (") putem face uz de formula (34), care ne dă $f_1 = \frac{1}{2} (R_0^2 - R_1^2)$ (ceea ce coincide de altfel cu valoarea exactă, după cum urmează din (15.2)); astfel obținem

$$f^{(n)} = \frac{1}{2} (R_0^2 - R^2), \quad (42)$$

așadar chiar funcția lui Prandtl (soluția exactă) pentru \mathcal{D}'' (vezi (15.2)).

Trecînd la calculul deplasărilor, constatăm evident că $r^{(n)} \equiv 0$. Pentru cazul ('), avem mai întîi din (14.6)

$$t(x_1, x_2) = f + \frac{1}{2} R^2 = \gamma \ln(R/R_0) + \frac{1}{2} R_0^2,$$

și deci

$$\psi(\beta) = r(x_1, x_2) + i\gamma \ln(R/R_0) + \frac{1}{2} i R_0^2,$$

ceea ce conduce la expresiile

$$\psi^{(')}(\beta) = i\gamma' \ln(\beta/R_0) + \frac{1}{2} i R_0^2, \quad r^{(')}(\beta) = -\gamma' \chi, \quad \gamma' = -(R_0^2 - R_1^2)/2 \ln(R_1/R_0). \quad (43)$$

OBSERVAȚIE. Aceleași relații aproximative pot fi utilizate cu succes chiar și pentru semicoroana circulară cu pereți subțiri. Astfel, luînd $R_0 = 1$, $R_1 = 0,9$, din (15.123) obținem $r(1, \pm \pi/2) = \mp 1,41$ (unde am reținut 4 termeni ai seriei). Or, soluția aproximativă (43) dă *exact* același rezultat. (Subliniem că nu este vorba de o comparare numai a parametrilor globali!) În particular, este vizibil că pentru $x_1 > 0$ și $M_3 > 0$, căpătăm $u_3 < 0$ — după cum era de așteptat.

Considerînd mărimile nul-dimensionale R^* , k , ε din (15.93) și funcția lui Prandtl nul-dimensională (15.94), care se scrie acum

$$f^*(R^*) = f(R)/R_0^2, \quad (44)$$

obținem din (41), (42)

$$f_{(')}^* = \frac{1}{2} (1 - R^{*2}) - [(1 - k^2)/2 \ln k] \ln R^*, \quad f_{(n)}^* = \frac{1}{2} (1 - R^{*2}). \quad (45)$$

Să calculăm pentru ambele variante integrala

$$H = \iint_{\mathcal{D}} f(x_1, x_2) dD = 2\pi R_0^4 \int_k^1 f^*(R^*) R^* dR^*. \quad (46)$$

În cazul coroanei circulare deducem imediat

$$H'' = \frac{1}{4} \pi R_0^4 (1 - k^2)^2 = \pi R_0^4 \varepsilon^2 \left(1 - \varepsilon + \frac{1}{4} \varepsilon^2 \right). \quad (47)$$

Ținînd seama că în general

$$\int x^n \ln x dx = x^{n+1} \left[\frac{\ln x}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2} \right], \quad (48)$$

obținem

$$\int_k^1 R^* \ln R^* dR^* = -\frac{1}{4} [1 + k^2 (2 \ln k - 1)] \cong -\frac{1}{2} \varepsilon^2 \left(1 - \frac{1}{3} \varepsilon - \frac{1}{12} \varepsilon^2 \right). \quad (49)$$

Întrucît din (43) urmează

$$\gamma' \cong -R_0^2[(1-k^2)/2\ln k] \cong R_0^2\left(1 - \varepsilon + \frac{1}{6}\varepsilon^2\right), \quad (50)$$

deducem

$$H' = H'' + 2\pi R_0^2 \gamma' \int_k^1 R^* \ln R^* dR^* = \frac{1}{3} \pi R_0^4 \varepsilon^3 \left(1 - \frac{1}{2}\varepsilon\right). \quad (51)$$

În definitiv, avem deci

$$\begin{aligned} C' &= 2 H' = \frac{2}{3} \pi R_0^4 \varepsilon^3 \left(1 - \frac{1}{2}\varepsilon\right), \\ C'' &= 2 H'' + 2f_1 D_1 = 2\pi R_0^4 \varepsilon \left(1 - \frac{3}{2}\varepsilon + \varepsilon^2\right), \end{aligned} \quad (52)$$

unde C'' coincide cu valoarea exactă ce rezultă din (15.4).

Așadar, mărimea C' are în factor pe ε^3 ; mărimea H'' , pe ε^2 ; iar C'' , pe ε . Prin urmare, profilul închis \mathcal{D}'' rezistă cu mult mai bine nu numai din cauză că volumul H'' e mult mai mare decît volumul H' , ci *mai ales* datorită prezenței termenului $f_1 D_1$. (Desigur, și acest din urmă termen tinde la zero odată cu ε .)

Lucrurile se petrec deci ca și cum orificiul \mathcal{D}_1^+ participă (și joacă chiar rolul esențial) în rezistența la solicitare. Același orificiu, deschis spre exterior, încetează de a participa la rezistență, și provoacă o redistribuire nefavorabilă de tensiuni în material, care face ca valoarea f_1 să cadă la zero, iar valoarea volumului H'' , la H' .

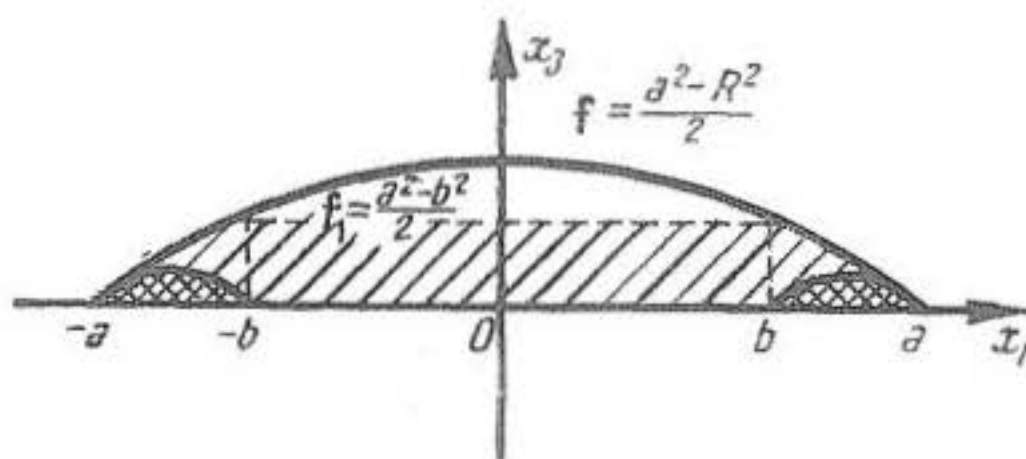


Fig. 5.16.18

Secționînd volumele acoperite de membrană printr-un plan perpendicular pe Ox_1x_2 , obținem situația din figura 5.16.18 (unde secțiunea volumului $f_1 D_1 + H''$ este hășurată simplu, iar cea a volumului H' este hășurată dublu). Întrucît materialul utilizat este proporțional cu $\pi(R_0^2 - R_1^2) = 2\pi R_0^2 \varepsilon$, iar C'' este proporțional cu $2\pi R_0^4 \varepsilon$, rezultă limpede marea economie de material realizată prin utilizarea de profile *închise* cu pereți subțiri. (Vezi și § 6, pag. 190.)

Aceste raționamente clarifică semnificația mecanică a formulei (14.18): integrala $\iint_{\mathcal{D}} f(x_1, x_2) dD$ măsoară participarea la rezistență a materialului *folosit*, în timp ce suma $\sum_{j=1}^m f_j D_j$ măsoară, paradoxal, participarea la rezistență a orificiilor, așadar a materialului *economisit*.

Se înțelege că aceste raționamente își pierd sensul în cazul torsiunii împiedecate.

Pentru a încheia, reproducem încă liniile de nivel obținute prin analogia membranei pentru o coroană circulară (cu $R_1/R_0 = 0,2$) cu o fisură exterioară radială, permițând urmărirea procesului de fisurare. Se pot repeta aci cele spuse relativ la exemplul *d*.

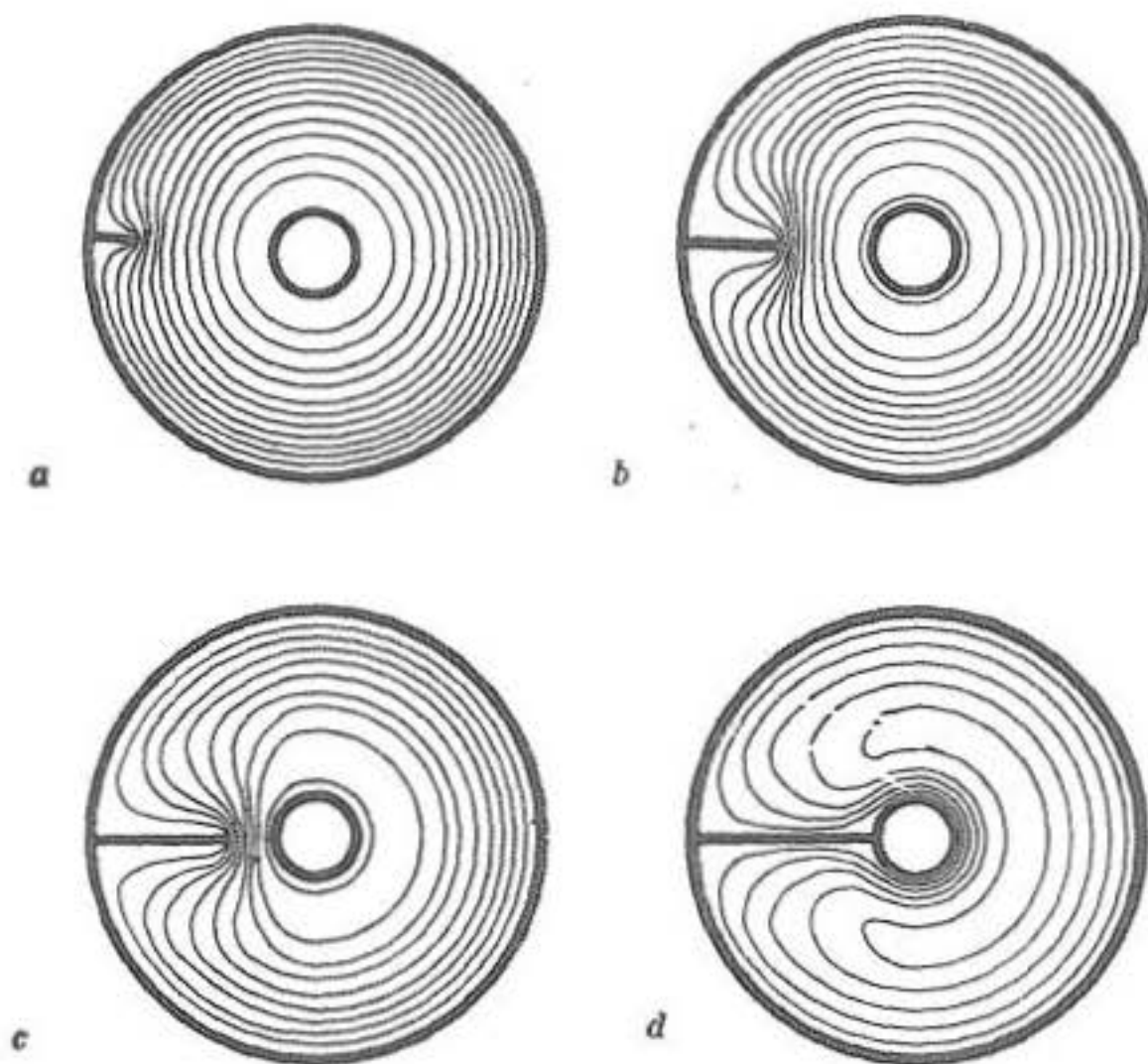


Fig. 5.16.19

§ 17. PROBLEMA TORSIUNII PENTRU BARE DE SECȚIUNE SIMPLU-CONEXĂ. METODA REPREZENTĂRII CONFORME

În cele ce urmează, ne vom limita la cazul unei secțiuni *simplu conexe* \mathcal{D} în planul z . Problema torsiunii se reduce la determinarea funcției $\psi(z)$, olomorfe în \mathcal{D} , din condiția la limită (13.3) sau (13.5). Întrucât

avem $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0$ și $f_0 = 0$, notînd cu t un punct curent pe frontiera \mathcal{L} , avem

$$\operatorname{Im} \psi(t) = \frac{1}{2} t \bar{t}. \quad (1)$$

Uneori, problema astfel formulată se rezolvă elementar cu ajutorul așa numitei „metod, $\bar{z}z'$ ” (A. Stevenson [1]; Th. Higgins [1]). Anume, dacă ecuația $G(x_1, x_2) = 0$ a frontierei \mathcal{L} transcrisă în variabilele \bar{z}, z , poate fi pusă sub forma

$$g(t) + \overline{g(t)} = t \bar{t} + \text{const.}, \quad (2)$$

unde $g(\cdot)$ este valoarea la limită a unei funcții $g(z)$ olomorfe în \mathcal{D} , atunci soluția problemei (1) este direct construită sub forma

$$\psi(z) = ig(z) + \text{const.} \quad (3)$$

Unele exemple de acest fel vor fi date în § 18, **a** și **b**. Totuși, metoda nu se dovedește decît rareori eficace.

Linia principală de abordare a problemei torsiunii o constituie utilizarea mijloacelor teoriei funcțiilor complexe, ale căror posibilități practice sînt limitate numai de posibilitatea construirii efective a reprezentării conforme corespunzătoare (exacte sau aproximative) a domeniului \mathcal{D} pe discul unitate \mathcal{D}^* (pe care-l vom nota aci cel mai adesea numai cu \mathcal{D}). Rezultatele și formulele necesare în cele ce urmează sînt date în §§ A.6-A.8. Cazul domeniului dublu conex nu este principial mai greu — dar calculele devin mult mai complicate. Pentru un ordin de conexiune superior, problema își schimbă caracterul, și rezolvarea ei este considerabil mai dificilă.

Fie deci cunoscută funcția

$$z = \omega(\zeta), \quad (4)$$

care reprezintă conform discul unitate \mathcal{D} de frontieră γ din planul ζ , pe domeniul simplu conex \mathcal{D} . Inversa acestei funcții este

$$\zeta = \omega^{-1}(z). \quad (5)$$

Prin ipoteză, funcția (4) este olomorfă în \mathcal{D} , iar derivata ei nu are zerouri în \mathcal{D} (putînd avea totuși zerouri sau puncte singulare pe γ). Pentru comportarea la limită a funcției $\omega(\zeta)$ și a derivatelor sale, vezi § A.6, pag. 728—730.

Pe cercul unitate vom nota

$$\zeta|_\gamma = \sigma = \exp(i\theta), \quad \sigma = \exp(-i\theta) = \sigma^{-1}, \quad d\sigma = i\sigma d\theta, \quad (6)$$

astfel că pentru orice domeniu mărginit de o curbă simplă jordaniană \mathcal{L} avem (vezi și § A.11, pag. 781)

$$t = z|_{\mathcal{L}} = \omega(\sigma) = \omega^+, \quad \bar{t} = \bar{z}|_{\mathcal{L}} = \overline{\omega(\sigma)} = \omega_*, \quad (7)$$

Cunoașterea funcției $\omega(\zeta)$ permite determinarea efectivă a diferitelor elemente ce depind de geometria domeniului (vezi § A.7). Exemple de reprezentări conforme relativ simple și utile în cele ce urmează sînt date în § A.8.

În general, problema la limită (1) nu poate fi rezolvată direct. Ea poate fi însă abordată prin transcrierea tuturor elementelor problemei în coordonate naturale (vezi § A.7) și prin rezolvarea problemei la limită corespunzător transformate în planul ζ (vezi § A.7, pag. 735).

Atunci cînt este cazul, vom atribui funcțiilor de δ (considerate deci în planul „fizic”) indicele inferior „1”, păstrînd aceleași notații, dar fără indice, pentru transformatele lor prin intermediul reprezentării (4). Avem deci (vezi (A.7.4) — (A.7.5)) :

$$\begin{aligned}\psi_{(1)}(\delta) &= \psi_{(1)}[\omega(\zeta)] = \psi(\zeta), \\ \Psi_{(1)}(\delta) &= d\psi_{(1)}(\delta)/d\delta = \Psi(\zeta) = \psi'(\zeta)/\omega'(\zeta).\end{aligned}\tag{8}$$

Funcția $\psi(\delta)$ odată determinată, obținem imediat

$$\psi_{(1)}(\delta) = \psi[\omega^{-1}(\delta)],\tag{9}$$

ceea ce se poate calcula efectiv dacă (5) poate fi explicitat. În caz contrar, funcțiile $\omega(\zeta)$, $\psi(\zeta)$ dau soluția sub formă parametrică : pentru orice $\zeta \in \mathcal{D}$ cunoaștem punctul $\delta \in \mathcal{D}$ care îi corespunde, și componentele deplasării și tensiunii în acest punct. Anume, formulele (13.6), (13.9) devin

$$T = \mu\tau [\overline{\psi'(\zeta)/\omega'(\zeta)} + i\omega(\zeta)], \quad U = i\tau x_3 \omega(\zeta), \quad u_3 = \tau \operatorname{Re} \psi(\zeta).\tag{10}$$

În aceste notații, condiția la limită (1) se scrie

$$\operatorname{Im} \psi(\sigma) = \frac{1}{2} \omega(\sigma) \overline{\omega(\sigma)},\tag{11}$$

ceea ce trebuie să permită determinarea funcției $\psi(\zeta)$, olomorfe în \mathcal{D} . Pentru găsirea rigidității rămîne să facem uz de (13.25), ceea ce se va scrie

$$C = J_0 - \operatorname{Re} C_1,\tag{12}$$

unde J_0 este momentul polar de inerție în axele ce rezultă din (4), iar

$$C_1 = \oint_{\mathcal{L}} r \bar{t} \, dt, \quad \operatorname{Re} C_1 = \frac{1}{2} \oint_{\mathcal{L}} r \, d(t\bar{t}).\tag{13}$$

Pentru J_0 dispunem de formula (A.7.32), iar pentru $\operatorname{Re} C_1$ avem de introdus în (13) funcția deja găsită $\psi(\zeta)$, de ținut seama de valorile la limită ce decurg din (4), și de calculat integrala corespunzătoare pe γ .

Pentru rezolvarea acestei probleme, vom expune aici trei metode.

a) Metoda \bar{z}

Ca și la începutul paragrafului, dacă produsul $\omega(\sigma) \overline{\omega(\sigma)}$ poate fi pus sub forma sumei unei funcții de σ cu funcția conjugată acesteia, și dacă această funcție este valoarea pe γ a unei funcții olomorfe în \mathcal{D} , problema este rezolvată.

În particular, metoda este întotdeauna aplicabilă dacă $\omega(\zeta)$ este o funcție rațională (în particular, un polinom). Într-adevăr, din (7) urmează că produsul $\omega \overline{\omega}$ este valoarea la limită a produsului de funcții raționale $\omega(\zeta) \omega_*(\zeta)$, dintre care prima are poli numai în \mathcal{D}^- , iar a doua, numai în \mathcal{D}^+ . Descompunând acest produs în sumă de fracții simple, și notînd cu $R(\zeta)$ suma tuturor termenilor corespunzători polilor din \mathcal{D} , rezultă — întrucît produsul $\omega(\sigma) \overline{\omega(\sigma)}$ este real — că trebuie să avem

$$\omega(\zeta) \omega_*(\zeta) = R(\zeta) + \overline{R(\zeta)} \quad (14)$$

(plus eventual o constantă reală determinată). Întrucît $R(\zeta)$ este prin construcție olomorfă în \mathcal{D}^+ , soluția problemei este

$$\psi(\zeta) = i R(\zeta). \quad (15)$$

În acest caz, soluția problemei se obține deci efectiv, sub o formă elementară, prin operații de descompunere a unei funcții raționale în sumă de fracții simple. Rezultatul rămîne valabil dacă $R(\zeta)$ este o funcție olomorfă în \mathcal{D}^+ , dar altfel oarecare.

Chestiunea este examinată amănunțit, și sub o formă mult mai generală, de C. Iacob [6].

b) Metoda seriilor

Dacă soluția nu poate fi găsită direct sub forma (15), vom ține seama că $\omega(\zeta)$, $\psi(\zeta)$ sînt olomorfe în \mathcal{D} , și deci au forma

$$\omega(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n \zeta^n \quad (16)$$

(unde coeficienții ω_n sînt cunoscuți), respectiv

$$\psi(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \zeta^n, \quad (17)$$

unde coeficienții b_n urmează a fi determinați din (11).

Pentru membrul al doilea din (11) obținem mai întîi :

$$\omega(\sigma) \overline{\omega(\sigma)} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} \omega_k \overline{\omega_h} \sigma^{k-h},$$

sau încă, scriînd $k-h = n$ pentru $k > h$, și $k-h = -n$ pentru $k < h$:

$$\omega(\sigma) \overline{\omega(\sigma)} = 2B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sigma^n + \sum_{n=1}^{\infty} \overline{B_n} \sigma^{-n}, \quad (18)$$

unde am notat (pentru $n = 1, 2, \dots$)

$$2B_0 = \sum_{h=0}^{\infty} \omega_h \bar{\omega}_h, \quad B_n = \sum_{h=0}^{\infty} \omega_{n+h} \bar{\omega}_h, \quad B_{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} \omega_k \bar{\omega}_{n+k} = \bar{B}_n. \quad (19)$$

Coeficienții B_n sînt așadar cunoscuți. În particular B_0 este real. Cu aceasta, condiția la limită (11) ia forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n \sigma^n - \sum_{n=0}^{\infty} \bar{b}_n \sigma^{-n} = 2iB_0 + i \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sigma^n + i \sum_{n=1}^{\infty} \bar{B}_n \sigma^{-n}, \quad (20)$$

de unde, ținînd seama de proprietatea de unicitate a coeficienților Fourier (vezi § A.9, pag. 759) obținem prin identificare

$$b_0 - \bar{b}_0 = 2iB_0, \quad b_n = iB_n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (21)$$

și deci și soluția problemei, sub forma

$$\psi(\zeta) = i \sum_{n=0}^{\infty} B_n \zeta^n, \quad (22)$$

unde termenul liber este determinat numai abstracție făcînd de o constantă reală. (Alegerea făcută aci revine la a cere $\operatorname{Re} \psi(0) = 0$ și $f_0 = 0$.) Dacă $\omega(\zeta)$ este un polinom, calculele sînt identice cu cele cerute de metoda $\delta\bar{\delta}$.

Ideea de a dezvolta datele la limită în serie Fourier pe γ și a obține în felul acesta soluția sub forma unei dezvoltări în serie Taylor în \mathcal{D} , este larg folosită atît în studiul problemei torsiunii, cît și în cel al încovoierii, și al problemei plane.

Pentru determinarea lui C , vom face uz de formulele (12), (13). Momentul polar J_0 se calculează după formula (A.7.32):

$$J_0 = -\frac{1}{8} i \oint_{\gamma} [\overline{\omega(\sigma)}]^2 d[\omega(\sigma)]^2. \quad (23)$$

Or, din (16) avem evident

$$[\omega(\sigma)]^2 = \sum_{h=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \omega_h \omega_k \sigma^{h+k},$$

de unde mai departe, notînd $h+k=n$ și considerînd coeficienții

$$E_n = \sum_{l=0}^n \omega_{n-l} \omega_l, \quad (24)$$

obținem

$$[\omega(\sigma)]^2 = \sum_{n=0}^{\infty} E_n \sigma^n. \quad (25)$$

Pentru J_0 avem acum

$$J_0 = -\frac{1}{8}i \oint_{\gamma} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \bar{E}_n \sigma^{-n} \right] \left[\sum_{m=0}^{\infty} m E_m \sigma^{m-1} \right] d\sigma. \quad (26)$$

Datorită relațiilor de ortogonalitate

$$\oint_{\gamma} \sigma^{m-n-1} d\sigma = 2\pi i \delta_{mn},$$

urmează

$$J_0 = \frac{1}{4}\pi \sum_{n=1}^{\infty} n E_n \bar{E}_n. \quad (27)$$

Mai departe, pentru cantitatea $\operatorname{Re} C_1$ din (13), ținând seama de (22) (unde B_0 este o cantitate reală) și de (18), obținem

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} C_1 &= \frac{1}{2} \frac{1}{2} i \oint_{\gamma} \left[\sum_{n=1}^{\infty} B_n \sigma^n - \sum_{n=1}^{\infty} \bar{B}_n \sigma^{-n} \right] \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} m B_m \sigma^{m-1} d\sigma = \\ &= \frac{1}{4} i \cdot 2\pi i \left[- \sum_{n=1}^{\infty} n B_n B_{-n} - \sum_{n=1}^{\infty} n \bar{B}_n B_n \right], \end{aligned}$$

de unde în definitiv

$$\operatorname{Re} C_1 = \pi \sum_{n=1}^{\infty} n B_n \bar{B}_n. \quad (28)$$

Cu aceasta, formula (12) devine

$$C = \frac{1}{4}\pi \sum_{n=1}^{\infty} n (E_n \bar{E}_n - 4 B_n \bar{B}_n), \quad (29)$$

unde coeficienții E_n și B_n sînt cunoscuți.

OBSERVAȚIA 1. Metoda este ușor utilizabilă dacă $\omega(\zeta)$ este un polinom. Cazuri în care și soluția exactă este cunoscută permit să ne facem o idee despre utilitatea metodei aproximative corespunzătoare (vezi § 18, exemplul f).

c) Metoda integralelor de tip Cauchy

Dacă funcția $\omega(\zeta)$ este cunoscută sub formă compactă, problema (11) poate fi întotdeauna rezolvată — adesea chiar efectiv — cu ajutorul integralelor de tip Cauchy.

În acest scop, să înmulțim ambii membri ai condiției la limită (11) cu $d\sigma/2\pi i (\sigma - \zeta)$, și să integrăm pe γ , pentru $\zeta \in \mathcal{A}^+$:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{\psi(\sigma)}{\sigma - \zeta} d\sigma - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{\overline{\psi(\sigma)}}{\sigma - \zeta} d\sigma = \frac{1}{2\pi i} i \oint_{\gamma} \frac{\omega(\sigma) \overline{\omega(\sigma)}}{\sigma - \zeta} d\sigma. \quad (30)$$

Întrucît funcțiile ω , ψ sînt olomorfe în \mathcal{D}^+ , putem face uz de formulele (A.10.1) și (A.11.37), astfel că (30) devine

$$\psi(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma} \frac{\omega(\sigma) \overline{\omega(\sigma)}}{\sigma - \zeta} d\sigma + \overline{\psi(0)}, \quad (31)$$

ceea ce dă explicit soluția sub forma unei integrale definite, de tip Cauchy. Dacă am introduce (16) în (31), am obține din nou soluția (22). (Vezi și finele § A.11.) Dacă $\omega(\zeta)$ este rațională, integrala din (31) se calculează ușor cu ajutorul formulelor din § A.10.

Pentru a găsi pe C , trebuie să facem din nou uz de formulele (12) și (13); dacă $\omega(\zeta)$ este funcție rațională, aceasta conduce la utilizarea teoremei reziduurilor.

Cele trei metode expuse reduc deci dificultatea la determinarea funcției $\omega(\zeta)$. Problema torsiunii nu e deci principial mai complicată decît cea a reprezentării conforme a lui \mathcal{D}^+ pe \mathcal{D} : aceasta este de înțeles, întrucît ambele conduc la cîte o problemă Dirichlet cu date pur geometrice pentru ecuația lui Laplace.

OBSERVATIA 2. Dacă domeniul \mathcal{D} este dublu conex, deci reprezentabil conform pe o coroană circulară, expresiile (16), (17) se înlocuiesc prin

$$\omega(\zeta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \omega_n \zeta^n, \quad \psi(\zeta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \zeta^n, \quad (32)$$

iar în locul condiției (11) căpătăm condițiile

$$\operatorname{Im} \psi(\zeta)|_{A_j} = \frac{1}{2} \omega(\zeta) \overline{\omega(\zeta)}|_{A_j} + f_j, \quad j = 0, 1, \quad (33)$$

unde A_j sînt cele două cercuri-frontieră, iar f_j — valorile constantelor lui Prandtl.

Raționamente de același tip cu cele de mai sus duc la determinarea efectivă a funcției $\psi(\zeta)$ sub forma unor integrale definite (L. Bartels [1]) sau a unor serii Laurent (E. Deutsch [1]). Ne vom mărgini numai la a cerceta două exemple în § 18, **d** și **e**.

Remarcăm că utilizarea acestei metode nu pretinde cunoașterea prealabilă a constantelor lui Prandtl. Aceasta era de așteptat, întrucît ele depind explicit de funcția lui Green a domeniului (vezi (14.14)), așadar în definitiv de $\omega(\zeta)$.

§ 18. PROBLEMA TORSIUNII PENTRU BARE DE SECȚIUNI SIMPLU CONEXE ȘI DUBLU CONEXE. EXEMPLE

Vom da cîteva exemple de secțiuni, eventual fără utilitate practică directă, dar pentru care metodele de mai sus pot fi aplicate ușor. Ele își păstrează valabilitatea în numeroase probleme mai complicate din punctul de vedere al calculului — dar nu diferite principial de acestea.

a) Elipsă

Ecuatia frontierei (15.6) se pune ușor sub forma

$$\frac{1}{2} [(a^2 - b^2)/(a^2 + b^2)] (t^2 + \bar{t}^2) = t\bar{t} + \text{const.}, \quad (1)$$

astfel că (17.3) dă imediat soluția sub forma (compară cu (15.21))

$$\psi(\zeta) = \frac{1}{2} [(a^2 - b^2)/(a^2 + b^2)] i\zeta^2 + \text{const.} \quad (2)$$

Constanta din (2) poate fi determinată din condițiile $\text{Re } \psi(0) = 0$, $f_0 = 0$.

OBSERVAȚIA 1. Problema triunghiului echilateral și a lunulei circulare (cazul elementar) se rezolvă tot atât de ușor prin metoda $\zeta\bar{\zeta}$. Aceeași metodă poate fi folosită și pentru problema dreptunghiului — dar în acest caz aplicarea ei este în fond un decalc al metodei separării variabilelor.

b) Cardioidă

În § A.8, exemplu c, sînt calculate diferitele date geometrice necesare pentru studiul secțiunii mărginite de o cardioidă — exemplu simplu de studiu al unei secțiuni cu funcția $\omega(\zeta)$ polinomială. Amintim că avem

$$\zeta = \omega(\zeta) = a(1 + \zeta)^2, \quad \zeta = (\zeta/a)^{1/2} - 1. \quad (3)$$

Condiția la limită (17.11) se scrie deci

$$\psi(\sigma) - \overline{\psi(\sigma)} = ia^2(\sigma^2 + 4\sigma + 6 + 4\sigma^{-1} + \sigma^{-2}). \quad (4)$$

Metoda $\zeta\bar{\zeta}$ dă imediat soluția (vezi (17.15)) sub forma

$$\psi(\zeta) = ia^2(6 + 4\zeta + \zeta^2) + \text{const.} \quad (5)$$

Punînd condiția $\text{Re } \psi(0) = 0$, deducem că constanta din (5) este pur imaginară, fie ea iK (cu K real). Punînd și condiția $f_0 = 0$, obținem

$$f_0 = \text{Im } \psi(\sigma) - \frac{1}{2} \omega(\sigma) \overline{\omega(\sigma)} = 0,$$

de unde $K = -3a^2$. Cu aceasta, (5) devine în definitiv

$$\psi(\zeta) = ia^2(3 + 4\zeta + \zeta^2). \quad (6)$$

Același rezultat poate fi obținut prin metoda seriilor. Constantele ω_n din (17.16) au valorile $\omega_0 = a$, $\omega_1 = 2a$, $\omega_2 = a$, toate celelalte fiind nule. Din (17.19) și (17.24) obținem acum $B_0 = 3a^2$, $B_1 = 4a^2$, $B_2 = a^2$, $E_0 = E_4 = a^2$, $E_1 = E_3 = 4a^2$, $E_2 = 6a^2$. Din (17.22) obținem deci funcția de torsiune sub aceeași formă (6).

Acceași problemă se rezolvă (după calcule și mai puțin laborioase) și cu ajutorul integralelor de tip Cauchy. Anume, din (17.31) deducem

$$\psi(\zeta) = \frac{ia^2}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{(1+\sigma)^2 (1+\sigma^{-1})^2}{\sigma - \zeta} d\sigma + \overline{\psi(0)}. \quad (7)$$

Numărătorul integrandului este valoarea la limită a funcției $(1+\zeta)^4/\zeta^2$, olomorfă în \mathcal{H} , cu excepția punctului $\zeta = 0$, în vecinătatea căruia ea are forma

$$(1+\zeta)^4/\zeta^2 = \zeta^{-2} + 4\zeta^{-1} + f_0(\zeta), \quad f_0(\zeta) = 6 + 4\zeta + \zeta^2, \quad (8)$$

$f_0(\zeta)$ fiind olomorfă în \mathcal{H} . Din formula (A.10.20) obținem deci pentru integrala din (7) valoarea $ia^2 f_0(\zeta)$, și (7) devine

$$\psi(\zeta) = ia^2(6 + 4\zeta + \zeta^2) + \overline{\psi(0)}. \quad (9)$$

Luând aci $\zeta = 0$ obținem (abstracție făcând de o constantă reală nedeterminabilă) $\overline{\psi(0)} = -3ia^2$, astfel că (9) conduce din nou la (6).

Pentru a calcula C , din (17.29) se obține

$$C = 17\pi a^4. \quad (10)$$

Pe de altă parte, putem utiliza formulele (17.12), (17.13). Integrala J_0 se calculează cu ajutorul teoremei reziduurilor și are valoarea (vezi (A.8.43))

$$J_0 = 35\pi a^4. \quad (11)$$

Cantitatea $\text{Re } C_1$ se calculează utilizând (17.13), (3), (6) și teorema reziduurilor, de unde

$$\begin{aligned} \text{Re } C_1 &= \frac{1}{4} ia^4 \oint_{\gamma} [\sigma^2 + 4\sigma - 4\sigma^{-1} - \sigma^{-2}] \times \\ &\quad \times d[(1+\sigma)^2 (1+\sigma^{-1})^2] = 18\pi a^4. \end{aligned} \quad (12)$$

Ținând seama de (17.12), regăsim deci pentru C valoarea din (10).

Funcția de torsiune și constanta C (și deci și τ) odată determinate, din (17.10), (3) și (6) obținem componentele tensiunii și deplasării. Astfel de pildă deducem

$$T(\zeta, \bar{\zeta}) = i\mu\tau a [(1+\zeta)^2 - (2+\zeta)(1+\bar{\zeta})^{-1}]. \quad (13)$$

Soluția se transcrie ușor în planul fizic. Anume, avem

$$\psi_{(1)}(\beta) = ia^2 [(\beta/a) + 2(\beta/a)^{1/2}], \quad (14)$$

$$T_{(1)}(\beta, \bar{\beta}) = -i\mu\tau a [1 - (\beta/a) + (\bar{\beta}/a)^{-1/2}]. \quad (15)$$

Deplasările — care depind numai de $\psi(\zeta)$ și $\omega(\zeta)$ — rămân finite în punctul singular al frontierei ($\beta = 0$, sau punctul corespunzător $\zeta = -1$). Tensiunile în schimb tind la infinit în acest punct.

OBSERVAȚIA 2. Soluția a fost obținută presupunând desigur că teorema de existență este valabilă. Întrucît apariția de tensiuni infinite nu are sens mecanic, aceasta înseamnă de fapt că teorema de existență este pusă sub semnul întrebării (vezi § 4.4, pag. 135). Soluția își păstrează totuși utilitatea practică — dacă se indică numai faptul că în vecinătatea punctului singular apar tensiuni atît de mari, încît ecuațiile elasticității liniare nu mai sînt respectate.

Fenomenul se manifestă întotdeauna în torsiunea barelor care prezintă pe frontiera secțiunii puncte unghiulare *întrînde*, și conduce la apariția de fisuri, sau de zone de deformare elasto-plastică. (Vezi și § 16, pag. 265—266).

OBSERVAȚIA 3. Raționamentele relative la cazul cardioidei rămîn ușor utilizabile în cazul oricărei funcții $\omega(\zeta)$ raționale.

c) Lemniscata lui Bernoulli

Acesta este un exemplu de problemă în care funcția de reprezentare *nu este rațională*; anume, avem (vezi § A.8, exemplul *d*)

$$\xi = \omega(\zeta) = a(1 + \zeta)^{1/2}, \quad \zeta = (\xi/a)^2 - 1. \quad (16)$$

Metoda $\xi/\bar{\xi}$ nu conduce aci la soluție. Într-adevăr, obținem ușor

$$\omega(\sigma)\overline{\omega(\sigma)} = a^2(\sqrt{\sigma} + 1/\sqrt{\sigma}), \quad (17)$$

dar funcția $\sqrt{\zeta}$ nu este olomorfa în \mathcal{D} , și deci soluția nu poate fi scrisă sub forma (17.15).

Nici metoda seriilor nu este indicată: ca metodă exactă, ea este depășită în eficacitate de metoda integralei de tip Cauchy; ca metodă aproximativă ea nu e recomandabilă datorită prezenței punctului critic $\zeta = -1$ al reprezentării. (În cazul cardioidei, prezența aceluiași punct critic $\zeta = -1$ nu se făcea simțită, întrucît $\omega(\zeta)$ era un polinom.)

Ne rămîne la dispoziție metoda integralelor de tip Cauchy, care dă funcția de torsiune sub forma ce rezultă din (17.31):

$$\psi(\zeta) = \frac{a^2}{2\pi} \oint_{\gamma} \frac{1 + \sigma}{\sqrt{\sigma}} \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} + \overline{\psi(0)}, \quad \zeta \in \mathcal{D}^+. \quad (18)$$

Avem evident

$$\frac{1 + \sigma}{\sqrt{\sigma}(\sigma - \zeta)} = \frac{\sqrt{\sigma}}{\sigma - \zeta} + \frac{\sqrt{\sigma}}{\sigma(\sigma - \zeta)}, \quad (19)$$

$$\frac{1}{\sigma(\sigma - \zeta)} = \frac{1}{\zeta} \left(\frac{1}{\sigma - \zeta} - \frac{1}{\sigma} \right), \quad (20)$$

astfel încît, considerînd integrala

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{\sqrt{\sigma}}{\sigma - \zeta} d\sigma, \quad (21)$$

rezultă că (18) ia forma, ce depinde numai de $f(\zeta)$:

$$\psi(\zeta) = ia^2 \{f(\zeta) + \zeta^{-1} [f(\zeta) - f(0)]\} + \overline{\psi(0)}. \quad (22)$$

Funcția $\sqrt{Z}/(Z - \zeta)$ (unde Z este o valoare curentă a variabilei ζ) are în \mathcal{H}^+ două singularități: punctul critic algebric $Z = 0$, și polul simplu $Z = \zeta \neq 0$. Efectuând o tăietură în lungul semi-axe $O\xi_1$ negative de la frontiera γ la punctul critic $Z = 0$, putem aplica teorema reziduurilor relativ la domeniul astfel modificat. (Evident, și alte tăieturi sînt posibile.) Pentru valoarea $\sqrt{\zeta}$ a rezidului relativ la polul $Z = \zeta$, obținem astfel expresia

$$\sqrt{\zeta} = f(\zeta) + \frac{1}{2\pi i} \left[\int_{-1}^0 \frac{\sqrt{Z}}{Z - \zeta} dZ + \oint_{\gamma'} \frac{\sqrt{Z}}{Z - \zeta} dZ + \int_0^{-1} \frac{\sqrt{Z}}{Z - \zeta} dZ \right], \quad (23)$$

unde punctul de integrare Z parcurge conturul din prima figură A.5.2; γ' este arcul *def*; iar în integralele de pe cele două borduri ale tăieturii trebuie să ținem seama de (A.5.45).

Întrucît avem $\zeta \neq 0$, integrala curbilinie pe γ' tinde la zero odată cu $\sqrt{|Z|}$. Obținem deci, notînd ¹²⁾ $Z = -\tau$ pe tăietură:

$$f(\zeta) + \frac{1}{2\pi i} \int_1^0 \frac{i\sqrt{\tau}}{\tau + \zeta} d\tau + \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{-i\sqrt{\tau}}{\tau + \zeta} d\tau = \sqrt{\zeta},$$

de unde

$$f(\zeta) = \sqrt{\zeta} + \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{\sqrt{\tau}}{\tau + \zeta} d\tau. \quad (24)$$

Făcînd substituțiile $\tau = u^2$, $u = \zeta v$, avem

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{\tau}}{\tau + \zeta} d\tau = 2 - 2\zeta \int_0^1 \frac{du}{u^2 + \zeta} = 2 \left[1 - \sqrt{\zeta} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{\zeta}} \right];$$

întrucît $\operatorname{arctg} (1/\sqrt{\zeta}) = \pi/2 - \operatorname{arctg} \sqrt{\zeta}$, (24) devine

$$f(\zeta) = (2/\pi) [1 + \sqrt{\zeta} \operatorname{arctg} \sqrt{\zeta}]. \quad (25)$$

Amintim aci dezvoltările în serie cunoscute, valabile pentru $|\zeta| \leq 1$:

$$\operatorname{arctg} \sqrt{\zeta} = \frac{1}{2i} \ln \frac{1 + i\sqrt{\zeta}}{1 - i\sqrt{\zeta}} = \sqrt{\zeta} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(-1)^h}{2h+1} \zeta^h. \quad (26)$$

Ținînd seama de (25) și (26) în (22), obținem mai întîi

$$\psi(\zeta) = \frac{2ia^2}{\pi} \frac{1 + \zeta}{\sqrt{\zeta}} \operatorname{arctg} \sqrt{\zeta} + \frac{2ia^2}{\pi} + \overline{\psi(0)},$$

¹²⁾ A nu se confunda cu tensiunea complexă!

de unde, luând $\zeta = 0$, obținem (abstracție făcând de o constantă reală)

$$\psi(0) = 2i a^2/\pi, \quad (27)$$

astfel că în definitiv avem

$$\psi(\zeta) = \frac{2i a^2}{\pi} \frac{1 + \zeta}{\sqrt{\zeta}} \operatorname{arctg} \sqrt{\zeta}, \quad (28)$$

sau încă

$$\psi(\zeta) = \frac{a^2}{\pi} \frac{1 + \zeta}{\sqrt{\zeta}} \ln \frac{1 + i\sqrt{\zeta}}{1 - i\sqrt{\zeta}}, \quad (29)$$

sau în fine

$$\psi(\zeta) = \frac{2i a^2}{\pi} (1 + \zeta) \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(-1)^h}{2h+1} \zeta^h. \quad (30)$$

Expresia astfel determinată corespunde condițiilor $\operatorname{Re} \psi(0) = 0$, $f_0 = 0$. Prima din ele rezultă din (27). Pentru cea de a doua, se verifică ușor că $\psi(\sigma) - \overline{\psi(\sigma)} = (a^2/\pi) (\sqrt{\sigma} + 1/\sqrt{\sigma}) \ln(-1) = ia^2 (\sqrt{\sigma} + 1/\sqrt{\sigma}) = i\omega(\sigma) \overline{\omega(\sigma)}$, unde am ținut seama că $\ln(-1) = i\pi$.

Pentru a determina rigiditatea geometrică la torsiune, avem de calculat mărimile J_0 și $\operatorname{Re} C_1$. Obținem mai întâi din (A.7.32)

$$J_0 = -\frac{1}{8} ia^4 \oint_{\gamma} (1 + \sigma^{-1}) d\sigma = \frac{1}{4} \pi a^4. \quad (31)$$

Pentru a face uz de formula (17.13), vom ține seama că din (28) urmează

$$2r|_{\mathcal{L}} = \psi(\sigma) + \overline{\psi(\sigma)} = \frac{2i a^2}{\pi} \frac{1 + \sigma}{\sqrt{\sigma}} \left[2 \operatorname{arctg} \sqrt{\sigma} - \frac{1}{2} \pi \right],$$

și deci, utilizând dezvoltarea în serie (26):

$$r|_{\mathcal{L}} = \frac{ia^2}{2\pi} (1 + \sigma) \left[-\frac{\pi}{\sqrt{\sigma}} + 4 \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(-1)^h}{2h+1} \sigma^h \right]. \quad (32)$$

Aceasta este o funcție reală. Într-adevăr, să considerăm seria Fourier:

$$1/\sqrt{\sigma} = \sum_{h=-\infty}^{\infty} c_h \sigma^h, \quad (33)$$

de unde, înmulțind cu σ^{-j-1} și integrând pe γ :

$$\oint_{\gamma} (\sigma^{-j-1}/\sqrt{\sigma}) d\sigma = c_j \oint_{\gamma} \sigma^{-1} d\sigma = 2\pi i c_j. \quad (34)$$

Pentru integrala din (34) avem pe rînd

$$M_h = \oint_{\gamma} (\sigma^h/\sqrt{\sigma}) d\sigma = 2 \oint_{\gamma} \sigma^h d\sqrt{\sigma} = 2 \sigma^h \sqrt{\sigma} \Big|_{\theta=-\pi}^{\theta=\pi} - 2h \oint_{\gamma} \sigma^{h-1} \sqrt{\sigma} d\sigma,$$

unde pentru $\theta = \pi$ avem $\sigma = -1$ și $\sqrt{\sigma} = i$, iar pentru $\theta = -\pi$ avem $\sigma = -1$ și $\sqrt{\sigma} = -i$; prin urmare deducem $M_h = 2(-1)^h 2i - 2h M_h$, ceea ce dă

$$M_h = \oint_{\gamma} (\sigma^h / \sqrt{\sigma}) d\sigma = \frac{4(-1)^h}{2h+1} i, \quad h = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (35)$$

și evident

$$M_{-h-1} = M_h. \quad (36)$$

Prin urmare, (33) devine

$$1/\sqrt{\sigma} = \frac{2}{\pi} \sum_{h=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^h}{2h+1} \sigma^h, \quad (37)$$

astfel că dezvoltarea în serie (32) se poate pune sub forma — vizibil reală —

$$\begin{aligned} r|_{\mathcal{L}} &= \frac{a^2}{\pi} i (1 + \sigma) \left[\sum_{h=0}^{\infty} \frac{(-1)^h}{2h+1} \sigma^h + \sum_{h=1}^{\infty} \frac{(-1)^{-h}}{2h-1} \sigma^{-h} \right] = \\ &= \frac{a^2}{\pi} i \left[\sum_{h=0}^{\infty} \frac{(-1)^h}{2h+1} \sigma^h - \sum_{h=1}^{\infty} \frac{(-1)^h}{2h-1} \sigma^h + \sum_{h=1}^{\infty} \frac{(-1)^h}{2h-1} \sigma^{-h} - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(-1)^h}{2h+1} \sigma^{-h} \right] = -\frac{a^2}{\pi} i \sum_{h=1}^{\infty} (-1)^h \left(\frac{1}{2h-1} - \frac{1}{2h+1} \right) (\sigma^h - \sigma^{-h}). \end{aligned} \quad (38)$$

Introducînd acum (16), (32) și (35) în (17.13), obținem

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{a^4}{4\pi} i \oint_{\gamma} \left[-\frac{\pi}{\sqrt{\sigma}} + 4 \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(-1)^h \sigma^h}{2h+1} \right] \frac{1+\sigma}{\sqrt{\sigma}} d\sigma = \\ &= \frac{a^4}{4\pi} i \left[-\pi \oint_{\gamma} \frac{1+\sigma}{\sigma} d\sigma + 4 \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(-1)^h}{2h+1} (M_h + M_{h+1}) \right] = \\ &= \frac{a^4}{4\pi} i \left[-\pi \cdot 2\pi i + 16i \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{2h+1} \left(\frac{1}{2h+1} - \frac{1}{2h+3} \right) \right]. \end{aligned}$$

Ținînd seama de formulele 0.234.2 și 0.237.1 din I. Rîjik și I. Gradstein [1]:

$$\sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{(2h+1)^2} = \frac{1}{8} \pi^2, \quad \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{(2h+1)(2h+3)} = \frac{1}{2}, \quad (39)$$

găsim așadar

$$C_1 = \frac{2}{\pi} a^4. \quad (40)$$

În definitiv, din (17.12) obținem astfel

$$C = (\pi/4 - 2/\pi) a^4 \cong 0,149 a^4, \quad (41)$$

și cu aceasta problema este complet rezolvată.

Din (28) și (17.10) avem de exemplu :

$$\tau(\zeta, \bar{\zeta}) = i\mu\tau a \left\{ \sqrt{1+\zeta} - \frac{2}{\pi} \sqrt{1+\zeta} \left[\frac{1}{\zeta} + \frac{\zeta-1}{\zeta} \operatorname{arctg} \sqrt{\zeta} \right] \right\}. \quad (42)$$

Expresiile (28) și (42) se transcriu ușor în planul fizic cu ajutorul reprezentării inverse din (16). În punctul critic $\zeta = -1$ (punct unghiular ieșind), atât deplasările cît și tensiunile rămîn finite; mai mult, în acest punct avem chiar $U = u_3 = T = 0$ (Vezi și § 16, pag. 266.)

d) Coroana eliptică. Concentrarea tensiunilor

Să considerăm funcția din (A.8.17)

$$\delta = \omega(\zeta) = c(\zeta + \zeta^{-1}) \quad (43)$$

care reprezintă conform interiorul coroanei circulare de raze $\rho_0 > \rho_1 \geq 1$ date în (A.8.18), pe domeniul mărginit de două elipse confocale $\mathcal{L}_0, \mathcal{L}_1$ (E. Deutsch [1]). Căutînd funcția de torsiune sub forma seriei Laurent din (17.32) și ținînd seama de faptul că pe cercurile-frontieră avem

$$\zeta|_{A_1} = \rho_1 \sigma, \quad \zeta|_{A_0} = \rho_0 \sigma, \quad (44)$$

capătăm din (17.33) următoarele două condiții la limită ($j = 0, 1$):

$$\operatorname{Im} \psi(\zeta)|_{A_j} = \frac{1}{2} c^2 (\rho_j \sigma + \rho_j^{-1} \sigma^{-1}) (\rho_j \sigma^{-1} + \rho_j^{-1} \sigma) + f_j, \quad (45)$$

unde f_0, f_1 sînt constantele lui Prandtl, de unde

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (b_n \rho_j^n - \bar{b}_{-n} \rho_j^{-n}) \sigma^n = ic^2 (\sigma^2 + \rho_j^2 + \rho_j^{-2} + \sigma^{-2}) + 2if_j. \quad (46)$$

Identificînd coeficienții obținem din aceste două condiții, relațiile :

$$\begin{aligned} n=0: & \quad b_0 - \bar{b}_0 = ic^2 (\rho_0^2 + \rho_0^{-2}) + 2if_0, \\ n=1: & \quad b_1 \rho_0 - \bar{b}_{-1} \rho_0^{-1} = 0, \\ n=2: & \quad b_2 \rho_0^2 - \bar{b}_{-2} \rho_0^{-2} = ic^2, \\ n \geq 3: & \quad b_n \rho_0^n - \bar{b}_{-n} \rho_0^{-n} = 0, \end{aligned} \quad (47)$$

precum și relațiile analoge ce se capătă dacă înlocuim aci ρ_0, f_0 cu ρ_1, f_1 . (Pentru indici $n < 0$, se obțin relații complex conjugate cu cele din (47).)

Din a doua și a patra relație (47), împreună cu relațiile corespunzătoare lor pentru ρ_1 , deducem evident

$$b_n = \bar{b}_{-n} = 0 \quad \text{pentru } n \neq 0, \pm 2. \quad (48)$$

Alegînd $f_0 = 0$, prima relație (47) conduce la sistemul

$$b_0 = \bar{b}_0 = ic^2 (\rho_0^2 + \rho_0^{-2}), \quad b_0 - \bar{b}_0 = ic^2 (\rho_1^2 + \rho_1^{-2}) + 2if_1,$$

de unde

$$\operatorname{Im} b_0 = \frac{1}{2} c^2 (\rho_0^2 + \rho_0^{-2}), \quad (49)$$

$$f_1 = \frac{1}{2} c^2 (\rho_0^2 + \rho_0^{-2} - \rho_1^2 - \rho_1^{-2}). \quad (50)$$

În fine, a treia relație (47) conduce la sistemul

$$b_2 \rho_0^2 - \bar{b}_{-2} \rho_0^{-2} = ic^2, \quad b_2 \rho_1^2 - \bar{b}_{-2} \rho_1^{-2} = ic^2,$$

de unde

$$b_2 = ic^2 / (\rho_1^2 + \rho_0^2), \quad b_{-2} = ic^2 \rho_1^2 \rho_0^2 / (\rho_1^2 + \rho_0^2). \quad (51)$$

Prin urmare, funcția de torsiune are expresia

$$\psi(\zeta) = i c^2 (\rho_1^2 + \rho_0^2)^{-1} [\zeta^2 + \rho_1^2 \rho_0^2 \zeta^{-2}] + \frac{1}{2} ic^2 (\rho_0^2 + \rho_0^{-2}), \quad (52)$$

unde am neglijat constanta reală ne-esențială $\operatorname{Re} b_0$, și am ales $\operatorname{Im} b_0$ în așa fel încît $f_0 = 0$. Constanta f_1 a rezultat din calcul, și valoarea ei nu a fost necesară pentru determinarea coeficienților.

Pentru a calcula rigiditatea geometrică la torsiune, vom utiliza formulele (17.12), (17.13) — unde vom ține seama că de data aceasta frontiera \mathcal{L} este alcătuită din două componente.

Din (A.7.32) și (43) obținem acum (compară cu 17.23))

$$\begin{aligned} J_0 &= -\frac{1}{8} i \oint_A [\overline{\omega(\zeta)}]^2 d[\omega(\zeta)]^2 = -\frac{1}{8} ic^4 \oint_A (\zeta + \zeta^{-1})^2 d(\zeta + \zeta^{-1})^2 = \\ &= -\frac{1}{4} ic^4 \oint_A (\rho^{-2} \sigma^2 + 2 + \rho^2 \sigma^{-2}) (\rho^2 \sigma - \rho^{-2} \sigma^{-3}) d\sigma = \\ &= -\frac{1}{4} ic^4 \oint_A (\rho^4 - \rho^{-4}) \sigma^{-1} d\sigma = \frac{1}{2} \pi c^4 (\rho_0^4 - \rho_1^4 - \rho_0^{-4} + \rho_1^{-4}), \end{aligned} \quad (53)$$

unde am ținut seama că $\oint_\gamma \sigma^n d\sigma = 0$ pentru $n \neq -1$.

Pentru a face uz de (17.13), deducem mai întâi din (52)

$$r(x_1, x_2) = \frac{1}{2} ic^2 (\rho_1^2 + \rho_0^2)^{-1} [\zeta^2 - \bar{\zeta}^2 + \rho_1^2 \rho_0^2 \zeta^{-2} - \rho_1^2 \rho_0^2 \bar{\zeta}^{-2}]. \quad (54)$$

Întrucît din (43) avem — pentru $\rho = \text{const.}$ —

$$d(\frac{1}{2} \bar{\zeta}) = 2c^2 (\sigma - \sigma^{-3}) d\sigma,$$

obținem acum

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} C_1 &= \frac{1}{2} ic^4 (\rho_1^2 + \rho_0^2)^{-1} \oint_A (\rho^2 \sigma^2 - \rho^2 \sigma^{-2} + \rho_1^2 \rho_0^2 \rho^{-2} \sigma^{-2} - \\ &\quad - \rho_1^2 \rho_0^2 \rho^{-2} \sigma^2) (\sigma - \sigma^{-3}) d\sigma = \\ &= \frac{1}{2} ic^4 (\rho_1^2 + \rho_0^2)^{-1} \oint_A (-\rho^2 + \rho_1^2 \rho_0^2 \rho^{-2} - \rho^2 + \rho_1^2 \rho_0^2 \rho^{-2}) \sigma^{-1} d\sigma = \\ &= 4 \pi c^4 (\rho_1^2 + \rho_0^2)^{-1} (\rho_0^2 - \rho_1^2). \end{aligned} \quad (55)$$

Prin urmare, avem

$$C = J_0 - \operatorname{Re} C_1 = \frac{1}{2} \pi c^4 (\rho_0^2 - \rho_1^2) [(\rho_0^2 + \rho_1^2)(1 + \rho_0^{-4} \rho_1^{-4}) - 8(\rho_1^2 + \rho_0^2)^{-1}]. \quad (56)$$

Cu aceasta problema este rezolvată. În cazul particular $\rho_1 = 1$, obținem soluția pentru domeniul mărginit de elipsa exterioară, cu o tăietură în lungul segmentului $[-2c, 2c]$ pe axa Ox_1 .

Un raționament simplu permite găsirea de aci a funcției de torsiune pentru discul eliptic. Pentru aceasta, este suficient să ținem seama că funcția $\psi_{(1)}(\zeta)$ trebuie să fie olomorfă în discul eliptic — deci cu necesitate trebuie să poată fi prelungită analitic la traversarea tăieturii $[-2c, 2c]$. Mai departe, pentru aceasta este necesar ca ea să ia valori egale pe cele două borduri ale tăieturii. Întrucât pentru $\rho_1 = 1$ avem $\zeta|_{\Delta_1} = \sigma = \exp(i\theta)$, aceasta revine la a scrie

$$\psi(\sigma) = \psi(\bar{\sigma}). \quad (57)$$

În locul relațiilor ce se deduc din (47) prin înlocuirea lui ρ_0 cu ρ_1 , trebuie să folosim deci acum egalitățile

$$b_n = b_{-n}. \quad (58)$$

Luând $f_0 = 0$, obținem din (47) și (58)

$$\operatorname{Im} b_0 = \frac{1}{2} c^2 (\rho_0^2 + \rho_0^{-2}), \quad b_2 \rho_0^2 - \bar{b}_2 \rho_0^{-2} = ic^2, \quad (59)$$

toți ceilalți coeficienți b_n fiind nuli. Trecînd, în a doua relație (59), la cantități complex conjugate, obținem sistemul

$$\rho_0^4 b_2 - \bar{b}_2 = ic^2 \rho_0^2, \quad b_2 - \rho_0^4 \bar{b}_2 = ic^2 \rho_0^2,$$

de unde

$$b_2 = b_{-2} = ic^2 \rho_0^2 (1 + \rho_0^4)^{-1}. \quad (60)$$

Prin urmare, funcția de torsiune pentru discul eliptic este

$$\psi(\zeta) = ic^2 \rho_0^2 (1 + \rho_0^4)^{-1} [\zeta^2 + \zeta^{-2}] + \frac{1}{2} ic^2 (\rho_0^2 + \rho_0^{-2}). \quad (61)$$

Ținînd seama de relațiile (vezi (A.8.18))

$$c^2 = \frac{1}{4} (a^2 - b^2), \quad \rho_0^2 = (a+b)/(a-b), \quad (62)$$

și introducînd (43) în soluția obținută prin mijloace elementare în (15.21), căpătăm tocmai expresia (61) a funcției de torsiune.

Soluția dedusă în acest mod pentru problema discului eliptic nu prezintă desigur interes în sine, ci numai ca exemplu simplu de utilizare a prelungerii analitice. Un exemplu nebanal în acest sens va fi considerat în § 6.18, b.

Efectul tăieturii $[-2c, 2c]$ se manifestă atât prin scăderea rigidității (efect global), cît și prin apariția fenomenului de concentrare a tensiunilor (efect local).

Luind în (56) $\rho_1 = 1$ și utilizând aci (62), obținem pentru discul eliptic cu tăietura considerată

$$C = \frac{1}{4} \pi ab (a^2 + b^2) - \frac{1}{4} \pi (b/a) (a^2 - b^2)^2, \quad (63)$$

sau încă, ținind seama de formulele (15.24) :

$$C = (D^2/2\pi) \sqrt{1 - k^2} (1 + k^2/2).$$

Comparația cu (15.25) arată că prezența fisurii micșorează rigiditatea geometrică la torsiune în raportul $1/(1 - k^2/4)$ (compară de pildă cu (15.53)) — așadar pînă la cel mult 25 % pentru $k \rightarrow 1$. În schimb concentrările de tensiuni sînt considerabile. Într-adevăr, introducînd (43) și (61) în expresia (17.10) a tensiunii tangențiale complexe, obținem pentru discul eliptic

$$T(\zeta, \bar{\zeta}) = i\mu\tau c \left[-\frac{2\rho_0^2}{1 + \rho_0^4} \bar{\zeta} (1 + \bar{\zeta}^{-2}) + (\zeta + \zeta^{-1}) \right], \quad (64)$$

în timp ce pentru discul cu tăietura $[-2c, 2c]$ deducem din (52), pentru $\rho_1 = 1$:

$$T(\zeta, \bar{\zeta}) = i\mu\tau c \left[-\frac{2}{1 + \rho_0^2} \bar{\zeta} \frac{1 - \rho_0^2 \bar{\zeta}^{-2}}{1 - \bar{\zeta}^{-2}} + (\zeta + \zeta^{-1}) \right]. \quad (65)$$

În acest ultim caz, tensiunile devin infinite pentru $\zeta \rightarrow \pm 1$ (așadar pentru $z \rightarrow \pm 2c$). Pentru domeniu mărginit de două elipse confocale, cea interioară corespunzînd unei valori $\rho_1 \cong 1$, în expresia lui $T(\zeta, \bar{\zeta})$ apare la numitor același factor $1 - \bar{\zeta}^{-2}$, care poate lua valori oricît de mici, pentru ρ_1 destul de apropiat de 1.

Cele spuse relativ la existența soluției în cazul cardioidei (pag. 287) rămîn și aci valabile.

e) Coroana circulară excentrică

Să considerăm funcția din (A.8.3)

$$z = \zeta / (1 - a \zeta), \quad (66)$$

care reprezintă interiorul unei coroane circulare pe cel al unei coroane circulare excentrice. Date fiind razele R_0, R_1 ale celor două cercuri, precum și distanța l_{01} dintre centrele lor, formulele (A.8.5), (A.8.6) permit să se determine parametrul a din (66), și razele ρ_0, ρ_1 ale cercurilor concentrice din planul ζ .

Pentru a face uz de condiția la limită (17.33), să calculăm întîi produsul

$$\frac{1}{2} \omega(\zeta) \overline{\omega(\zeta)} = \frac{1}{2} \rho^2 \sum_{n=0}^{\infty} a^n \zeta^n \sum_{m=0}^{\infty} a^m \bar{\zeta}^m. \quad (67)$$

Ținând seama că pe frontieră avem egalitățile (44), și notînd $n - m = \pm p$ după cum avem $n \geq m$, obținem ușor

$$\frac{1}{2} \omega(\zeta) \overline{\omega(\zeta)}|_A = \frac{1}{2} \rho^2 \left[A_0 + \sum_{p=1}^{\infty} A_p \sigma^p + \sum_{p=1}^{\infty} A_{-p} \sigma^{-p} \right], \quad (68)$$

unde

$$A_p = A_{-p} = (a \rho)^p / (1 - a^2 \rho^2). \quad (69)$$

Căutînd soluția sub forma unei serii Laurent (17.32), deducem

$$\begin{aligned} b_0 - \bar{b}_0 + \sum_{p=1}^{\infty} (b_p \rho_j^p - \bar{b}_{-p} \rho_j^{-p}) \sigma^p + \sum_{p=1}^{\infty} (b_{-p} \rho_j^{-p} - \bar{b}_p \rho_j^p) \sigma^{-p} = \\ = [i \rho_j^2 / (1 - a^2 \rho_j^2)] \left[1 + \sum_{p=1}^{\infty} (a \rho_j)^p \sigma^p + \sum_{p=1}^{\infty} (a \rho_j)^p \sigma^{-p} \right] + 2i f_j. \end{aligned} \quad (70)$$

Notînd cu a_j abscisa centrului cercului de rază R_j ($j = 0, 1$), deducem din (A.8.4) :

$$\rho_j^2 / (1 - a^2 \rho_j^2) = a_j / a, \quad \rho_j / (1 - a^2 \rho_j^2) = R_j, \quad j = 0, 1. \quad (71)$$

Prin identificare, obținem mai întîi din (70) (pentru $p = 0$) :

$$\operatorname{Im} b_0 = a_0 / 2a, \quad f_1 = l_{01} / 2a, \quad f_0 = 0. \quad (72)$$

Pentru $p \geq 1$ căpătăm sistemul

$$b_p \rho_j^p - \bar{b}_{-p} \rho_j^{-p} = (ia_j / a) (a \rho_j)^p, \quad j = 0, 1, \quad (73)$$

de unde, notînd $k = \rho_1 / \rho_0$:

$$b_p = i a^{p-1} \frac{a_0 - a_1 k^{2p}}{1 - k^{2p}}, \quad b_{-p} = -i a^{p-1} l_{01} \frac{\rho_1^{2p}}{1 - k^{2p}}. \quad (74)$$

Pentru $p < 0$ căpătăm un sistem identic cu (73).

Prin urmare, funcția de torsiune a problemei este

$$\psi(\zeta) = \frac{i}{a} \left[\frac{1}{2} a_0 + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{a_0 - a_1 k^{2p}}{1 - k^{2p}} (a \zeta)^p - l_{01} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\rho_1^{2p}}{1 - k^{2p}} \left(\frac{a}{\zeta} \right)^p \right], \quad (75)$$

sau încă, adăugînd și scăzînd $a_0 k^{2p}$ la numărătorul primei serii din (75) și amintind că $a_0 - a_1 = l_{01}$:

$$\psi(\zeta) = \frac{i}{a} \left\{ a_0 \frac{1 + a \zeta}{2(1 - a \zeta)} + l_{01} \sum_{p=1}^{\infty} \left[\frac{k^{2p}}{1 - k^{2p}} (a \zeta)^p - \frac{\rho_1^{2p}}{1 - k^{2p}} \left(\frac{a}{\zeta} \right)^p \right] \right\}. \quad (76)$$

Ținînd seama de inversa transformării (66), funcția de torsiune poate fi ușor transcrisă și prin intermediul variabilei z .

Determinarea rigidității geometrice la torsiune se face cu ajutorul formulelor (17.12), (17.13).

Momentul polar J_0 în axele corespunzătoare transformării (66) se poate deduce fie folosind formula (A.7.30) și un raționament similar celui din (17.23) — (17.27), fie cu ajutorul teoremei reziduurilor. Vom conveni să notăm cu indicele superior „0”, respectiv „1”, mărimile relative la cercul exterior, respectiv la cel interior. Așadar, avem în general

$$J_0 = J_0^0 - J_0^1, \quad J_0^j = -\frac{1}{8} i \oint_{\mathcal{C}_j} \bar{t}^2 d(t^2), \quad j = 0, 1. \quad (77)$$

Din (A.7.25) avem $J_0^0 = I_0^0 + a_0^2 D_0$, și o relație similară pentru cercul interior. Prin urmare (vezi (5.15.4)), deducem

$$J_0^0 = \frac{1}{2} \pi (R_0^4 + 2 a_0^2 R_0^2), \quad J_0^1 = \frac{1}{2} \pi (R_1^4 + 2 a_1^2 R_1^2). \quad (78)$$

Cu titlu de exercițiu dăm și raționamentele ce fac uz de reprezentarea (66) și de teorema reziduurilor. Din a doua formulă (77) avem mai întâi

$$\begin{aligned} J_0^0 &= -\frac{1}{8} i \oint_{\gamma} \left(\frac{\rho_0 \bar{\sigma}}{1 - a \rho_0 \bar{\sigma}} \right)^2 d \left(\frac{\rho_0 \sigma}{1 - a \rho_0 \sigma} \right) = \\ &= -\frac{1}{4} i \rho_0^4 \oint_{\gamma} \frac{\sigma}{(\sigma - a \rho_0)^2 (1 - a \rho_0 \sigma)^2} d\sigma. \end{aligned} \quad (79)$$

Întrucât $a \rho_0 < 1$ (vezi § A.8, pag. 741), integrandul este valoarea la limită a unei funcții ce posedă un pol dublu în punctul $\zeta = a \rho_0$. Formula (A.5.30) dă reziduul corespunzător, și astfel rezultă

$$J_0^0 = \frac{1}{2} \pi \rho_0^4 [(1 + 2 a^2 \rho_0^2)/(1 - a^2 \rho_0^2)^4]. \quad (80)$$

Ținând seama de (71), aceasta coincide cu prima formulă (78). Pentru J_0^1 , rezultatul este similar.

Pentru a uza de metoda seriilor, din (66) deducem mai întâi

$$\zeta = \omega(\zeta) = \sum_{p=1}^{\infty} \omega_p \zeta^p, \quad \omega_p = a^{p-1}, \quad (81)$$

astfel că (întrucât $\omega_0 = 0$):

$$\zeta^2 = \sum_{n=2}^{\infty} E_n \zeta^n, \quad E_n = \sum_{l=1}^{n-1} \omega_{n-l} \omega_l = (n-1) a^{n-2}. \quad (82)$$

Din (77) avem acum

$$\begin{aligned} J_0^0 &= -\frac{1}{8} i \oint_{\gamma} \left(\sum_{n=2}^{\infty} E_n \rho_0^n \sigma^{-n} \right) d \left(\sum_{m=2}^{\infty} E_m \rho_0^m \sigma^m \right) = \\ &= \frac{1}{4} \pi \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)^2 a^{2(n-2)} \rho_0^{2n}, \end{aligned} \quad (83)$$

și o expresie similară pentru J_0^1 .

Pentru a suma seria din (83), procedăm precum urmează. Să considerăm seria

$$A(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)^2 x^{n-2} = \left[\sum_{n=2}^{\infty} (n-1)x^n \right]'' \quad (84)$$

Pentru seria din paranteză, avem vizibil

$$B(x) = \sum_{n=2}^{\infty} (n-1)x^n = x \sum_{n=2}^{\infty} (n-1)x^{n-1} = x C(x), \quad (85)$$

unde

$$C(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n x^n = x \left[\sum_{n=1}^{\infty} x^n \right]' = x \left(\frac{x}{1-x} \right)' = \frac{x}{(1-x)^2}. \quad (86)$$

Introducând (85) și (86) în (84), căpătăm imediat

$$A(x) = [x^2(1-x)^{-2}]'' = 2(1+2x)(1-x)^{-4}. \quad (87)$$

Ținând seama de (84) și (87) în (83), deducem din nou

$$J_0^0 = \frac{1}{4} \pi \rho_0^4 A(a^2 \rho_0^2) = \frac{1}{2} \pi \rho_0^4 (1 + 2a^2 \rho_0^2) (1 - a^2 \rho_0^2)^{-4}. \quad (88)$$

Să trecem acum la calculul integralei $\text{Re } C_1$ — realizabil numai prin metoda seriilor. Ținând seama de (17.13), (75), (68) și (69) avem pe cercul exterior :

$$\begin{aligned} \text{Re } C_1^0 &= \frac{i}{4a} \oint_{\gamma} \left[\sum_{p=1}^{\infty} \frac{a_0 - a_1 k^{2p}}{1 - k^{2p}} a^p \rho_0^p + l_{01} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\rho_1^{2p}}{1 - k^{2p}} a^p \rho_0^{-p} \right] (\sigma^p - \sigma^{-p}) \times \\ &\quad \times \rho_0^2 (1 - a^2 \rho_0^2)^{-1} \sum_{q=1}^{\infty} a^q \rho_0^q (q \sigma^{q-1} - q \sigma^{-q-1}) d\sigma, \end{aligned} \quad (89)$$

și după integrare (întrucât p și q sînt pozitivi, numai termenii pentru $p = q$ sînt ne-nuli) :

$$\begin{aligned} \text{Re } C_1^0 &= \frac{\pi}{a} \frac{\rho_0^2}{1 - a^2 \rho_0^2} \left[\sum_{p=1}^{\infty} p \frac{a_0 - a_1 k^{2p}}{1 - k^{2p}} (a^2 \rho_0^2)^p + \right. \\ &\quad \left. + l_{01} \sum_{p=1}^{\infty} p \frac{1}{1 - k^{2p}} (a^2 \rho_1^2)^p \right]. \end{aligned} \quad (90)$$

Un calcul similar dă pe cercul interior

$$\text{Re } C_1^1 = \frac{\pi}{a} \frac{\rho_1^2}{1 - a^2 \rho_1^2} \left[\sum_{p=1}^{\infty} p \frac{a_0 - a_1 k^{2p}}{1 - k^{2p}} (a^2 \rho_1^2)^p + l_{01} \sum_{p=1}^{\infty} p \frac{1}{1 - k^{2p}} (a^2 \rho_1^2)^p \right]. \quad (91)$$

Adăugînd și scăzînd $a_0 k^{2p}$ la numărătorul primei serii din (90) (și din (91)), căpătăm factorul $a_0 + l_{01} k^{2p}/(1 - k^{2p})$. Ținînd încă seama de formulele (71), obținem

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} C_1 = & \frac{\pi a_0}{a^2} \left[a_0 \sum_{p=1}^{\infty} p (a^2 \rho_0^2)^p + 2 l_{01} \sum_{p=1}^{\infty} p \frac{(a^2 \rho_1^2)^p}{1 - k^{2p}} \right] - \\ & - \frac{\pi a_1}{a^2} \left[a_0 \sum_{p=1}^{\infty} p (a^2 \rho_1^2)^p + l_{01} \sum_{p=1}^{\infty} p \frac{(a^2 k^2 \rho_1^2)^p}{1 - k^{2p}} + l_{01} \sum_{p=1}^{\infty} p \frac{(a^2 \rho_1^2)^p}{1 - k^{2p}} \right]. \end{aligned} \quad (92)$$

În (92) apare din nou seria (86), și trei serii de forma

$$\begin{aligned} D(x) &= \sum_{p=1}^{\infty} p \frac{x^p}{1 - k^{2p}} = \sum_{p=1}^{\infty} p x^p + \sum_{p=1}^{\infty} p (k^2 x)^p + \sum_{p=1}^{\infty} p (k^4 x)^p + \dots \\ &= C(x) + C(k^2 x) + C(k^4 x) + \dots = \frac{x}{(1-x)^2} + \frac{k^2 x}{(1-k^2 x)^2} + \\ &+ \frac{k^4 x}{(1-k^4 x)^2} + \dots \end{aligned}$$

de unde

$$D(x) = \sum_{p=1}^{\infty} p \frac{x^p}{1 - k^{2p}} = x \sum_{p=0}^{\infty} \frac{k^{2p}}{(1 - k^{2p} x)^2}. \quad (93)$$

Ținînd seama în (92) de (86) și (93), avem deci

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} C_1 = & (\pi a_0/a^2) [a_0 C(a^2 \rho_0^2) + 2 l_{01} D(a^2 \rho_1^2)] - \\ & - (\pi a_1/a^2) [a_0 C(a^2 \rho_1^2) + l_{01} D(a^2 k^2 \rho_1^2) + l_{01} D(a^2 \rho_1^2)]. \end{aligned}$$

Utilizînd (86) și (71), avem mai întîi

$$C(a^2 \rho_0^2) = a^2 \rho_0^2 / (1 - a^2 \rho_0^2)^2 = a^2 R_0^2, \quad C(a^2 \rho_1^2) = a^2 R_1^2,$$

și prin urmare

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} C_1 = & \pi a_0^2 R_0^2 - \pi a_0 a_1 R_1^2 + 2 \pi l_{01} a_0 \rho_1^2 \sum_{p=0}^{\infty} [k^{2p} / (1 - a^2 k^{2p} \rho_1^2)^2] - \\ & - \pi l_{01} a_1 k^2 \rho_1^2 \sum_{p=0}^{\infty} [k^{2p} / (1 - a^2 k^{2p+2} \rho_1^2)^2] - \\ & - \pi l_{01} a_1 \rho_1^2 \sum_{p=0}^{\infty} [k^{2p} / (1 - a^2 k^{2p} \rho_1^2)^2]. \end{aligned} \quad (94)$$

Să separăm în prima și a treia serie din (94) termenii corespunzători lui $p = 0$, și să înlocuim în a doua serie pe $(p + 1)$ prin p — ceea ce face ca limita inferioară de sumare să devină $p = 1$. Scăzînd suma ultimelor

două serii (acum vizibil egale) din cea dintâi, și ținând seama că $a_0 - a_1 = l_{01}$, se pune în evidență un factor $2\pi l_{01}^2 \rho_1^2$, care înmulțește aceeași serie, sumată de la 1 la ∞ . Termenii rămași din prima și a treia serie pentru $p = 0$ vor fi

$$\begin{aligned} (2\pi l_{01} a_0 - \pi l_{01} a_1) [\rho_1^2 / (1 - a^2 \rho_1^2)^2] &= 2\pi l_{01} a_0 R_1^2 - \pi l_{01} a_1 R_1^2 = \\ &= 2\pi l_{01}^2 R_1^2 + \pi l_{01} a_1 R_1^2. \end{aligned} \quad (95)$$

După efectuarea tuturor acestor operații, (94) devine

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} C_1 &= \pi a_0^2 R_0^2 - \pi a_0 a_1 R_1^2 + 2\pi l_{01}^2 \rho_1^2 \sum_{p=1}^{\infty} [k^{2p} / (1 - a^2 k^{2p} \rho_1^2)^2] + \\ &+ 2\pi l_{01}^2 R_1^2 + \pi l_{01} a_1 R_1^2. \end{aligned} \quad (96)$$

Cu ajutorul expresiilor J_0^0, J_0^1 din (78) și al valorii $\operatorname{Re} C_1$ din (96), putem calcula acum rigiditatea $C = J_0 - \operatorname{Re} C_1$. Grupînd termenii ce provin din J_0 , cu primul, al doilea, și ultimul termen din $\operatorname{Re} C_1$, căpătăm formula finală

$$C = \frac{1}{2} \pi (R_0^4 - R_1^4) - 2\pi l_{01}^2 R_1^2 - 2\pi l_{01}^2 \rho_1^2 \sum_{p=1}^{\infty} [k^{2p} / (1 - a^2 k^{2p} \rho_1^2)^2]. \quad (97)$$

Formulele (76) și (97) permit să se aprecieze gradul de precizie al rezultatelor experimentale obținute pentru aceeași problemă, cu ajutorul analogiei lui Prandtl (vezi § 16, exemplul h).

OBSERVAȚIA 4. Cazul în care cercul interior nu este gol, ci este ocupat de un material cu *alte* constante elastice, a fost studiat — practic vorbind, pe aceeași cale — de către I. Vekua și A. Ruhadze [1], ale căror formule finale sînt reproduse de N. Mushelişvili [5], § 140 a.

f) Domenii reprezentabile conform pe discul unitate prin intermediul unor funcții polinomiale. (Soluții aproximative)

După cum am văzut în § 17, soluția se obține ușor dacă funcția $\omega(\zeta)$ este un polinom. În foarte multe cazuri, cînd funcția $\omega(\zeta)$ nu este cunoscută exact, sau are o formă complicată, pot fi utilizate funcții care reprezintă conform discul unitate (sau o coroană circulară) nu pe domeniul \mathcal{D} considerat, ci pe un domeniu apropiat lui. În acest sens, vezi indicațiile din §§ A.6—A.8. Aci ne vom limita la a prezenta un exemplu.

Funcția care reprezintă conform discul-unitate pe interiorul elipsei are o structură extrem de complicată (vezi (A.8.24)). Să considerăm elipsa

$$\frac{3}{4} x_1^2 + \frac{5}{4} x_2^2 = 1, \quad (98)$$

și funcția care realizează reprezentarea conformă aproximativă dată în (A.8.26):

$$\omega_\gamma(\zeta) = 0,99 (\zeta + 0,12 \zeta^3 + 0,03 \zeta^5 + 0,01 \zeta^7). \quad (99)$$

Din (17.16), (17.19) și (17.24) obținem valorile

$$\begin{aligned} \omega_1 &= 0,99; \quad \omega_3 = 0,12; \quad \omega_5 = 0,03; \quad \omega_7 = 0,01; \\ 2B_0 &= 0,99; \quad B_2 = 0,12; \quad B_4 = 0,03; \quad B_6 = 0,01; \\ E_2 &= 0,98; \quad E_4 = 0,24; \quad E_6 = 0,07; \quad E_8 = 0,03, \end{aligned}$$

unde am reținut în calcule numai primele două zecimale. Celelalte constante sînt nule sau neglijabile. Din (17.22) și (17.29) deducem acum

$$\psi(\zeta) = i (0,5 + 0,12 \zeta^2 + 0,03 \zeta^4 + 0,01 \zeta^6), \quad C = 1,61. \quad (100)$$

Pentru a evalua precizia acestei soluții, să o comparăm cu soluția exactă. Pentru discul eliptic definit de frontiera (98), avem din (15.21) și (15.12)

$$\psi_{(1)}(\zeta) = i (0,5 + 0,125 \zeta^2), \quad C = 2\pi/\sqrt{15} \cong 1,62. \quad (101)$$

Or, introducînd în (101) funcția de reprezentare (99), obținem exact funcția din (100).

Pentru același disc, căpătăm din (61) soluția

$$\psi(\zeta) = i (0,017 \zeta^2 + 0,017 \zeta^{-2} + 0,533), \quad (102)$$

în timp ce pentru discul eliptic cu o tăietură între focare deducem, luînd $\rho_1 = 1$ în (52):

$$\psi(\zeta) = i (0,015 \zeta^2 + 0,118 \zeta^{-2} + 0,533). \quad (103)$$

Deosebirea dintre formulele (100) și (102) se datorește, evident, faptului că în cea dintîi avem $|\zeta| \leq 1$, iar în cea de a doua $1 \leq |\zeta| \leq \rho_0 = \sqrt{4 + \sqrt{15}} = 2,805$ (disc, respectiv coroană circulară).

Dacă frontiera \mathcal{L} prezintă puncte unghiulare — așadar dacă funcția $\omega(\zeta)$ are zerouri ale derivatei sau puncte singulare pe γ (sau pe frontiera coroanei circulare), metoda pierde mult din eficacitate, sau devine chiar inutilizabilă.

Astfel, în locul funcției $\zeta = a(1 + \zeta)^{1/2}$ ce reprezintă conform discul unitate pe interiorul buclei de lemniscată Bernoulli, putem încerca să utilizăm reprezentarea aproximativă ce rezultă din (A.8.60). Înlocuind funcția (16) cu această din urmă funcție, coeficienții B_n vor fi obținuți numai aproximativ; coeficienții E_n sînt exacti pînă la un indice n egal cu gradul polinomului ce înlocuiește funcția $\omega(\zeta)$. (Pentru comparație, valorile exacte ale tuturor acestor coeficienți se pot căpăta introducînd (16) în (17.18) și (17.25).) Reținînd în polinomul din (A.8.60) primii 5, respectiv toți cei 7 termeni calculați, obținem pentru rigiditatea C valorile aproximative $0,141 a^4$, respectiv $0,147 a^4$, în timp ce valoarea exactă dată în (41) este $0,149 a^4$. Prezența punctului singular $\zeta = -1$ nu alterează sensibil (în acest caz!) valoarea C ; aceasta se datorește faptului că punctului singular îi corespunde pe \mathcal{L} un punct unghiular ieșind, astfel că (în cazul torsiunii) calculul conduce la neglijarea unei zone în care tensiunile nu contribuie

substanțial la valoarea totală a lui M_3 — și deci și a lui C . Pentru un punct unghiular *intrînd*, diferențele pot fi considerabile.

În ce privește calculul tensiunilor, el este iluzoriu în vecinătatea punctului singular: importanta modificare a frontierei domeniului-imaginie ce rezultă din înlocuirea funcției exacte (16) prin cea aproximativă (A.8.60) (vezi fig. A.8.7) arată aceasta în mod evident.

Observații asemănătoare se pot face relativ la problema torsiunii pentru domenii poligonale. Metode mai eficace pentru reprezentarea conformă aproximativă sînt indicate la finele § A.6, pag. 733.

g) Alte metode și tipuri de probleme

O sistematizare a imensei literaturi existente asupra torsiunii nu intră în scopurile noastre. Indicăm însă aci unele probleme, metode și articole.

Deplin justificată pentru studiul teoretic al problemei, metoda reprezentării conforme își pierde eficacitatea în multe cazuri practice.

Pentru domenii *simplu conexe*, această eficacitate depinde direct de posibilitatea realizării reprezentării conforme cu ajutorul unor expresii polinomiale cu relativ puțini termeni. Pentru diferite dificultăți ce se ridică în această direcție, precum și pentru compararea posibilităților a diferite metode aproximative, vezi H. Poritsky și C. Danforth [1]. Pentru alte indicații asupra aceleiași teme, vezi finele § A.6.

În cazul domeniilor *dublu conexe*, determinarea funcției de reprezentare este încă mai complicată. Aceste dificultăți cresc și mai mult atunci cînd componentele frontierei sînt foarte apropiate într-o porțiune oarecare: în acest caz apar inevitabil puternice concentrări ale tensiunilor, și se constată o lentă convergență a seriilor Laurent ce dau soluția în coroana circulară, imagine a secțiunii. Pentru astfel de probleme, au fost folosite cu succes metodele teoriei ecuațiilor integrale: vezi S. Mihlin [1], partea a II-a, capitolul 1; D. Șerman [7]. Vezi și D. Șerman [8], § 2.1, (cu indicații critice și bibliografice detaliate) și monografia [9] a aceluiași autor. Aplicarea unor astfel de metode în cazul (mai complicat) al problemei plane este schițată mai jos, în §§ 6.23 și 6.24.

Cazul domeniilor cu puncte unghiulare pe frontieră prezintă dificultăți suplimentare. Pentru anumite domenii *poligonale* (regulate sau nu, simplu conexe sau dublu conexe) și mai ales pentru domenii ușor de descompus în cîteva dreptunghiuri și triunghiuri (profile în T, în I, în cruce etc.), N. Arutiunian [2] a elaborat o metodă de abordare directă a problemei prin suprapunere a soluțiilor corespunzînd fiecăreia din componentele lui \mathcal{D} . Aceasta conduce întotdeauna la rezolvarea unor sisteme infinite de ecuații algebrice liniare, care se dovedesc a fi complet regulate. Rezultatele lui B. Abramian, E. Alexandrian, A. Babloian, N. Gulkanian, pentru diferite domenii simplu conexe și dublu conexe de acest tip, sînt citate și expuse în monografia lui N. Arutiunian și B. Abramian [1]. (Pentru istoricul chestiunii, vezi loc. cit., § 3.3.) Metoda este folosită și de A. Bojenko [1], [2], E. Deutsch [3], [5] etc. Toate aceste rezultate permit compararea soluției exacte cu soluțiile aproximative obținute prin metodele schițate în § 16, exemplele *f*, *g* și *i*, și dau adesea și concluzii privitoare la concentrarea tensiunilor în vecinătatea unghiurilor intrînde.

Pentru alte tipuri de domenii, notăm aci unele soluții relativ simple, obținute de M. Abassi [1]; W. Bassali [1], [2]; L. Hamburger et al. [1]; A. Herzig [1]; C. Iacob [2],

Calculule care au dus la formulele (8), (12) sînt mai simple decît cele ce au permis stabilirea formulelor corespunzătoare (5.8.10), (5.8.32). Formulele înseși au un aspect mai simplu — dar în fapt o structură considerabil mai complicată: în locul termenilor polinomiali din expresiile menționate, apare aci o *a doua funcție necunoscută*. Problema este deci *calitativ* mai complicată decît cea antiplană — beneficiind totuși de metode de studiu apropiate. Acest paralelism constituie unul din avantajele esențiale ale utilizării potențialilor complecși în problemele plane și antiplane.

Funcțiile lui Kolosov și Mushelișvili sînt potențiali de deplasare, și prezintă deci în raport cu funcția lui Airy aceleași avantaje ca cele ale funcției lui Capildeo și Milne-Thomson față de funcțiile lui Prandtl și Timoshenko (vezi § 5.12, pag. 222, și § 5.19, pag. 303).

Să calculăm acum componentele vectorului σ_n pe un element de suprafață cilindric, avînd drept curbă directoare o curbă \mathcal{C} din \mathcal{D} , definită de normala sa n . Ținînd seama de (A.3.12) în (4.8) (relații valabile pe \mathcal{C} , și nu numai pe \mathcal{L}) și utilizînd și (6.13), căpătăm pe rînd

$$\begin{aligned}\sigma_{n1} + i\sigma_{n2} &= [\sigma_{11}x'_2(s) - \sigma_{12}x'_1(s)] + i[\sigma_{12}x'_2(s) - \sigma_{22}x'_1(s)] = \\ &= (\sigma_{11} + i\sigma_{12})x'_2(s) - (\sigma_{12} + i\sigma_{22})x'_1(s) = \\ &= \frac{1}{2}(S_0 - \bar{S})x'_2(s) - \frac{1}{2}i(S_0 + \bar{S})x'_1(s) = -\frac{1}{2}i[S_0\bar{z}'(s) + \bar{S}z'(s)], \quad (14)\end{aligned}$$

astfel că, introducînd aci expresiile (8), urmează

$$\sigma_{n1} + i\sigma_{n2} = -\frac{1}{2}i\{2[\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}]z'(s) + 2[\bar{z}\varphi''(z) + \overline{\psi'(z)}]\bar{z}'(s)\}. \quad (15)$$

Dar întrucît avem evident

$$(\varphi' + \overline{\varphi'}),_s = (z\bar{\varphi}'' + \overline{\psi'}),_s,$$

rezultă că expresia (15) este derivată în raport cu arcul s a unei anumite funcții de z, \bar{z} . Notînd

$$S_0 = 2(\varphi' + \overline{\varphi'}) = K,{}_s, \quad \bar{S} = 2(z\bar{\varphi}'' + \overline{\psi'}) = K,_{\bar{s}}, \quad (16)$$

deducem ușor

$$K(z, \bar{z}) = 2(\varphi + z\bar{\varphi}' + \overline{\psi}), \quad (17)$$

astfel că (15) devine

$$\sigma_{n1} + i\sigma_{n2} = -\frac{1}{2}iK,{}_s, \quad (18)$$

sau încă

$$\sigma_{n1} + i\sigma_{n2} = -i[\varphi(z) + z\bar{\varphi}'(z) + \overline{\psi(z)}]_{,s}. \quad (19)$$

§ 19. ÎNCOVOIEREA ÎN CONSOLĂ

a) Încovoiere și torsiune

Vom trece acum la cazul general $R \neq 0$ când — după cum am văzut în § 9 — secțiunile sînt supuse simultan la alunecare, încovoiere, și torsiune. Soluția acestei probleme este dată în (8.3), (8.10), (8.32) și încă în (8.3), (12.6). Pentru scrierea efectivă a deplasărilor și a tensiunilor este deci necesară cunoașterea funcțiilor φ sau F (ultima din ele prezentînd dezavantajele menționate în § 12, pag. 222), și a coeficienților α și τ .

O bară supusă la încovoiere sub acțiunea sarcinilor tangențiale se numește *bară în consolă*, sau, pe scurt, *consolă*.

Problema consolei duce deci la studiul problemelor la limită (11.1), (11.2) sau (11.3) pentru funcția $\varphi(\xi)$, respectiv a problemei (12.7), (12.9) pentru funcția $F(\xi, \bar{\xi})$ — așadar al unor probleme *de același tip* cu cele ce apar în cazul torsiunii (vezi (13.3) — (13.5), respectiv (14.2), (14.3)). Prin urmare, *problema consolei apare ca mai dificilă din punctul de vedere al calculului, dar principial cu nimic deosebită de cea a torsiunii*, și beneficiază deci *de aceleași metode de cercetare*. Analogia este deplină în cazul utilizării funcției lui Capildeo și Milne-Thomson, ceea ce, împreună cu cele arătate la pag. 222, constituie încă un avantaj al acestei funcții față de cea a lui Prandtl și Timoshenko ¹³⁾.

Cu toată această asemănare de principiu, unele din caracteristicile *mechanice* importante ale stării de torsiune nu mai apar în încovoierea în consolă. Astfel, din (8.32) rezultă evident că frontiera \mathcal{L} nu rămîne nemodificată în planul ei. De asemenea, funcția $|T|^2$ nu este în general sub-armonică, și deci nu se poate afirma că maximum ei ar fi atins pe frontieră. (Vezi și § 20, pag. 331.) Rezultate semnificative în această chestiune aparțin lui G. Polojii [3].

Vom examina în §§ 20 — 22 unele metode și exemple de studiu, mult simplificate datorită celor deja cunoscute privitor la torsiune.

În paragraful de față, ne vom opri asupra caracterizării stării elastice a consolei (completînd cele spuse în § 10), și asupra determinării parametrilor constanți ce definesc această stare.

Fie așadar că sarcina pe baza $x_3 = l$ este static echivalentă cu o forță de componente $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ aplicată în centrul de reducere ξ_r , plus un cuplu de moment \mathcal{M}_3 în raport cu acest centru. Dacă ξ_r este situat în originea axelor în \mathcal{D} , atunci \mathcal{M}_3 se notează \mathcal{M}_3^0 .

Punctele în raport cu care avem $\mathcal{M}_3 = 0$, formează axa centrală a sistemului de sarcini. Notînd cu ξ_a afixul unui punct curent pe axa centrală, obținem din (2.3)

$$\mathcal{R}_2 x_1^a - \mathcal{R}_1 x_2^a - \mathcal{M}_3^0 = 0, \quad (1)$$

¹³⁾ Menționăm încă metoda clasică a lui B. de Saint-Venant [2], prezentată în toate tratatele de teoria elasticității (A. Love [1], I. Sokolnikoff [2] etc.) — dar nemaiavînd azi decît un interes pur istoric.

sau încă (vezi (8.12)) :

$$\mathcal{M}_3^0 = \frac{1}{2} i (\bar{R} z_a - R \bar{z}_a). \quad (2)$$

Dacă valorile \mathcal{R}_1 , \mathcal{R}_2 , \mathcal{M}_3^0 sînt *date*, relațiile (1) sau (2) pot fi privite ca *ecuații ale axei centrale* în \mathcal{D} . Dimpotrivă, dacă centrul de reducere este ales pe axa centrală și deci sistemul este considerat ca redus la o forță unică R aplicată în z_a și dirijată în lungul axei, atunci (1), (2) trebuie privite ca *definind* valoarea \mathcal{M}_3^0 a momentului față de origine, ca funcție de afixul z_a al punctului de aplicare a forței R . Deplasarea acestui punct în lungul suportului vectorului R (care coincide acum cu axa centrală) nu modifică desigur momentul \mathcal{M}_3^0 .

b) Gradul de torsiune la încovoiere. Rigidități

În § 9 am văzut că stările de alunecare și încovoiere sînt caracterizate prin relațiile elementare (9.1) și (9.3). Ținînd seama și de (4.12) rezultă că parametrii ce definesc stările de încovoiere și alunecare sînt cunoscuți, iar valorile lor sînt independente de \mathcal{M}_3^0 sau de punctul de aplicare al forței R .

Cunoașterea stării de torsiune, caracterizată în (9.4), necesită determinarea parametrului τ , pe care-l vom numi pe scurt (deși nu deplin corect dacă $z_0 \neq 0$) *grad de torsiune la încovoiere*.

Cunoașterea lui τ permite aprecierea contribuției funcțiilor de torsiune în funcția de încovoiere. Într-adevăr, din (12.7), (12.9) rezultă (vezi și mai jos (27)) :

$$F = \mu \tau f + \tilde{F}, \quad (3)$$

unde f este funcția lui Prandtl din (14.2), (14.3), iar \tilde{F} verifică

$$\Delta \tilde{F} = - \frac{1+2\nu}{2(1+\nu)} i (\bar{\alpha} z - \alpha \bar{z}) \text{ în } \mathcal{D}, \quad (4)$$

$$\tilde{F}|_{\mathcal{D}_1} = \frac{1}{4} i c \int_0^s (\bar{t} dt - t d\bar{t}) - \frac{1}{4} i \int_0^s t \bar{t} (\bar{\alpha} dt - \alpha d\bar{t}) + \mu \tilde{F}_s$$

(\tilde{F}_s — constante necunoscute, dar nu arbitrare). Desigur, în cazul torsiunii avem $\tilde{F} = 0$. Relații similare se pot scrie și cu ajutorul funcțiilor $\varphi(z)$ și $\psi(z)$.

Pentru determinarea lui τ , amintim formula (8.14) :

$$\mathcal{M}_3^0 = \mu \tau J_0 - \frac{1-2\nu}{8(1+\nu)} \operatorname{Im} \left[\alpha \iint_{\mathcal{D}} z \bar{z}^2 dD \right] - \mu \operatorname{Im} \iint_{\mathcal{D}} z \varphi'(z) dD,$$

care dă pe τ ca funcție de \mathcal{M}_3^0 (și deci, în cazul unei forțe unice aplicate în \mathfrak{z}_a , ca funcție de poziția acestui punct¹⁴). Faptul însă că aci intervine funcția $\varphi(\mathfrak{z})$, la rîndul ei depinzînd de τ , complică natura relației dintre \mathcal{M}_3^0 și τ .

În cele ce urmează, vom da formule mai simple pentru determinarea lui τ (L. Solomon [8], [9]). În acest scop, să remarcăm că întrucît $\varphi(\mathfrak{z}) = p + iq$, iar funcțiile p și q sînt armonic conjugate, putem scrie

$$\operatorname{Im} [\mathfrak{z} \varphi'(\mathfrak{z})] = (px_2)_{,1} - (px_1)_{,2}. \quad (5)$$

Introducînd (5) în formula (8.14) mai sus reprodusă, și utilizînd formula lui Riemann (A.3.18), obținem

$$\mathcal{M}_3^0 = \mu \tau J_0 - \frac{1-2\nu}{8(1+\nu)} \operatorname{Im} \left[\alpha \iint_{\mathcal{D}} \mathfrak{z} \bar{\mathfrak{z}}^2 dD \right] - \mu \oint_{\mathcal{L}} p(x_2 n_1 - x_1 n_2) ds, \quad (6)$$

sau încă, ținînd seama de condiția la limită (13.4) pentru $r(x_1, x_2)$, și de a treia formulă a lui Green (vezi mai departe (7.2.12)) pentru funcțiile armonice p și r :

$$\mathcal{M}_3^0 = \mu \tau J_0 - \frac{1-2\nu}{8(1+\nu)} \operatorname{Im} \left[\alpha \iint_{\mathcal{D}} \mathfrak{z} \bar{\mathfrak{z}}^2 dD \right] - \mu \oint_{\mathcal{L}} r p_{,n} ds, \quad (7)$$

unde valoarea la limită a derivatei normale $p_{,n}$ este cunoscută din (11.2).

Să considerăm acum integralele (vezi și (17.13))

$$C_1 = \oint_{\mathcal{L}} r \bar{t} dt, \quad C_2 = \oint_{\mathcal{L}} r \bar{t}^2 dt, \quad C_3 = \oint_{\mathcal{L}} r t \bar{t} dt \quad (8)$$

și — utilizînd și formula complexă a lui Stokes (A.4.29) —:

$$C_4 = \oint_{\mathcal{L}} t^2 \bar{t}^2 dt = 4i \iint_{\mathcal{D}} \mathfrak{z}^2 \bar{\mathfrak{z}} dD. \quad (9)$$

Introducînd acum (11.2) în (7) și ținînd seama și de expresia (17.12) a rigidității geometrice la torsiune, obținem după calcule elementare formula

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_3^0 = \mu \tau C + \frac{1}{2} c \operatorname{Im} C_1 - \frac{1+2\nu}{8(1+\nu)} \operatorname{Im} (\alpha C_2) - \\ - \frac{1}{4(1+\nu)} \operatorname{Im} (\alpha C_3) - \frac{1-2\nu}{32(1+\nu)} \operatorname{Re} (\bar{\alpha} C_4). \end{aligned} \quad (10)$$

Pentru determinarea lui τ este deci suficientă cunoașterea funcției $\psi(\mathfrak{z})$, și chiar numai a valorilor la limită ale lui $\operatorname{Re} \psi(\mathfrak{z})$. În cazul torsiunii (10) se reduce la (13.15).

¹⁴) Amintim că R este un vector glisant. Prin urmare, cînd vorbim despre un vector aplicat în \mathfrak{z}_a , subînțelegem că suportul său trece prin \mathfrak{z}_a .

Uneori este preferabil ca în locul integralelor curbilinii din (10), să utilizăm integrale duble în \mathcal{D} , în care să intervină de asemenea numai funcția de torsiune. În acest scop, să considerăm funcția lui Prandtl extinsă la domeniul \mathcal{D}_0^+ :

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \tilde{f}(x_1, x_2) & \text{în } \mathcal{D}, \\ f_j & \text{în } \mathcal{D}_j^+, \end{cases} \quad (11)$$

și să introducem integralele

$$H = \iint_{\mathcal{D}_0^+} \tilde{f} dD, \quad H_1 = \iint_{\mathcal{D}} r dD, \quad H_2 = \iint_{\mathcal{D}} r \bar{\partial} dD, \quad H_3 = \iint_{\mathcal{D}_0^+} \tilde{f} \bar{\partial} dD. \quad (12)$$

Ținând seama de formula (14.18) pentru C , obținem ușor

$$H = \iint_{\mathcal{D}} \tilde{f} dD + \sum_{j=1}^m f_j D_j = \frac{1}{2} C. \quad (13)$$

De asemenea pentru integrala H_3 avem

$$H_3 = \iint_{\mathcal{D}} \tilde{f} \bar{\partial} dD + \sum_{j=1}^m f_j D_j \bar{\partial}_j. \quad (14)$$

Între integralele C_i din (8) și integralele H_i din (12) există relații simple, care se explicitază utilizând formula lui Stokes (A.4.29):

$$\begin{aligned} C_1 &= 2i H_1 + i \iint_{\mathcal{D}} \bar{\psi}' \bar{\partial} dD, \quad C_2 = 4i H_2 + i \iint_{\mathcal{D}} \bar{\psi}' \bar{\partial}^2 dD, \\ C_3 &= 2i H_2 + i \iint_{\mathcal{D}} \bar{\psi}' \bar{\partial} \bar{\partial} dD. \end{aligned} \quad (15)$$

Mai departe, folosind formula (14.7) ($\bar{\psi}'(\bar{\partial}) = 2i f_{,1} + i \bar{\partial}$), și din nou formula lui Stokes, căpătăm

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{D}} \bar{\psi}' \bar{\partial} dD &= i(2H - J_0), \quad \iint_{\mathcal{D}} \bar{\psi}' \bar{\partial}^2 dD = 4i H_3 + \frac{1}{4} C_4, \\ \iint_{\mathcal{D}} \bar{\psi}' \bar{\partial} \bar{\partial} dD &= 2i H_3 - \frac{1}{4} C_4, \end{aligned} \quad (16)$$

astfel că în definitiv (10) devine

$$\mathcal{M}_3^0 = \mu \tau C + c H_1 - \operatorname{Re}(\bar{\alpha} H_2) - \frac{\nu}{1+\nu} \operatorname{Im}(\bar{\alpha} H_3). \quad (17)$$

Integralele C_i și H_i depind numai de soluția problemei torsiunii, mai ușor de rezolvat (exact, aproximativ sau analogic).

Toate aceste integrale sînt deci niște *constante ale domeniului*, și au semnificația unor *rigidități geometrice la torsiunea de încovoiere*¹⁵⁾. Formulele (10) și (17) vor înlocui în cele ce urmează formula (8.14) pentru determinarea lui τ . În ce privește semnificația lor, vezi § 6, pag. 189.

c) Centrul de încovoiere

Prezintă importanță evidentă cunoașterea cazurilor în care încovoierea se produce *fără* torsiune, așadar *fără* tensiunile pe care torsiunea le provoacă. *Acea* valoare a lui τ pentru care torsiunea dispare, se va nota τ_c ; din (9.4) rezultă

$$\mu\tau_c = -\frac{\mu\nu i}{2E}(\bar{\alpha}\beta_0 - \alpha\bar{\beta}_0) = \frac{\nu}{2(1+\nu)}\text{Im}(\bar{\alpha}\beta_0), \quad (18)$$

așadar o cantitate unic determinată. Dacă axele sînt centrale, avem $\tau_c = 0$.

Relațiile (10) și (17) *explicită* dependența dintre τ și \mathcal{M}_3^0 . În particular, vom nota cu \mathcal{M}_c *acea* valoare a momentului \mathcal{M}_3^0 care corespunde lui τ_c , și se obține deci introducînd (18) în (10) sau (17). Întrucît \mathcal{M}_3^0 depinde de poziția punctului de aplicare β_a a sarcinii R , înseamnă că valorii τ_c îi corespunde o anumită poziție a lui β_a , sau — ceea ce este același lucru — a axei centrale a sarcinii.

Privind relația (2) ca relație ce dă momentul \mathcal{M}_3^0 ca funcție de R și de β_a , obținem prin derivare

$$\bar{\beta}_a = 2i(\partial\mathcal{M}_3^0/\partial R), \quad (19)$$

ceea ce poate fi de asemenea privit ca ecuație a axei centrale.

În particular, luînd pentru \mathcal{M}_3^0 valoarea \mathcal{M}_c , și notînd cu β_c punctul β_a corespunzător, așadar *acel* punct de aplicare al sarcinii R pentru care încovoierea se realizează *fără* torsiune, deducem din (19)

$$\bar{\beta}_c = 2i(\partial\mathcal{M}_c/\partial R). \quad (20)$$

Ținînd seama că \mathcal{M}_c este funcție de R (vezi (18) și (4.12)), punctul β_c este unic determinat, și nu depinde de sarcină, ci numai de configurația secțiunii, și de ν . (Se constată că β_c variază foarte puțin ca funcție de ν . Vezi mai departe (20.95), (22.24), (22.52). Vezi și C. Pearson [1].) Punctul β_c astfel definit se numește *centru de încovoiere*. (R. Capildeo [1] — care se referă la un punct de vedere al lui A. Stevenson, conducînd la (18); L. Leibenzon [2]; E. Trefftz [4]).

Dacă sarcina este echivalentă cu o forță R al cărei suport trece prin β_c , încovoierea se produce deci *fără* torsiune. Întrucît acest suport

¹⁵⁾ Totuși fără a putea stabili, de exemplu, că τ scade cînd aceste constante cresc.

coincide cu axa centrală a sistemului de sarcini, este suficient să calculăm componentele \mathcal{R}_1 , \mathcal{R}_2 , \mathcal{M}_3^0 și să verificăm dacă punctul de coordonate x_1^c , x_2^c e situat pe dreapta (1) sau nu — pentru a ști dacă încovoierea se produce fără, sau cu torsiune.

Pentru centrul de încovoiere se poate da și o definiție bazată pe considerente variaționale, de același tip cu definiția centrului de torsiune (§ 13, pag. 231). Se obține atunci o poziție independentă de v . Pentru detalii, vezi E. Trefftz [4], A. Weinstein [1].

Atît τ cît și δ_c depind în ultimă instanță de funcția de torsiune $\psi(\zeta)$ a secțiunii. În ce privește poziția centrului de încovoiere, un rezultat de acest tip aparține lui M. Berman [1]. El a fost reluat de V. Novojilov [2], și simplificat de E. Deutsch [2]. Formula (10) este datorată în esență lui R. Capildeo [1].

Sînt de indicat unele soluții exacte ale problemei torsiunii, cu determinare ulterioară a centrului de încovoiere. Multe din rezultatele menționate în § 18, pag. 301 (și în special cele date sau citate de N. Arutiunian și B. Abramian [1]) pot fi folosite pentru același scop. Indicăm și rezultatele lui L. Payne [2].

Introducînd valoarea τ_c din (18) în (10) sau (17), și făcînd uz de (20), se pot obține formule generale pentru δ_c . În practică, calcularea lui τ fiind întotdeauna necesară, e mai ușor de obținut δ_c din (18) și (20), după ce τ a fost determinat în funcție de R și \bar{R} .

Faptul că τ și δ_c depind de $\psi(\zeta)$ numai sub formă integrală, face ca ele să poată fi găsite cu precizie satisfăcătoare chiar dacă această ultimă funcție este cunoscută numai aproximativ, sau eventual experimental (vezi § 20, exemplul *g*, pag. 328—329).

OBSERVAȚIE. Dacă \mathcal{D} are o axă de simetrie, atunci δ_c este situat pe această axă. Într-adevăr, alegînd-o drept axă Ox_1 , avem $\delta_0 = x_1^0$ și $l_{12} = 0$. Să construim funcțiile

$$r^+ = \frac{1}{2} [r(x_1, x_2) + r(x_1, -x_2)], \quad r^- = \frac{1}{2} [r(x_1, x_2) - r(x_1, -x_2)],$$

$$t^+ = \frac{1}{2} [t(x_1, x_2) + t(x_1, -x_2)], \quad t^- = \frac{1}{2} [t(x_1, x_2) - t(x_1, -x_2)],$$

care, în virtutea simetriei, sînt definite peste tot în \mathcal{D} , și permit să scriem

$$r = r^+ + r^-, \quad t = t^+ + t^-. \quad (22)$$

Funcțiile r^+ , t^+ sînt pare în x_2 , în timp ce r^- , t^- sînt impare. Dat fiind că pe \mathcal{L} funcția n_1 este pară, iar n_2 este impară în x_2 , din (21) și din condițiile (13.4) și (13.5) deducem pe \mathcal{L} :

$$r_{,n}^+ = 0, \quad r_{,n}^- = x_2 n_1 - x_1 n_2, \\ t^+ = \frac{1}{2} (x_1^2 + x_2^2) + \text{const.}, \quad t^- = 0. \quad (23)$$

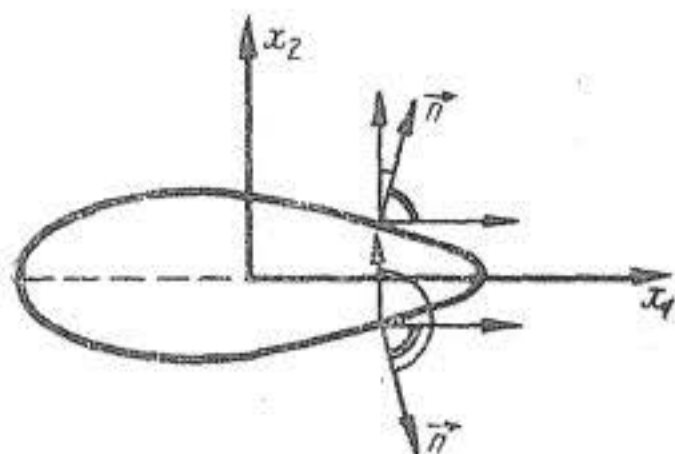


Fig 5.19.1

Intrucât aceste funcții sînt armonice, de aci urmează $r^+ = t^- = 0$ în \mathcal{D} . Funcția de torsiune a lui Saint-Venant rezultă deci a fi impară, iar funcția de torsiune conjugată, și deci și funcția lui Prandtl, rezultă pare în \mathcal{D} .

Din (12) urmează acum

$$H = \frac{1}{2} C \neq 0, H_1 = 0, H_2 = i \iint_{\mathcal{D}} r x_2 \, dD, H_3 = \iint_{\mathcal{D}_0^+} \tilde{f} x_1 \, dD, \quad (24)$$

astfel că (17) devine, pentru valoarea τ_c din (18):

$$\mathcal{M}_c = - \left[\frac{\nu}{2(1+\nu)} x_1^0 C + \iint_{\mathcal{D}} r x_0 \, dD - \frac{\nu}{1+\nu} \iint_{\mathcal{D}_0^+} \tilde{f} x_1 \, dD \right] \operatorname{Im} \alpha. \quad (25)$$

Intrucât $I_{12} = 0$, avem și $\bar{I} = I$, și din (4.12) deducem

$$\alpha - \bar{\alpha} = (2/\delta)(I_0 + I)(R - \bar{R}). \quad (26)$$

Prin urmare, cantitatea \bar{z}_c din (20) este reală, și centrul de încovoiere este situat pe axa de simetrie Ox_1 . În particular, dacă \mathcal{D} are două (sau mai multe) axe de simetrie, \bar{z}_c este situat la intersecția acestora, și coincide cu \bar{z}_0 .

Abstracție făcînd de cazul particular al problemei rezolvate în axe centrale ($\bar{z}_0 = 0$), absența torsiunii *nu este* caracterizată de valoarea $\tau = 0$, ci de valoarea τ_c dată în (18). Este deci firesc să folosim uneori în loc de (3), formula

$$F = (\mu \tau_c f + \tilde{F}) + \mu(\tau - \tau_c) f, \quad (27)$$

unde al doilea termen dă tensiunile de torsiune datorate aplicării sarcinii de încovoiere în afara punctului \bar{z}_c .

Aceste tensiuni pot fi uneori considerabile. Pentru determinarea ponderii lor, este comod să procedăm precum urmează. Valoarea τ_c fiind cunoscută din (18), se obține ușor din (10) sau (17) valoarea \mathcal{M}_c a momentului \mathcal{M}_3^0 , așadar valoarea sa optimală. Scriind relațiile (10) — sau (17) — pentru \mathcal{M}_3^0 și τ , apoi pentru \mathcal{M}_c și τ_c , și scăzîndu-le termen cu termen, căpătăm

$$\mathcal{M}_3^0 - \mathcal{M}_c = \mu C(\tau - \tau_c), \quad (28)$$

ceea ce dă imediat coeficientul termenului torsional din (27).

Tensiunile ce apar pentru $\tau \neq \tau_c$ pot avea efecte catastrofale (vezi § 10, pag. 212—213. Ca exemplu vezi § 20, *h*).

§ 20. ÎNCOVOIEREA CONSOLEI. ANALOGII. EXEMPLE

În paragraful de față, vom examina cîteva cazuri în care funcția lui Capildeo și Milne-Thomson, sau funcția lui Timoshenko, pot fi determinate cu mijloace relativ elementare.

a) Disc circular. Coroană circulară. Concentrarea tensiunilor

Să considerăm o consolă avînd drept secțiune \mathcal{D} o coroană circulară de raze $R_1 < R_0$, sollicitată de o sarcină static echivalentă cu o forță tangențială R aplicată în centru. Alegînd originea în centru și luînd drept axă Ox_1 suportul forței, obținem $\delta_0 = c = 0$, $R = \mathcal{R}_1$. Folosind notațiile (15.93), avem evident

$$\begin{aligned} I_1 = I_2 &= \frac{1}{2} I_0 = \frac{1}{2} \iint_{\mathcal{D}} \delta \bar{\delta} dD = \\ &= \frac{1}{2} R_0^4 \int_{-\pi}^{\pi} d\chi \int_k^1 R^{*3} dR^* = \frac{1}{4} \pi R_0^4 (1 - k^4), \end{aligned} \quad (1)$$

astfel că din (4.12) obținem

$$\alpha = \alpha_1 = \mathcal{R}_1 / I_2 = 4 \mathcal{R}_1 / \pi R_0^4 (1 - k^4), \quad (2)$$

ceea ce permite să scriem imediat componenta σ_{33} sub forma (8.3).

Conform celor spuse la finele § precedent, centrul de încovoiere este situat în origine; întrucît forța R este aplicată în origine, rezultă și $\tau = 0$. După cum urmează din (11.7) și (11.9), funcția lui Capildeo și Milne-Thomson este în acest caz uniformă. Este firesc deci să o căutăm sub forma

$$\varphi(\delta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \delta^n, \quad \delta = R \exp(i\chi). \quad (3)$$

Coeficienții a_n urmează a fi determinați din condiția (11.1), care devine

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} [\varphi'(t) \bar{t}'(s)] &= \frac{1}{4\mu(1+\nu)} \operatorname{Im} \left[\left(\bar{\alpha} t + \frac{1+\nu}{2} \alpha \bar{t} \right) \bar{t} t'(s) \right] = \\ &= \frac{2\mathcal{R}_1}{\pi E R_0^4 (1-k^4)} \operatorname{Im} \left\{ \left[t + \left(\nu + \frac{1}{2} \right) \bar{t} \right] \bar{t} t'(s) \right\}. \end{aligned} \quad (4)$$

Pe orice cerc de rază R avem desigur

$$s = R\chi, \quad \delta'(s) = i \exp(i\chi) = i(\delta/R). \quad (5)$$

Introducînd acum (3) în (4), obținem pentru $R = R_j$, $j = 0, 1$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{R_j} \operatorname{Im} \left[i \sum_{n=-\infty}^{\infty} n a_n R_j^n \exp(i n \chi) \right] &= \frac{2R_j^2 \mathcal{R}_1}{\pi E R_0^4 (1-k^4)} \operatorname{Im} \left\{ i \left[\exp(i\chi) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left(\nu + \frac{1}{2} \right) \exp(-i\chi) \right] \right\}, \end{aligned}$$

de unde, notînd $a_n = a'_n + ia''_n$, deducem relațiile

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} n R_j^n (a'_n \cos n\chi - a''_n \sin n\chi) = \frac{(3 + 2\nu) R_j^3 \mathcal{Q}_1}{\pi E R_0^4 (1 - k^4)} \cos \chi, \quad j = 0, 1. \quad (6)$$

Evident, toate constantele a''_n rezultă nule; constantele a'_n sînt de asemenea nule, exceptînd a'_1 și a'_{-1} . În definitiv, din (6) obținem sistemul

$$\begin{aligned} -R_0^{-1} a'_{-1} + R_0 a'_1 &= \frac{(3 + 2\nu) \mathcal{Q}_1}{\pi E R_0 (1 - k^4)}, \\ -R_1^{-1} a'_{-1} + R_1 a'_1 &= \frac{(3 + 2\nu) k^3 \mathcal{Q}_1}{\pi E R_0 (1 - k^4)}, \end{aligned} \quad (7)$$

de unde

$$a'_{-1} = \frac{3 + 2\nu}{\pi E} \frac{k^2}{1 - k^4} \mathcal{Q}_1, \quad a'_1 = \frac{3 + 2\nu}{\pi E} \frac{1}{R_0^2 (1 - k^2)} \mathcal{Q}_1, \quad (8)$$

astfel că soluția problemei este dată de

$$\varphi(\delta) = \frac{3 + 2\nu}{\pi E} \mathcal{Q}_1 \left[\frac{1}{R_0^2 (1 - k^2)} \delta + \frac{k^2}{1 - k^4} \delta^{-1} \right]. \quad (9)$$

Soluția pentru discul circular se capătă renunțînd în seria din (3) la termenii de indici $n < 0$, precum și la a doua ecuație (7). Deducem astfel

$$\psi(\delta) = \frac{3 + 2\nu}{\pi E} \frac{\mathcal{Q}_1}{R_0^2} \delta. \quad (10)$$

Introducînd (9) în (8.10), obținem după calcule elementare

$$\begin{aligned} T(\delta, \bar{\delta}) &= -\frac{\mathcal{Q}_1}{2\pi(1 + \nu) R_0^4 (1 - k^4)} \left\{ (1 + 2\nu) \delta^2 + \right. \\ &\quad \left. + 2\delta \bar{\delta} + (3 + 2\nu) R_0^2 \left[\frac{R_0^2 k^2}{\delta^2} - 1 - k^2 \right] \right\}. \end{aligned} \quad (11)$$

Tensiunea pentru cazul discului circular se capătă de aci luînd $k = 0$, ceea ce se verifică și dacă introducem (10) în (8.10).

Tensiunea tangențială în origine este dată, în cazul discului circular, de relația (11), unde luăm $k = 0$ și apoi $\delta = 0$:

$$T(0, 0) = \frac{(3 + 2\nu) \mathcal{Q}_1}{2\pi(1 + \nu) R_0^2}. \quad (12)$$

În cazul coroanei cu $k=0$ putem calcula întii tensiunile în $z = R_1 \exp(i\chi)$, făcînd apoi $R_1 \rightarrow 0$. Obținem astfel (compară cu §15, pag. 259):

$$\tau(0, 0; \chi) = \frac{(3 + 2\nu) \mathcal{R}_1}{2\pi(1 + \nu) R_0^2} [1 - \exp(2i\chi)], \quad (13)$$

astfel că, pentru $\chi = \pm \pi/2$, componenta σ_{31} ia o valoare de două ori mai mare decît în cazul cercului plin. Acesta constituie un exemplu simplu de concentrare a tensiunilor la încovoiere (vezi și § 15, exemplele *d* și *f*).

Comparînd această soluție cu soluția problemei torsiunii pentru același domeniu (vezi § 15, exemplul *a*), se observă ușor natura dificultăților sporite pe care le întîmpinăm în studiul cazului general al sarcinii tangențiale.

b) Funcția lui Timoshenko modificată

Ca și în cazul torsiunii, funcția lui Capildeo și Milne-Thomson se dovedește eficace mai ales atunci cînd este cunoscută funcția ce realizează reprezentarea conformă a discului unitate sau a unei coroane circulare, pe domeniul considerat. Numeroase probleme pot fi însă rezolvate efectiv cu ajutorul funcției lui Prandtl și Timoshenko (în cazul încovoierii o vom numi funcția lui Timoshenko).

Amintim aici că, F odată determinată, din (12.5), (12.6) urmează

$$\begin{aligned} \sigma_{31} &= F_{,2} + \frac{1}{2} c x_1 - \frac{1}{2} \alpha_1 (x_1^2 + x_2^2), \\ \sigma_{32} &= -F_{,1} + \frac{1}{2} c x_2 - \frac{1}{2} \alpha_2 (x_1^2 + x_2^2). \end{aligned} \quad (14)$$

Aceste formule se simplifică dacă axele sînt centrale ($c=0$), și se simplifică încă mai mult în axe centrale principale, cînd din (9.6) avem $\alpha_1 = \mathcal{R}_1/l_2$, $\alpha_2 = \mathcal{R}_2/l_1$.

Dacă funcția lui Timoshenko se caută sub forma

$$F(x_1, x_2) = F_0(x_1, x_2) + F_1(x_2) + F_2(x_1), \quad (15)$$

atunci pentru $F_0(x_1, x_2)$ avem (vezi (12.13)) ecuația

$$\Delta F_0 = -2\mu\tau + \frac{1 + 2\nu}{1 + \nu} (\alpha_1 x_2 - \alpha_2 x_1) - F_1''(x_2) - F_2''(x_1), \quad (16)$$

și condiția la limită (vezi (12.9))

$$F_0|_{\mathcal{L}} = \frac{1}{2} \int_0^s [(x_1^2 + x_2^2)(\alpha_1 dx_2 - \alpha_2 dx_1) + c(x_2 dx_1 - x_1 dx_2)] - \\ - F_1(x_2)|_{\mathcal{L}} - F_2(x_1)|_{\mathcal{L}}, \quad (17)$$

unde putem dispune în diferite moduri de funcțiile $F_1(x_2)$, $F_2(x_1)$.

c) Analogia membranei elastice

Funcția $F_0(x_1, x_2)$ poate fi privită ca soluție a problemei membranei flexibile (vezi § 16, pag. 262—263), avînd inițial forma secțiunii \mathcal{D} , solicitată de o sarcină *neuniformă*, definită de primii doi termeni din membrul al doilea din (16) și avînd pe contur cote de asemenea neuniforme, definite de primii doi termeni din al doilea membru al condiției la limită (17). Acest punct de vedere nu îngăduie însă o realizare simplă din punct de vedere experimental a analogiei.

F. Vening Meinesz (vezi S. Timoshenko și J. Goodier [1], § 113) a reușit să formuleze analogia sub o formă aproape tot atît de simplă ca în cazul torsiunii. Anume, pentru \mathcal{D} simplu conex, să căutăm soluția sub forma (vezi (19.3))

$$F_0(x_1, x_2) = \mu\tau f(x_1, x_2) + \tilde{F}(x_1, x_2), \quad (18)$$

unde $f(x_1, x_2)$ este funcția lui Prandtl, soluție a problemei (14.21):

$$\Delta f = -2, \quad f|_{\mathcal{L}} = 0. \quad (19)$$

Introducînd (18) în (16) și (17), obținem

$$\Delta \tilde{F} = \frac{1+2\nu}{1+\nu} (\alpha_1 x_2 - \alpha_2 x_1) - F_1''(x_2) - F_2''(x_1), \quad (20)$$

$$\tilde{F}|_{\mathcal{L}} = \frac{1}{2} \int_0^s [(x_1^2 + x_2^2)(\alpha_1 dx_2 - \alpha_2 dx_1) + c(x_2 dx_1 - x_1 dx_2)] - \\ - F_1(x_2)|_{\mathcal{L}} - F_2(x_1)|_{\mathcal{L}}.$$

Alegînd acum

$$F_1(x_2) = \frac{1+2\nu}{6(1+\nu)} \alpha_1 x_2^3, \quad F_2(x_1) = -\frac{1+2\nu}{6(1+\nu)} \alpha_2 x_1^3, \quad (21)$$

obținem din (20):

$$\Delta \tilde{F} = 0, \quad (22)$$

$$\tilde{F}|_{\mathcal{L}} = \frac{1}{2} \int_0^s [(\alpha_1 x_1^2 - 2cx_1) dx_2 - (\alpha_2 x_2^2 - 2cx_2) dx_1] - \\ - \frac{\nu}{6(1+\nu)} (\alpha_1 x_2^3 - \alpha_2 x_1^3) \Big|_0^s.$$

Integrala din condiția la limită este o funcție uniformă pe \mathcal{L} ; într-adevăr, formula lui Riemann (A.3.19) ne dă

$$\oint_{\mathcal{L}} [(\alpha_1 x_1^2 - 2cx_1) dx_2 - (\alpha_2 x_2^2 - 2cx_2) dx_1] = 2(\alpha_1 x_1^0 + \alpha_2 x_2^0 - 2c)D = 0,$$

în virtutea relației de definiție (4.8) a constantei c . Prin urmare, valorile la limită ale lui \tilde{F} sînt univoc determinate și problema se reduce la problema lui Dirichlet pentru ecuația lui Laplace.

Pentru a o rezolva pe cale experimentală, trebuie să construim curba \mathcal{L} , și în fiecare punct să ridicăm o cotă proporțională cu valoarea (22). Membrana fixată pe această curbă în spațiu (materializată de exemplu printr-un cadru de sîrmă) și nesolicitată de nici o sarcină normală — întrucît ecuația din (22) este omogenă — reprezintă analogul căutat al problemei.

Menționăm încă posibilitatea utilizării de analogii electrice (vezi bibliografia în Th. Higgins [6]).

d) Domenii simetrice

Uneori este convenabil să utilizăm funcțiile F_1, F_2 pentru a simplifica nu ecuația, ci condiția la limită. Astfel, fie că sarcina e aplicată în centrul de greutate al lui \mathcal{D} , în lungul uneia din axele centrale principale de inerție, pe care o alegem drept axă Ox_1 . Întrucît în acest caz avem $\beta_0 = 0$, $\mathcal{R}_2 = 0$, din (16) și (17) urmează

$$\Delta F_0 = -2\mu\tau + \frac{1+2\nu}{1+\nu} (\mathcal{R}_1/l_2) x_2 - F_1'(x_2), \quad (23)$$

$$F_0|_{\mathcal{L}} = \frac{1}{2} (\mathcal{R}_1/l_2) \int_0^s x_1^2 dx_2 + \frac{1}{6} (\mathcal{R}_1/l_2) x_2^3 \Big|_0^s - F_1(x_2) \Big|_{\mathcal{L}},$$

unde am ales $F_2(x_1) \equiv 0$.

Dacă \mathcal{D} are o axă de simetrie, fie ea Ox_2 , și dacă R acționează central în lungul unei *perpendiculare* pe axa de simetrie, așadar ca mai sus după axa Ox_1 , atunci, punînd ecuația frontierei sub forma

$$x_1^2 = g(x_2), \quad (24)$$

este firesc să alegem în (23):

$$F_1(x_2) = \frac{1}{2} (\mathcal{R}_1/l_2) \int_0^s g(x_2) dx_2 + \frac{1}{6} (\mathcal{R}_1/l_2) x_2^3 \Big|_0^s, \quad (25)$$

ceea ce conduce la condiția la limită

$$F_0(x_1, x_2)|_{\mathcal{L}} = 0. \quad (26)$$

Această metodă (propusă de S. Timoshenko) permite să rezolvăm orice problemă de încovoiere pentru secțiuni cu două axe de simetrie perpendiculare.

e) Elipsă (S. Timoshenko și J. Goodier [1], § 108)

Să considerăm consola de secțiune \mathcal{D} mărginită de elipsa

$$x_1^2/a^2 + x_2^2/b^2 = 1. \quad (27)$$

Întrucît în acest caz $\beta_0 = 0$, punînd (27) sub forma

$$x_1^2 = a^2 (1 - x_2^2/b^2), \quad (28)$$

ne situăm în cazul general de mai sus.

Fie că sarcina acționează central, în lungul axei Ox_1 . Din (25) obținem

$$F_1(x_2) = \frac{1}{2} (\mathcal{R}_1/l_2) \left[a^2 x_2 + \frac{1}{3} (1 - a^2/b^2) x_2^3 \right]. \quad (29)$$

Din (23) deducem deci ecuația

$$\Delta F_0(x_1, x_2) = -2\mu\tau + (\mathcal{R}_1/l_2) [a^2/b^2 + \nu/(1+\nu)] x_2, \quad (30)$$

care trebuie rezolvată ținînd seama de condiția la limită (26).

În virtutea celor spuse la finele § 19, avem $\beta_c = 0$; sarcina fiind aplicată central, rezultă

$$\tau = 0, \quad (31)$$

astfel că ecuația (30) devine

$$\Delta F_0 = (\mathcal{R}_1/l_2) [a^2/b^2 + \nu/(1+\nu)] x_2. \quad (32)$$

Pentru a satisface condiția (26), vom căuta soluția sub forma unui produs de funcții care conține în factor ecuația implicită a frontierei (27). Întrucît membrul al doilea din (32) este liniar în x_2 , vom lua

$$F_0(x_1, x_2) = Kx_2(x_1^2/a^2 + x_2^2/b^2 - 1). \quad (33)$$

Introducînd acum (33) în (32), obținem cu ușurință

$$K = \frac{1}{2} [a^2 b^2 / (3a^2 + b^2)] (\mathcal{R}_1/l_2) [a^2/b^2 + \nu/(1+\nu)]. \quad (34)$$

Cu aceasta, funcția $F_0(x_1, x_2)$ — și deci și funcția lui Timoshenko $F = F_0 + F_1(x_2)$ — sînt determinate. Componentele tensiunii se calculează imediat din (14) (unde $c = 0$). Ecuațiile geometrice se integrează de asemenea, după calcule elementare, întrucît componentele tensiunii sînt polinoame.

Pentru o sarcină aplicată central în lungul axei Ox_2 , calculele se repetă analog. Soluția pentru o sarcină centrală oarecare se obține prin suprapunere. Dacă sarcina este aplicată excentric, atunci trebuie să rezolvăm și problema de torsiune, corespunzătoare momentului sarcinii față de origine.

f) Dreptunghi

Să considerăm o consolă de secțiune dreptunghiulară, de frontieră $x_1 = \pm a$, $x_2 = \pm b$. Sarcina este aplicată central, în lungul axei Ox_1 . Evident avem $\tau = 0$, și încovoierea se face fără torsiune. Dar raționamentul precedent nu mai poate fi utilizat, întrucât ecuația frontierei nu poate fi pusă sub forma (24). Din (23) obținem

$$F_{0,2}|_{\mathcal{L}} = \left[\frac{1}{2} (\mathcal{R}_1/l_2) (x_1^2 + x_2^2) - F_1'(x_2) \right] x_2'(s), \quad (35)$$

unde, evident, pe laturile $x_2 = \pm b$ avem $x_2'(s) = 0$. Alegând funcția $F_1'(x_2)$ în așa fel încât paranteza dreaptă din (35) să se anuleze pe laturile $x_1 = \pm a$, căpătăm

$$F_1'(x_2) = \frac{1}{2} (\mathcal{R}_1/l_2) (a^2 + x_2^2), \quad F_1''(x_2) = (\mathcal{R}_1/l_2) x_2, \quad (36)$$

astfel că în definitiv (23) se reduce la

$$\Delta F_0 = [\nu/(1 + \nu)] (\mathcal{R}_1/l_2) x_2, \quad F_{0,2}|_{\mathcal{L}} = 0, \quad (37)$$

iar formulele (14) devin

$$\sigma_{31} = F_{0,2} + \frac{1}{2} (\mathcal{R}_1/l_2) (a^2 - x_1^2), \quad \sigma_{32} = -F_{0,1}. \quad (38)$$

OBSERVAȚIA 1. Teoria elementară a încovoirii barelor de secțiune dreptunghiulară presupune că, pentru o sarcină aplicată central în lungul uneia din axele de simetrie — fie ea Ox_1 — tensiunea tangențială se reduce la componenta σ_{31} , paralelă cu sarcina, distribuită după o lege parabolică, și independentă de x_2 . Aceasta se obține evident din (38) dacă luăm $F_0 \equiv 0$:

$$\sigma_{31} = \frac{1}{2} (\mathcal{R}_1/l_2) (a^2 - x_1^2), \quad \sigma_{32} = 0, \quad (39)$$

— dar o asemenea simplificare nu e în general justificată. (Pentru un caz particular, vezi mai jos (50).) Totuși, formulele (39) — care poartă numele lui D. Jurawski — constituie încă și azi în rezistența materialelor punctul de pornire în studiul problemei încovoirii consolei de secțiune dreptunghiulară, și chiar mai complicată încă. Pentru detalii, vezi de exemplu N. Beliaev [2], § 15.91; Filonenko-Borodici et al. [1], volumul 1, § 5.63.



Fig. 5.20.1

Comparând (37) cu (16), conchidem că determinarea funcției F_0 echivalează cu rezolvarea problemei membranei fixate pe contur și solicitate de o sarcină normală, proporțională cu $-\nu/(1 + \nu) (\mathcal{R}_1/l_2) x_2$ (vezi (16.6) și fig. 5.20.1). De aci urmează că $F_0(x_1, x_2)$ trebuie să fie pară în x_1 și impară în x_2 . Să o căutăm sub forma unei dezvoltări în serie dublă Fourier

$$F_0(x_1, x_2) = \sum_{m,n=0}^{\infty} F_{m;n} \cos \frac{m\pi x_1}{2a} \sin \frac{n\pi x_2}{2b}. \quad (40)$$

Introducând această expresie în ecuația (37), avem

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} \pi^2 F_{m;n} \left(\frac{m^2}{4a^2} + \frac{n^2}{4b^2} \right) \cos \frac{m\pi x_1}{2a} \sin \frac{n\pi x_2}{2b} = - \frac{\nu}{1+\nu} \frac{\mathcal{R}_1}{l_2} x_2. \quad (41)$$

Pentru funcția x_2 obținem ușor dezvoltarea în serie Fourier

$$x_2 = - \frac{2b}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin \frac{n\pi x_2}{b}, \quad -b \leq x_2 \leq b. \quad (42)$$

Ținând seama și de dezvoltarea în serie (15.63), de unde

$$1 = \frac{4}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2m+1} \cos \frac{2m+1}{2a} \pi x_1, \quad -a \leq x_1 \leq a, \quad (43)$$

putem deci scrie (42) sub forma

$$x_2 = - \frac{8b}{\pi^2} \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n}}{(2m+1)n} \cos \left(\frac{2m+1}{2a} \pi x_1 \right) \sin \left(\frac{n\pi x_2}{b} \right), \quad (44)$$

astfel că din (41) urmează prin identificare

$$F_{2m+1;2n} = \frac{8b}{\pi^4} \frac{\nu}{1+\nu} \frac{\mathcal{R}_1}{l_2} \frac{(-1)^{m+n}}{(2m+1)n [(2m+1)^2/4a^2 + n^2/b^2]}$$

și deci soluția este

$$F_0(x_1, x_2) = \frac{8b^3}{\pi^4} \frac{\nu}{1+\nu} \frac{\mathcal{R}_1}{l_2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n} \cos \left(\frac{2m+1}{2a} \pi x_1 \right) \sin \left(\frac{n\pi x_2}{b} \right)}{(2m+1)n [(2m+1)^2(b^2/4a^2) + n^2]}. \quad (45)$$

Prin urmare, din (38) deducem

$$\sigma_{s1} = \frac{1}{2} \frac{\mathcal{R}_1}{l_2} \left[a^2 - x_1^2 + \frac{16b^2}{\pi^3} \frac{\nu}{1+\nu} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n} \cos \left(\frac{2m+1}{2a} \pi x_1 \right) \cos \left(\frac{n\pi x_2}{b} \right)}{(2m+1) [(2m+1)^2(b^2/4a^2) + n^2]} \right], \quad (46)$$

$$\sigma_{s2} = \frac{1}{2} \frac{\mathcal{R}_1}{l_2} \frac{8b^3}{\pi^3 a} \frac{\nu}{1+\nu} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n} \sin \left(\frac{2m+1}{2a} \pi x_1 \right) \sin \left(\frac{n\pi x_2}{b} \right)}{n [(2m+1)^2(b^2/4a^2) + n^2]}.$$

În cazul limită $b \rightarrow 0$, așadar pentru o consolă de secțiune foarte îngustă (o placă dreptunghiulară, acționată în lungul secțiunii sale transversale: fig. 5.20.2), sumele din (46) tind evident spre zero, și soluția elementară (39) rezultă justificată.

Analogia membranei permite studierea stării de tensiune în cazul $2a \ll 2b \ll l$ (secțiune largă; vezi prima fig. 5.20.3). Întrucât F_0 reprezintă deplasarea normală a membranei

sub acțiunea unei sarcini proporționale cu $-[\nu/(1+\nu)](\mathcal{R}_1/l_2)x_2$, se poate considera că în puncte nu prea apropiate de laturile mici $x_2 = \pm b$, F_0 este funcție liniară de x_2 (vezi și fig. 5.20.1). Ecuația (37) se reduce astfel la

$$F_{0,11} = [\nu/(1+\nu)](\mathcal{R}_1/l_2)x_2,$$

de unde

$$F_0 = \frac{1}{2} [\nu/(1+\nu)](\mathcal{R}_1/l_2)(x_1^2 - a^2)x_2. \quad (47)$$

Formulele (38) devin atunci

$$\sigma_{31} = \frac{1}{2} [1/(1+\nu)](\mathcal{R}_1/l_2)(a^2 - x_1^2), \quad \sigma_{32} = -[\nu/(1+\nu)](\mathcal{R}_1/l_2)x_1x_2. \quad (48)$$

În comparație cu (39), constatăm o micșorare a tensiunilor σ_{31} (paralele cu sarcina), și apariția unor tensiuni σ_{32} , care sînt importante pentru $|x_2|$ mare.

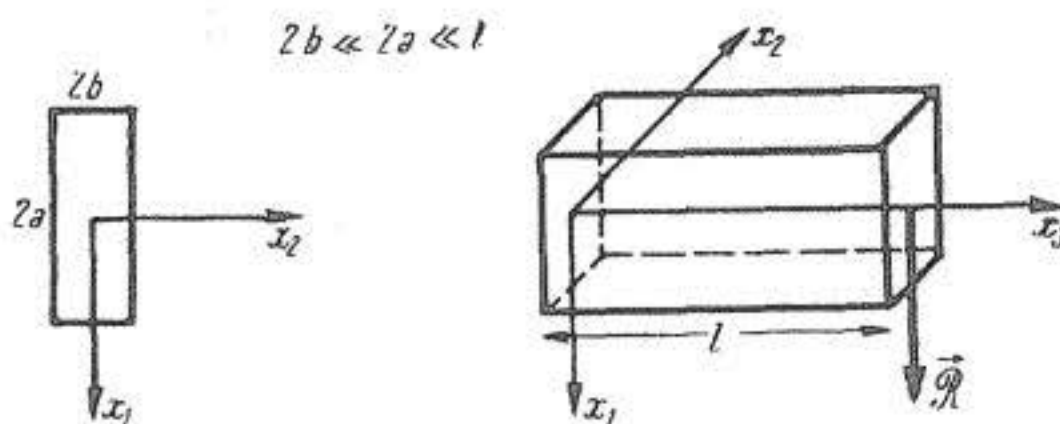


Fig. 5.20.2

În același mod se poate examina și cazul $2b \ll 2a \ll l$. Pentru aceleași motive ca mai sus, admitem că în puncte nu prea apropiate de laturile mici $x_1 = \pm a$, membrana ia o formă cilindrică, astfel că de data aceasta $F_{0,11}$ este neglijabil. Ecuația (37) dă acum

$$F_0 = \frac{1}{6} [\nu/(1+\nu)](\mathcal{R}_1/l_2)x_2(x_2^2 - b^2), \quad (49)$$

de unde

$$\sigma_{31} = \frac{1}{2}(\mathcal{R}_1/l_2) \left\{ a^2 - x_1^2 + [\nu/(1+\nu)] \left(x_2^2 - \frac{1}{3}b^2 \right) \right\}, \quad \sigma_{32} = 0. \quad (50)$$

După cum era de așteptat, corecția față de soluția elementară este în acest caz foarte mică. Pentru detalii, vezi încă S. Timoshenko și J. Goodier [1], § 109.

Dimpotrivă, în celălalt caz-limită, fie el $b \rightarrow \infty$ (placă dreptunghiulară infinită acționată după înălțimea secțiunii sale transversale: figura 5.20.3), formulele (46) își pierd sensul. Ele nu pot fi restabilite nici cu ajutorul teoriei integralei Fourier, întrucât funcția x_2 nu este complet integrabilă pe dreapta nemărginită.

De altfel, în problema antiplană, însăși presupunerea $b \gg l$ nu poate fi acceptată: problema unei astfel de „plăci în consolă” trebuie abordată pe altă cale (vezi mai departe § 6.5, pag. 375).

$$2a \ll l \ll 2b$$

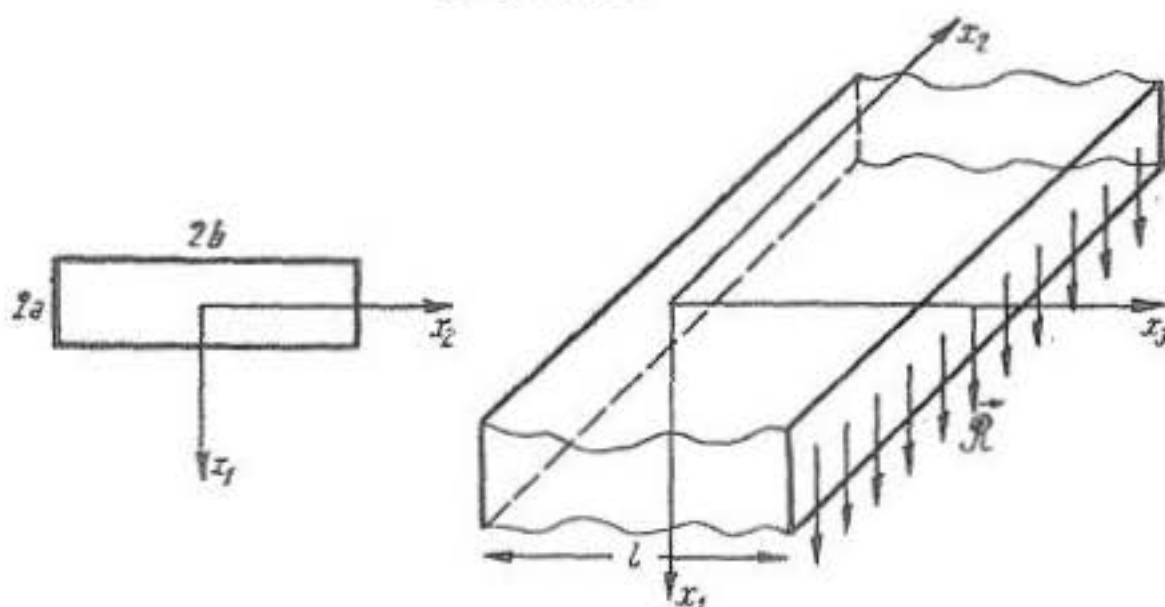


Fig. 5.20.3

g) Semicoroană circulară. Concentrarea tensiunilor

Problema torsiunii pentru bare de secțiune în semicoroană a fost studiată în § 15, exemplul *f*. Aci vom examina problema încovoierii în consolă a unei astfel de bare, sub acțiunea unei sarcini tangențiale, dirijate perpendicular pe axa de simetrie Ox_1 a secțiunii (vezi fig. 5.15.4).

Păstrînd notațiile din § 15, *f*, avem evident

$$D = \frac{1}{2} \pi (R_0^2 - R_1^2) = \frac{1}{2} \pi R_0^2 (1 - k^2), \quad (51)$$

$$\begin{aligned} D \delta_0 &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \exp(i\chi) d\chi \int_{R_1}^{R_0} R^2 dR = -i \exp(i\chi) \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{3} R^3 \Big|_{R_1}^{R_0} = \\ &= \frac{2}{3} (R_0^3 - R_1^3), \end{aligned}$$

de unde

$$\delta_0 = x_1^0 = \frac{4(R_0^3 - R_1^3)}{3\pi(R_0^2 - R_1^2)} = \frac{4}{3\pi} \frac{1 - k^3}{1 - k^2} R_0. \quad (52)$$

Pentru momentele (ne-centrale) de inerție avem, ca și în (A.7.25),

$$J_0 = \iint_D \delta \bar{\delta} dD = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\chi \int_{R_1}^{R_0} R^3 dR = \frac{1}{4} \pi (R_0^4 - R_1^4), \quad (53)$$

$$J = \iint_D \delta^2 dD = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \exp(2i\chi) d\chi \int_{R_1}^{R_0} R^3 dR = 0,$$

de unde deducem

$$J_{11} = J_{22} = \frac{1}{8} \pi (R_0^4 - R_1^4) = \frac{1}{8} \pi R_0^4 (1 - k^4), \quad J_{12} = 0. \quad (54)$$

Făcînd uz de teorema lui Steiner și de valorile (51), (52), obținem de aci (întrucît $x_2^0 = 0$):

$$I_1 = J_{11}, \quad I_2 = J_{22} - (x_1^0)^2 D. \quad (55)$$

Întrucît datele la limită au expresii analitice diferite pe diferitele porțiuni ale frontierei, nu se vede cum s-ar putea face uz de condiția la limită (11.1). În schimb, limitîndu-ne la cazul unei sarcini perpendiculare pe axa de simetrie Ox_1 , funcția lui Timoshenko poate fi găsită.

Întrucît în acest caz avem $R = i \mathcal{R}_2$, din (4.12) urmează

$$\alpha = (2/\delta) (I_0 + I) R = i \alpha_2 = i (\mathcal{R}_2/l_1), \quad c = 0. \quad (56)$$

Să căutăm funcția lui Timoshenko sub forma (15), încercînd totodată să ajungem la o condiție la limită de forma simplă din (26). (Raționamentul din (23)–(26) nu poate fi utilizat, întrucît frontiera este alcătuită din arce de expresii analitice diferite.)

Alegînd $F_1(x_2) = 0$ și derivînd în raport cu arcul s în condiția la limită (17) — unde $\mathcal{R}_1 = \alpha_1 = c = 0$ — obținem

$$F_{0,s}|_{\mathcal{L}} = - \left[\frac{1}{2} (\mathcal{R}_2/l_1) (x_1^2 + x_2^2) + F_2'(x_1) \right] x_1'(s). \quad (57)$$

(Comparînd cu (23), se vede că intervertind x_1 cu x_2 , se schimbă și semnele.) Pe porțiunile rectilinii ale frontierei avem $dx_1 = 0$, astfel că (57) se reduce aci la

$$F_{0,s}|_{x_1=0} = 0. \quad (58)$$

Pentru a verifica (57) pe semicercul exterior, este suficient să alegem

$$F_2'(x_1)|_{R=R_0} = - \frac{1}{2} (\mathcal{R}_2/l_1) (x_1^2 + x_2^2)|_{R=R_0} = - \frac{1}{2} (\mathcal{R}_2/l_1) R_0^2,$$

de unde

$$F_2(x_1) = - \frac{1}{2} (\mathcal{R}_2/l_1) R_0^2 x_1. \quad (59)$$

Pe semicercul interior rămîne astfel

$$F_{0,s}|_{R=R_1} = \frac{1}{2} (\mathcal{R}_2/l_1) (R_0^2 - R_1^2) x_1'(s). \quad (60)$$

Integrînd aceste relații în raport cu arcul s , obținem

$$F_0|_{x_1=0} = 0, \quad F_0|_{R=R_0} = 0, \quad F_0|_{R=R_1} = \frac{1}{2} (\mathcal{R}_2/l_1) (R_0^2 - R_1^2) x_1, \quad (61)$$

ceea ce înlocuiește condiția la limită (26).

Totodată, ținând seama de (59) în (23) (unde intervertim de asemenea semnele: vezi (16)), deducem

$$\Delta F_0 = -2\mu\tau - [(1+2\nu)/(1+\nu)](\mathcal{R}_2/l_1)x_1. \quad (62)$$

Soluția generală a ecuației (62) poate fi căutată ca sumă a soluției generale a ecuației

$$\Delta F_0^1 = -2\mu\tau, \quad (63)$$

cu o soluție particulară a ecuației

$$\Delta F_0^2 = -[(1+2\nu)/(1+\nu)](\mathcal{R}_2/l_1)x_1. \quad (64)$$

Pentru cea dintâi, este firesc să alegem $F_0^1 = \mu\tau f$, unde f este funcția deja determinată în § 15, pag. 256. Întrucât avem $f = 0$ pe \mathcal{L} , rămîne să căutăm acea soluție a ecuației (64), care satisface și condiția la limită (61).

Pentru început, vom considera funcția $A_1 R^2 x_1$, nulă pe componentele rectilinii ale lui \mathcal{L} , și pentru care avem $\Delta(A_1 R^2 x_1) = 8 A_1 x_1$. Verificarea ecuației (64) și a primei condiții (61) este deci asigurată, dacă alegem

$$A_1 = -\frac{1}{8} \frac{1+2\nu}{1+\nu} \frac{\mathcal{R}_2}{l_1} = -\frac{1+2\nu}{\pi(1+\nu)} \frac{\mathcal{R}_2}{R_0^4 - R_1^4}. \quad (65)$$

Pentru a satisface și celelalte două condiții (61), trebuie să adăugăm funcției $A_1 R^2 x_1$ o funcție astfel aleasă, încît ecuația (64) și prima condiție (61) să rămînă verificate — așadar o funcție armonică, și nulă pentru $x_1 = 0$. Luînd

$$F_0^2 = (A_1 R^2 + A_2' + A_3 R^{-2}) x_1, \quad (66)$$

căpătăm din (61) relațiile

$$A_2' + A_3 R_0^{-2} = -A_1 R_0^2, \quad A_2' + A_3 R_1^{-2} = -A_1 R_1^2 + \frac{1}{2}(\mathcal{R}_2/l_1)(R_0^2 - R_1^2),$$

de unde

$$A_2' = -(R_0^2 + R_1^2)A_1 - \frac{1}{2}(\mathcal{R}_2/l_1)R_1^2, \quad A_3 = \left[A_1 + \frac{1}{2}(\mathcal{R}_2/l_1)\right]R_0^2 R_1^2, \quad (67)$$

ceea ce, ținînd seama de valorile lui A_1 și l_1 , dă

$$A_2' = \frac{(1+2\nu)R_0^2 - (3+2\nu)R_1^2}{\pi(1+\nu)(R_0^4 - R_1^4)}\mathcal{R}_2, \quad A_3 = \frac{3+2\nu}{\pi(1+\nu)} \frac{R_0^2 R_1^2}{R_0^4 - R_1^4} \mathcal{R}_2. \quad (68)$$

În expresia finală a funcției F mai intervine însă și funcția $F_2(x_1)$ din (59). Notînd cu A_2 coeficientul termenului în x_1 căpătăm deci

$$A_2 = A_2' - \frac{1}{2}(\mathcal{R}_2/l_1)R_0^2 = -\frac{3+2\nu}{\pi(1+\nu)} \frac{1}{R_0^2 - R_1^2} \mathcal{R}_2. \quad (69)$$

Amintind acum expresia (15.102) a funcției lui Prandtl, putem scrie funcția lui Timoshenko sub forma finală

$$F(x_1, x_2) = -\frac{1}{2}\mu\tau \left[R^2 (1 + \cos 2\chi) + \sum_{h=-\infty}^{\infty} B_{2h+1} R^{2h+1} \cos (2h+1)\chi \right] + (A_1 R^2 + A_2 + A_3 R^{-2}) x_1, \quad (70)$$

unde expresiile (15.117) dau

$$B_{2h+1} = \begin{cases} \frac{16}{\pi} \frac{(-1)^h}{(2h-1)(2h+1)(2h+3)} \frac{1-k^{2h+3}}{1-k^{4h+2}} R_0^{-2h+1} & \text{pentru } h \geq 0, \\ \frac{16}{\pi} \frac{(-1)^h}{(2h-1)(2h+1)(2h+3)} \frac{1-k^{2h-1}}{1-k^{4h+2}} R_1^{-2h+1} & \text{pentru } h \leq 0. \end{cases} \quad (71)$$

Pentru coeficienții A_1, A_2, A_3 dispunem de expresiile (65), (69) și (68), sau încă, folosind și aci notația $k = R_1/R_0$:

$$A_1 = -\frac{1+2\nu}{\pi(1+\nu)} \frac{\mathcal{R}_2}{R_0^4(1-k^4)}, \quad A_2 = -\frac{3+2\nu}{\pi(1+\nu)} \frac{\mathcal{R}_2}{R_0^2(1-k^2)}, \quad (72)$$

$$A_3 = \frac{3+2\nu}{\pi(1+\nu)} \frac{k^2}{1-k^4} \mathcal{R}_2.$$

Rămâne acum de determinat numai τ . În acest scop vom face uz de formula (19.17), așadar vom avea de calculat integralele (19.12). Pentru $C = 2H$ dispunem de formula (15.127). Funcția lui Prandtl va fi folosită aci sub forma ce rezultă din (15.94) și (15.120), iar funcția de torsiune a lui Saint-Venant, sub forma ce rezultă din (15.94) și (15.126).

În felul acesta, din a doua formulă (19.12) obținem mai întâi

$$H_1 = 0, \quad (73)$$

dat fiind că funcțiile $\sin (2h+1)\chi$ ce apar în $r^*(R^*, \chi)$ sînt impare în intervalul $[-\pi/2, \pi/2]$. Mai departe, avem pe rînd

$$H_2 = -R_0^5 \sum_{h=0}^{\infty} \int_k^1 r_{2h+1}^*(R^*) R^{*2} dR^* \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin (2h+1)\chi \exp (i\chi) d\chi, \quad (74)$$

$$H_3 = R_0^5 \sum_{h=0}^{\infty} \int_k^1 f_{2h+1}^*(R^*) R^{*2} dR^* \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos (2h+1)\chi \exp (i\chi) d\chi. \quad (75)$$

Ținînd seama de formulele lui Euler, avem de calculat mai întîi integralele

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \exp [i(2h+1)\chi] \exp (i\chi) d\chi = \begin{cases} 0 & \text{pentru } h \neq -1, \\ \pi & \text{pentru } h = -1, \end{cases} \quad (76)$$

și

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \exp[-i(2h+1)\chi] \exp(i\chi) d\chi = \begin{cases} 0 & \text{pentru } h \neq 0, \\ \pi & \text{pentru } h = 0. \end{cases} \quad (77)$$

Întrucît în (74), (75) intervin numai exponenți h ne-negativi, deducem că integralele corespunzătoare valorilor $h > 0$ sînt nule, în timp ce pentru $h = 0$ căpătăm

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin \chi \exp(i\chi) d\chi = \frac{1}{2} i\pi, \quad \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \chi \exp(i\chi) d\chi = \frac{1}{2} \pi. \quad (78)$$

Cu aceasta, relațiile (74), (75) se reduc la

$$H_2 = -\frac{1}{2} i\pi R_0^5 \int_k^1 r_0^*(R^*) R^{*2} dR^*, \quad H_3 = \frac{1}{2} \pi R_0^5 \int_k^1 f_0^*(R^*) R^{*2} dR^*. \quad (79)$$

Utilizînd aici (15.120), (15.126) și (15.112) pentru $h = 0$, găsim

$$\begin{aligned} \int_k^1 r_0^*(R^*) R^{*2} dR^* &= (2/5\pi) (1 + 5k^2 - 5k^3 - k^5), \\ \int_k^1 f_0^*(R^*) R^{*2} dR^* &= (2/15\pi) (1 - 5k^2 + 5k^3 - k^5), \end{aligned} \quad (80)$$

și deci în definitiv

$$H_2 = -\frac{1}{5} i R_0^5 (1 + 5k^2 - 5k^3 - k^5), \quad H_3 = \frac{1}{15} R_0^5 (1 - 5k^2 + 5k^3 - k^5). \quad (81)$$

Ținînd seama de valorile H_1, H_2, H_3 , relația (19.17) devine acum

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_3^0 &= \mu\tau C + \frac{1}{15} R_0^5 \left[3(1 + 5k^2 - 5k^3 - k^5) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\nu}{1+\nu} (1 - 5k^2 + 5k^3 - k^5) \right] \operatorname{Im} \alpha \end{aligned} \quad (82)$$

(relație valabilă pentru orice sarcină tangențială), unde C este dat de formula (15.127). În cazul de față, din (54)–(56) avem

$$\operatorname{Im} \alpha = \mathcal{R}_2/l_1 = 8 \mathcal{R}_2 / \pi R_0^4 (1 - k^4), \quad \mathcal{M}_3^0 = x_1^a \mathcal{R}_2, \quad (83)$$

unde x_1^a este abscisa punctului în care $i\mathcal{R}_2$ intersectează Ox_1 (vezi (2.3)).

Odată cu determinarea lui τ din (82), funcția (70) este efectiv cunoscută, iar formulele (14) ne dau componentele tensiunii

$$\sigma_{31} = F_{,2}, \quad \sigma_{32} = -F_{,1} - \frac{1}{2} (\mathcal{R}_2/l_1) (x_1^2 + x_2^2). \quad (84)$$

Este adesea convenabilă transcrierea funcției (70) sub forma complexă

$$F(\delta, \bar{\delta}) = \mu\tau f(\delta, \bar{\delta}) + \frac{1}{2} (A_1 \delta \bar{\delta} + A_2 + A_3 / \delta \bar{\delta}) (\delta + \bar{\delta}), \quad (85)$$

unde $f(\delta, \bar{\delta})$ este dat în (15.119). Formula (12.6) se scrie acum

$$T(\delta, \bar{\delta}) = -2i \mu\tau f_{,\bar{\delta}} - i [A_1 (\delta^2 + 2\delta \bar{\delta}) + A_2 - A_3 \bar{\delta}^{-2}] - \frac{1}{2} i \alpha_2 \delta \bar{\delta}, \quad (86)$$

unde primul termen din membrul al doilea este dat de (15.121). Din (14.7) avem și

$$-2i \mu\tau f_{,\bar{\delta}} = \mu\tau (\bar{\psi}' + i\delta). \quad (87)$$

După cum se vede din (85), termenii ce deosebesc funcția de încovoiere de funcția de torsiune au (în exemplul de față) caracter elementar. Scriind F din (85) sub forma (19.27), putem separa aci un termen corespunzător încovoierii fără torsiune, și un termen torsional, al cărui coeficient se determină din (19.28).

Pentru a găsi τ_c și δ_c , vom face uz de (19.18) și (19.20). Avem

$$\mu\tau_c = \frac{1}{4} [\nu / (1 + \nu)] i x_1^0 (\alpha - \bar{\alpha}), \quad (88)$$

și deci din (82) urmează

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_c = \left\{ \frac{\nu}{3\pi(1+\nu)} R_0 \frac{1-k^3}{1-k^2} C - \frac{R_0^5}{30(1+\nu)} [(3+4\nu)(1-k^5) + \right. \\ \left. + 5(3+2\nu)k^2(1-k)] \right\} i(\alpha - \bar{\alpha}). \end{aligned} \quad (89)$$

Întrucît din (54)–(56) avem

$$\partial(\alpha - \bar{\alpha}) / \partial R = (2/\delta) (l_0 + \bar{l}) = 1/l_1 = 8/\pi R_0^4 (1 - k^4), \quad (90)$$

deducem în definitiv

$$\begin{aligned} \delta_c = x_1^c = \frac{8}{15\pi(1+\nu)} \frac{R_0}{1-k^4} \left[(3+4\nu)(1-k^5) + \right. \\ \left. + 5(3+2\nu)k^2(1-k) - \frac{10\nu}{\pi} \frac{1-k^3}{1-k^2} \frac{C}{R_0^4} \right]. \end{aligned} \quad (91)$$

OBSERVAȚIA 2. În exemplul de față avem $\bar{R} = -R$; coeficientul α este însă funcție de cele două variabile R, \bar{R} , și derivarea trebuie efectuată în consecință; dacă am înlocui \bar{R} cu $-R$ și am deriva apoi în raport cu R , rezultatul ar fi evident eronat.

OBSERVAȚIA 3. Condiția ca sarcina să realizeze încovoierea fără torsiune, este ca axa centrală a sistemului (de ecuație $\mathcal{R}_2 x_1^r - \mathcal{R}_1 x_2^r - \mathcal{M}_3^0 = 0$) să treacă prin centrul de încovoiere.

Întrucît aci avem $x_2^e = 0$, rezultă $\mathcal{M}_3^0 = \mathcal{R}_2 x_1^e$. Aceasta este o condiție de legătură între momentul resultant față de origine, și componenta după Ox_2 a rezultantei. Componenta după Ox_1 a rezultantei poate fi oarecare — ceea ce era de așteptat, în virtutea simetriei secțiunii (vezi finele § 19).

Soluția obținută permite considerarea a două cazuri particulare importante: $k \rightarrow 0$, și $k \rightarrow 1$. Primul este cazul semicercului cu o slăbire semicirculară în origine. Soluția corespunzătoare se obține luînd $k \rightarrow 0$ în coeficienții calculați mai sus.

Se poate obține de aci și soluția problemei semicercului *fără* o astfel de slăbire. În acest caz trebuie să considerăm în (70) numai indici $h \geq 0$, și să luăm $k = 0$ și $h \geq 0$ în (71), (72). Pentru a ne convinge de aceasta, este suficient să reluăm raționamentul care a condus de la (62) la (70), să considerăm funcția lui Prandtl pentru *semicerc*, și să luăm în (66) $A_3 = 0$; din (61), ecuația pentru $R = R_1$ dispăre, iar cea care corespunde valorii $R = R_0$ dă pentru A'_2 aceeași valoare cu cea care rezultă din (68) pentru $R_1 \rightarrow 0$. Tensiunea tangențială se scrie deci tot sub forma (86), unde însă primul termen din membrul al doilea este dat de (15.121) *fără* termenii corespunzători puterilor negative; termenul în A_3 nu există, iar cei rămași se calculează ținînd seama că $R_1 = k = 0$ (vezi (54), (56), (72) și (83)).

Gradul de torsiune la încovoiere pentru semicerc este dat de (82), (83):

$$\mathcal{M}_3^0 = \mu \tau \zeta + (8/15 \pi) [(3 + 4\nu)/(1 + \nu)] R_0 \mathcal{R}_2, \quad (92)$$

unde amintim că din (15.129) urmează

$$C = (8/\pi) 0,1168 R_0^4. \quad (93)$$

Aceste relații sînt valabile atît în cazul $k = 0$, cît și pentru $k \rightarrow 0$.

Utilizînd (93) în (91), obținem ușor pentru semicerc

$$\beta_c = (8/5 \pi) R_0 [1 + 0,018 \nu/(1 + \nu)], \quad (94)$$

de unde, întrucît avem $0 < \nu < \frac{1}{2}$, urmează

$$0,509 R_0 < \beta_c < 0,515 R_0. \quad (95)$$

Dat fiind că pentru $k = 0$, din (52) avem

$$\beta_0 = (4/3 \pi) R_0 = 0,424 R_0, \quad (96)$$

se vede că $\beta_c \neq \beta_0$. Același rezultat rămîne valabil în cazul $k \rightarrow 0$.

Ca și în problema torsiunii, constatăm că funcția F pentru semicerc (precum și parametrii globali τ_c , β_c și C) se obține prin trecere la limită pentru $k \rightarrow 0$ în soluția pentru semicoroană. Dar, ca și în cazul torsiunii, apare și aci fenomenul de concentrare locală a tensiunilor, care deosebește cazurile $k = 0$ și $k \rightarrow 0$.

Pentru a pune acest fapt în evidență, vom face uz de expresiile (85) și (86). Considerînd un punct $z = R_1 \exp(i\chi)$ și făcînd $R_1 \rightarrow 0$, vom obține pentru primul termen din (86) valoarea (15.131). Din (83) și (72) urmează că α_2 , A_1 și A_2 rămîn mărginiți pentru $R_1 \rightarrow 0$, în timp ce A_3 tinde spre zero. De aci conchidem

$$\begin{aligned} \lim_{R_1 \rightarrow 0} (A_1 z^2 + 2 A_1 \bar{z} z + A_2 - A_3 \bar{z}^{-2})|_{z = R_1 \exp(i\chi)} = \\ = -\frac{3 + 2\nu}{\pi(1 + \nu)} \frac{\mathcal{R}_2}{R_0^2} [1 + \exp(2i\chi)]. \end{aligned} \quad (97)$$

Introducînd acum (15.131) și (97) în (86), obținem în cazul-limită al semicoroanei pentru $R_1 \rightarrow 0$ (vezi și § 15, pag. 259):

$$\tau(0,0;\chi) = \left[-\frac{8}{3\pi} \mu \tau R_0 + \frac{3 + 2\nu}{\pi(1 + \nu)} \frac{\mathcal{R}_2}{R_0^2} \right] i [1 + \exp(2i\chi)]. \quad (98)$$

Introducînd aci pe $\mu\tau$ din (92), (93), deducem

$$\tau(0,0;\chi) = \left[-2,85 \frac{\mathcal{M}_3^0}{R_0^3} + \left(2,41 + 0,17 \frac{\nu}{1 + \nu} \right) \frac{\mathcal{R}_2}{R_0^2} \right] i [1 + \exp(2i\chi)]. \quad (99)$$

Dacă repetăm acum același raționament pentru semicerc, ținînd seama că formulele (92), (93) rămîn valabile, că (15.131) se înlocuiește cu (15.132), iar termenul în A_3 dispăre, obținem în loc de (99):

$$\tau(0,0) = \left[-2,85 \frac{\mathcal{M}_3^0}{R_0^3} + \left(2,41 + 0,17 \frac{\nu}{1 + \nu} \right) \frac{\mathcal{R}_2}{R_0^2} \right] i. \quad (100)$$

Cele spuse în § 15, pag. 259 pentru torsiune, rămîn deci valabile atît pentru componenta torsională, cît și pentru cea de încovoiere (independentă de τ) a tensiunii tangențiale complexe.

OBSERVAȚIA 4. Apariția persistentă a termenului $\exp(2i\chi)$ este legată de configurația rotundă: în toate cazurile examinate pînă aci, punctele unghiulare ale lui \mathcal{L} sînt intersecții ale unor arce analitice ce formează un unghi egal cu $\pi/2$.

Trecînd acum la celălalt caz-limită ($\varepsilon = 1 - k \rightarrow 0$: secțiune în semicoroană cu pereți subțiri), și reținînd termeni pînă la puterea a doua a grosimii reduse ε , obținem mai întîi din (83):

$$\alpha_2 = \frac{2 \mathcal{R}_2}{\pi R_0^4 \varepsilon} \left(1 + \frac{3}{2} \varepsilon + \frac{5}{4} \varepsilon^2 \right), \quad (101)$$

iar din (72):

$$\begin{aligned} A_1 &= -\frac{1+2\nu}{\pi(1+\nu)} \frac{\mathcal{R}_2}{4R_0^4\varepsilon} \left(1 + \frac{3}{2}\varepsilon + \frac{5}{4}\varepsilon^2\right), \\ A_2 &= -\frac{3+2\nu}{\pi(1+\nu)} \frac{\mathcal{R}_2}{2R_0^2\varepsilon} \left(1 + \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{4}\varepsilon^2\right), \\ A_3 &= \frac{3+2\nu}{\pi(1+\nu)} \frac{\mathcal{R}_2}{4\varepsilon} \left(1 - \frac{1}{2}\varepsilon - \frac{3}{4}\varepsilon^2\right). \end{aligned} \quad (102)$$

Mai departe, din (15.135), (73) și (81) avem

$$\begin{aligned} C = 2H &= \frac{1}{3}\pi R_0^4\varepsilon^3, \quad H_1 = 0, \\ H_2 &= -2iR_0^5\varepsilon \left(1 - 2\varepsilon + \frac{3}{2}\varepsilon^2\right), \quad H_3 = \frac{1}{3}R_0^5\varepsilon^3, \end{aligned} \quad (103)$$

iar din (88) deducem τ_c pentru încovoierea fără torsiune:

$$\mu\tau_c = -\frac{2\nu}{\pi^2(1+\nu)} \frac{\mathcal{R}_2}{R_0^3\varepsilon} \left(1 + \varepsilon + \frac{7}{12}\varepsilon^2\right). \quad (104)$$

Formula (91) dă afixul centrului de încovoiere sub forma

$$\beta_c = x_1^c = (4R_0/\pi) \left(1 - \frac{1}{2}\varepsilon - \frac{1}{4}\varepsilon^2\right). \quad (105)$$

Prin urmare, pentru ε suficient de mic, avem $\beta_c > R_0$, adică centrul de încovoiere este situat chiar în afara secțiunii, și anume, contrar centrului de greutate, spre exteriorul cercului exterior.

Ținând seama de (103), formula (82) devine acum

$$\mathcal{M}_3^0 = \frac{1}{3}\pi\mu\tau R_0^4\varepsilon^3 + R_0^5 \left\{ 2\varepsilon \left(1 - 2\varepsilon + \frac{3}{2}\varepsilon^2\right) + \frac{1}{3}[\nu/(1+\nu)]\varepsilon^3 \right\} \text{Im}\alpha, \quad (106)$$

de unde, ținând seama de (101) și (104):

$$\mathcal{M}_c = (4/\pi)R_0\mathcal{R}_2 \left(1 - \frac{1}{2}\varepsilon - \frac{1}{4}\varepsilon^2\right) + [\nu/3\pi(1+\nu)]R_0\mathcal{R}_2\varepsilon^3 \left(1 + \frac{4}{3}\varepsilon\right), \quad (107)$$

unde al doilea termen trebuie neglijat, iar cel dintâi coincide cu produsul dintre sarcina \mathcal{R}_2 și abscisa centrului de încovoiere.

Relația (19.28) devine aci

$$\mathcal{M}_3^0 - \mathcal{M}_e = \frac{1}{3} \pi R_0^4 \varepsilon^3 \mu (\tau - \tau_e), \quad (108)$$

ceea ce permite determinarea lui τ pentru orice \mathcal{M}_3^0 dat.

Formulele pentru τ și \mathfrak{z}_e sînt deosebit de utile atunci cînd problema *torsiunii* se rezolvă ușor. Astfel, soluția aproximativă a problemei torsiunii pentru secțiunea în formă de semi-coroană circulară (vezi §16, Observația de la pag. 276), va putea fi luată sub forma (16.43), (16.41):

$$r(x_1, x_2) = -\gamma\chi, \quad f(x_1, x_2) = \frac{1}{2} R_0^2 (1 - R^{*2}) + \gamma \ln R^*. \quad (109)$$

Introducînd aceste expresii aproximative în (19.12), deducem pe rînd:

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} C = \frac{1}{2} R_0^4 \int_k^1 (1 - R^{*2}) R^* dR^* \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\chi + R_0^2 \gamma \int_k^1 R^* \ln R^* dR^* \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\chi, \\ H_1 &= -R_0^2 \gamma \int_k^1 R^* dR^* \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \chi d\chi = 0, \\ H_2 &= -R_0^3 \gamma \int_k^1 R^{*2} dR^* \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \exp(i\chi) \chi d\chi, \\ H_3 &= \frac{1}{2} R_0^5 \int_k^1 (1 - R^{*2}) R^{*2} dR^* \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \exp(i\chi) d\chi + \\ &+ R_0^3 \gamma \int_k^1 R^{*2} \ln R^* dR^* \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \exp(i\chi) d\chi. \end{aligned} \quad (110)$$

Or, avem evident

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \exp(i\chi) d\chi = 2, \quad \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \exp(i\chi) \chi d\chi = 2i, \quad (111)$$

și încă, utilizînd (16.48) și notațiile (15.93):

$$\int_k^1 R^* \ln R^* dR^* = -\frac{1}{4} [1 + k^2 (2 \ln k - 1)] = -\frac{1}{2} \varepsilon^2 \left(1 - \frac{1}{3} \varepsilon\right), \quad (112)$$

$$\int_k^1 R^{*2} \ln R^* dR^* = -\frac{1}{9} [1 + k^3 (3 \ln k - 1)] = -\frac{1}{2} \varepsilon^2 (1 - \varepsilon).$$

Ținînd seama și de valoarea din (16.50) a constantei γ :

$$\gamma = \alpha^2 \left(1 - \varepsilon + \frac{1}{6} \varepsilon^2\right), \quad (113)$$

deducem din (110) valorile aproximative ale constantelor C, H_1, H_2, H_3 — care coincid cu valorile exacte deja obținute în (103).

Prin urmare, soluția destul de grosier *aproximativă* (109) a problemei torsiunii dă pentru τ și δ_e valorile *exacte* — dacă ε este suficient de mic ($\varepsilon \leq 0,2$). Evident, aceasta se datorește faptului că τ și δ_e depind de funcția de torsiune numai sub o formă *integrală* (vezi § 19, pag. 308; § 16, pag. 270).

h) Rolul tensiunilor de torsiune în încovoiere

Să punem în evidență (cu titlu de exemplu) ponderea tensiunilor ce apar dacă sarcina este aplicată *în afara* centrului de încovoiere.

Vom nota — *numai în exemplul de față* — cu T_0 tensiunea tangențială de încovoiere fără torsiune, și cu T — tensiunea tangențială totală dată de (8.10).

În cazul cercului, o sarcină \mathcal{R}_1 a cărei linie de acțiune este paralelă cu Ox_1 și trece prin $(0, x_2^a)$, poate fi înlocuită cu o sarcină \mathcal{R}_1 aplicată în origine, *plus* un cuplu de moment $\mathcal{M}_3^0 = -\mathcal{R}_1 x_2^a$. Întrucât avem $\delta_e = \delta_0 = 0$, $\tau_e = 0$, sarcina \mathcal{R}_1 aplicată în origine dă încovoiere fără torsiune, în timp ce sarcina \mathcal{M}_3^0 provoacă torsiunea barei.

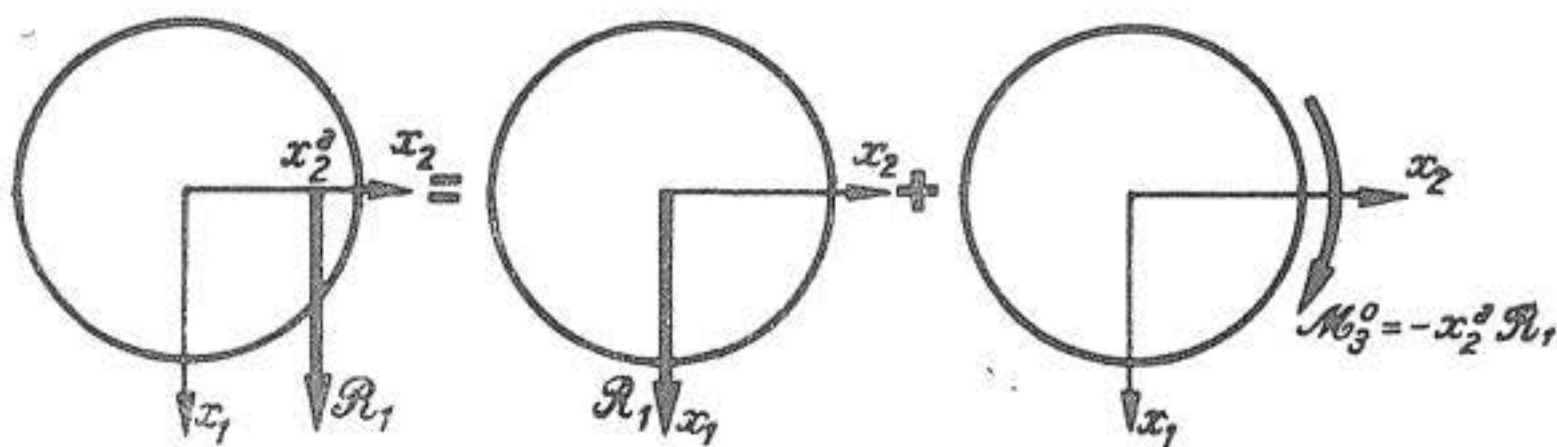


Fig. 5.20.4

În cazul semicoroanei circulare, o sarcină \mathcal{R}_2 paralelă cu Ox_2 și a cărei linie de acțiune trece prin $(x_1^a, 0)$, poate fi înlocuită cu o sarcină \mathcal{R}_2 ce trece prin origine *plus* un cuplu de moment $\mathcal{M}_3^0 = \mathcal{R}_2 x_1^a$.

Din această figură, este intuitiv limpede că sarcina \mathcal{R}_2 aplicată în origine (care *nu* este centru de încovoiere) produce și torsiune (pentru sarcina din figură, în sensul indicat de săgeata subțire). Cuplul de moment $\mathcal{R}_2 x_1^a$ produce (în cazul din figură, unde $x_1^a > 0$) torsiune în sensul opus. Pentru o anumită valoare x_1^a , torsiunea totală dispăre: aceasta este desigur tocmai valoarea $x_1^a = x_1^c$.

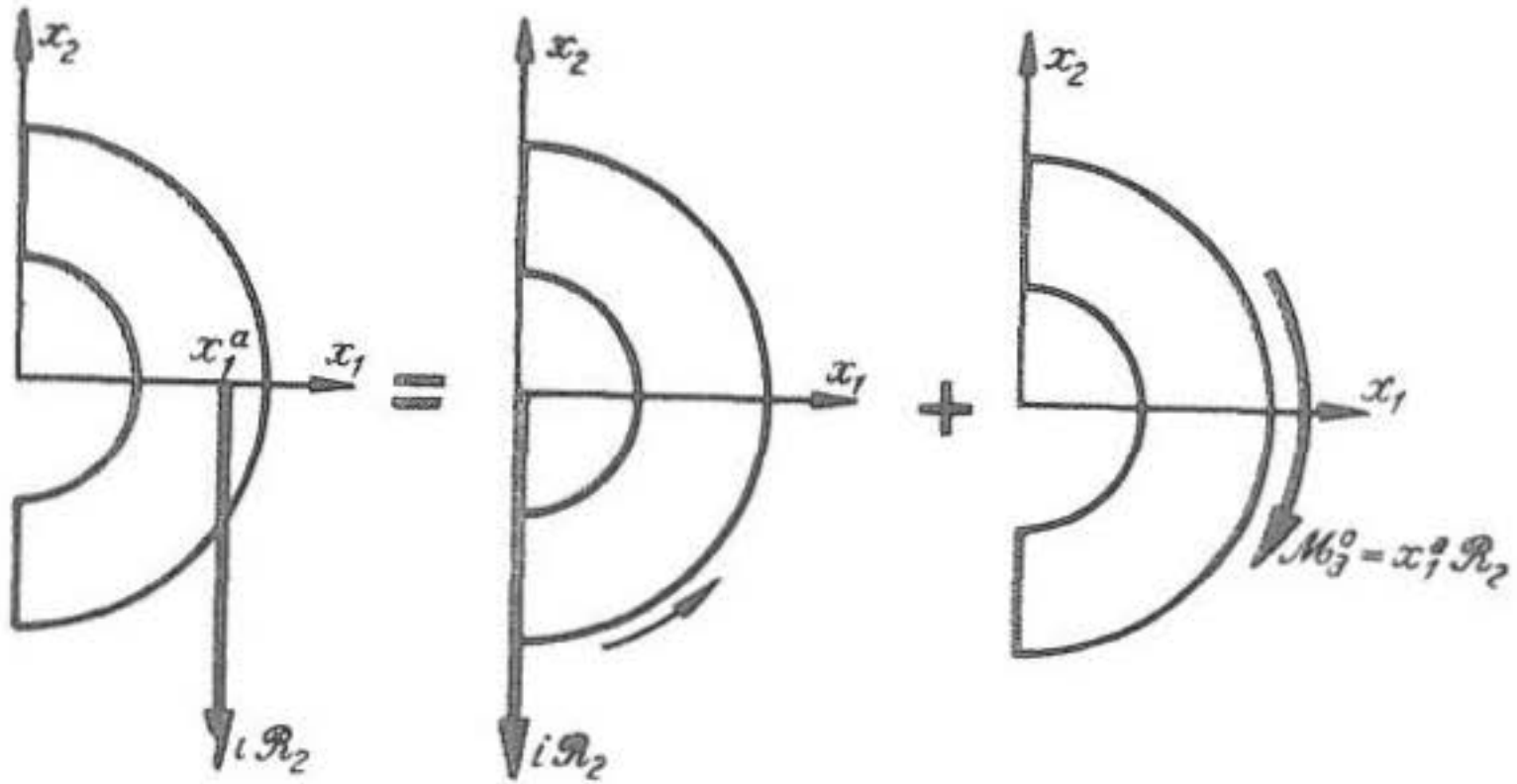


Fig. 5.20.5

Cazul secțiunii circulare. Luând $k = 0$ în (11), obținem pentru o sarcină centrală \mathcal{R}_1 :

$$T_0(\zeta, \bar{\zeta}) = P [(3 + 2\nu) R_0^2 - (1 + 2\nu) \zeta^2 - 2\zeta\bar{\zeta}], \quad (114)$$

unde am notat

$$P = \mathcal{R}_1 / [2\pi(1 + \nu) R_0^4]. \quad (115)$$

Întrucît pentru cerc avem $r(x_1, x_2) \equiv 0$ și întrucît $c = 0$, în cazul sarcinii \mathcal{R}_1 aplicate excentric avem de adăugat la această expresie numai termenul $i\mu\tau\zeta$ (vezi (8.10)). Din (19.8) deducem $C_1 = C_2 = C_3 = 0$, iar din (19.9) urmează și $C_4 = 0$. Prin urmare, formula (19.10) se reduce la $\mathcal{M}_3^0 = \mu\tau C$, de unde

$$\mu\tau = -2\mathcal{R}_1 x_2^a / \pi R_0^4. \quad (116)$$

Tensiunea tangențială corespunzătoare cazului general este deci

$$T(\zeta, \bar{\zeta}) = P [(3 + 2\nu) R_0^2 - 4i(1 + \nu) x_2^a \zeta - (1 + 2\nu) \zeta^2 - 2\zeta\bar{\zeta}]. \quad (117)$$

Să determinăm punctul în care modulul $|T_0|$ (sau pătratul său $g = T_0 \bar{T}_0$) își atinge maximul. Pentru aceasta, din (114) avem mai întâi

$$g(\zeta, \bar{\zeta}) = P^2 [(3 + 2\nu)^2 R_0^4 - (1 + 2\nu)(3 + 2\nu) R_0^2 (\zeta^2 + \bar{\zeta}^2) - 4(3 + 2\nu) R_0^2 \zeta\bar{\zeta} - 2(1 + 2\nu)(\zeta^3\bar{\zeta} + \zeta\bar{\zeta}^3) + (5 + 4\nu + 4\nu^2) \zeta^2\bar{\zeta}^2]. \quad (118)$$

Prin derivare în raport cu ζ (vezi (A.4.17)), obținem de aci ecuația

$$2(1 + 2\nu)(3 + 2\nu) R_0^2 \bar{\zeta} + 4(3 + 2\nu) R_0^2 \bar{\zeta} - 6(1 + 2\nu) \zeta^2 \bar{\zeta} - 2(1 + 2\nu) \bar{\zeta}^3 - 2(5 + 4\nu + 4\nu^2) \zeta \bar{\zeta}^2 = 0, \quad (119)$$

care posedă soluția evidentă $\bar{z} = 0$. Pentru a găsi eventuale alte soluții, vom lua aci $\bar{z} = R \exp(i\chi)$, vom împărți la R , și vom separa părțile reală și imaginară. După calcule elementare, obținem sistemul:

$$\begin{aligned} \{(3 + 2\nu)^2 R_0^2 - R^2 [5 + 4\nu + 4\nu^2 + 4(1 + 2\nu) \cos^2 \chi]\} \cos \chi &= 0, \\ \{(1 - 2\nu)(3 + 2\nu) R_0^2 - R^2 [5 + 4\nu + 4\nu^2 - 4(1 + 2\nu) \sin^2 \chi]\} \sin \chi &= 0. \end{aligned} \quad (120)$$

Luând în prima ecuație $\cos \chi = 0$, obținem din cea de a doua o valoare $R^2 > R_0^2$, ceea ce nu are sens. Luând în cea de a doua $\sin \chi = 0$, căpătăm din cea dintâi $R = \pm R_0$, așadar tocmai punctele-frontieră în care axa Ox_1 intersectează cercul. În fine, pentru $\cos \chi \neq 0$, $\sin \chi \neq 0$, deducem din nou $R^2 > R_0^2$, ceea ce nu are sens.

Rămân așadar de considerat valorile $\bar{z} = 0$, $\bar{z} = \pm R_0$. Făcînd uz de formulele (A.4.16), (A.4.19) și (118), conchidem că punctul $\bar{z} = 0$ este un extrem. Din a doua formulă (A.4.20) rezultă că acesta este un maximum. Din (115) și (118) obținem valoarea sa:

$$|T_0|_{\max} = T(0, 0) = \frac{3 + 2\nu}{2(1 + \nu)} \frac{\mathcal{R}_1}{\pi R_0^2}. \quad (121)$$

Pe de altă parte, din (114) se vede direct că $T_0(\pm R_0, \pm R_0) = 0$, astfel că $\bar{z} = \pm R_0$ sînt puncte de minimum pentru $|T_0|$.

În ce privește valorile pe frontieră, din (114) avem

$$T_0|_{\mathcal{L}} = \frac{1 + 2\nu}{2\pi(1 + \nu)} \frac{\mathcal{R}_1}{R_0^2} [1 - \exp(2i\chi)], \quad (122)$$

de unde

$$|T_0|_{\mathcal{L}}^2 = \frac{(1 + 2\nu)^2}{4\pi^2(1 + \nu)^2} \frac{\mathcal{R}_1^2}{R_0^4} 4 \sin^2 \chi. \quad (123)$$

Evident, această funcție își atinge maximul pentru $\chi = \pm \pi/2$, unde

$$|T_0|_{\max}^{\mathcal{L}} = \frac{1 + 2\nu}{1 + \nu} \frac{\mathcal{R}_1}{\pi R_0^2}. \quad (124)$$

Comparînd (121) cu (124), rezultă că maximum maximorum este *cel din origine*.

Mai departe, din (114) — (117) avem pentru sarcina excentrică

$$T(\bar{z}, \bar{z}) = T_0(\bar{z}, \bar{z}) - 2i(\mathcal{R}_1 x_2^2 / \pi R_0^4) \bar{z}. \quad (125)$$

Nu vom relua pentru această expresie calculele de mai sus, și ne vom mărgini la a considera tensiunile tangențiale într-un punct-frontieră în care vectorii T_0 și T au același suport, cum este cazul în punctele $\chi = \pi/2$. Obținem aci

$$T_0 \Big|_{\mathcal{L}}^{\chi=\pm\pi/2} = \frac{1 + 2\nu}{1 + \nu} \frac{\mathcal{R}_1}{\pi R_0^2}, \quad T \Big|_{\mathcal{L}}^{\chi=\pm\pi/2} = \left(\frac{1 + 2\nu}{1 + \nu} \pm \frac{2x_2^2}{R_0} \right) \frac{\mathcal{R}_1}{\pi R_0^2}. \quad (126)$$

Dacă de pildă $x_2^a = R_0$, în punctul-frontieră $\bar{z} = iR_0$ obținem astfel

$$|T| = \frac{3 + 4\nu}{1 + \nu} \frac{\mathcal{R}_1}{\pi R_0^2}, \quad (127)$$

ceea ce depășește de 2,5 ori valoarea $|T_0| \frac{\mathcal{L}}{\max}$ din (124), și de 2 ori valoarea $|T_0|$ din (121).

OBSERVAȚIA 5. Pentru determinarea punctului celui mai periclitat, trebuie desigur să ținem seama și de componenta σ_{33} (vezi (10.13) și (10.14)), care nu depinde însă de punctul de aplicare al sarcinii R .

Cazul secțiunii în formă de semicerc cu pereți subțiri. Soluția problemei este dată în (86), unde trebuie să ținem seama de (101)–(108). Pentru a calcula τ , putem face uz de soluția aproximativă (109). Analogia membranei arată că această soluție rămâne valabilă și pentru calculul tensiunilor — la distanță suficientă de porțiunile rectilinii ale lui \mathcal{L} . Este de preferat să utilizăm aici funcția de torsiune sub forma (16.43), și să înlocuim primul termen din (86) cu ajutorul relației (87). În felul acesta, obținem :

$$\begin{aligned} T(\bar{z}, \bar{\bar{z}}) \cong i\mu\tau \left[\bar{z} - R_0^2 \left(1 - \varepsilon + \frac{1}{6} \varepsilon^2 \right) \frac{1}{\bar{\bar{z}}} \right] + \\ + \frac{i\mathcal{R}_2}{\pi(1+\nu)\varepsilon} \left\{ \frac{1 + \frac{3}{2}\varepsilon + \frac{5}{4}\varepsilon^2}{4R_0^4} [(1+2\nu)\bar{z}^2 - 2\bar{z}\bar{\bar{z}}] + \right. \\ \left. + (3+2\nu) \frac{1 + \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{4}\varepsilon^2}{2R_0^2} + \frac{1}{4}(3+2\nu) \left(1 - \frac{1}{2}\varepsilon - \frac{3}{4}\varepsilon^2 \right) \frac{1}{\bar{\bar{z}}^2} \right\}. \quad (128) \end{aligned}$$

Termenul independent de τ tinde la infinit ca ε^{-1} pentru $\varepsilon \rightarrow 0$.

Dacă momentul sarcinii față de origine este \mathcal{M}_c (așadar, dacă axa centrală trece prin \bar{z}_0 și deci $\tau = \tau_c$), atunci din (104) conchidem că coeficientul termenului torsional (înlocuit în (128) prin expresia elementară provenită din soluția aproximativă) nu crește mai repede decât ε^{-1} pentru $\varepsilon \rightarrow 0$.

Pentru a evalua contribuția termenului torsional în (128), vom scrie

$$\bar{z} - R_0^2 \left(1 - \varepsilon + \frac{1}{6} \varepsilon^2 \right) (1/\bar{\bar{z}}) = R \left[1 - \left(1 - \varepsilon + \frac{1}{6} \varepsilon^2 \right) (R_0^2/R^2) \right] \exp(i\chi), \quad (129)$$

unde, întrucât avem $1 - \varepsilon \leq R/R_0 \leq 1$, deducem că

$$- \varepsilon \left(1 + \frac{7}{6} \varepsilon \right) \leq 1 - \left(1 - \varepsilon + \frac{1}{6} \varepsilon^2 \right) (R_0^2/R^2) \leq \varepsilon \left(1 - \frac{1}{6} \varepsilon \right). \quad (130)$$

Produsul $i\mu\tau f_{\bar{z}}$, înlocuit cu primul termen din (128), rămâne deci mărginit pentru $\varepsilon \rightarrow 0$, astfel că numai tensiunile de încovoiere propriu-zise tind la infinit cu ε^{-1} .

Pe de altă parte, din (108) rezultă că, dacă avem $\mathcal{M}_3^0 \neq \mathcal{M}_c$, factorul $\mu(\tau - \tau_c)$ crește ca ε^{-3} pentru $\varepsilon \rightarrow 0$, astfel că termenul datorat torsiunii crește în acest caz ca ε^{-2} , prin urmare,

cu mult mai repede decât termenii cu caracter elementar din (86), și de asemenea cu mult mai repede decât în exemplul mai sus examinat al secțiunii circulare. Din (108) obținem acum

$$\mu(\tau - \tau_c) = \frac{3}{\pi R_0^4 \varepsilon^3} \left[\mathcal{R}_2 x_1^a - \frac{4 \mathcal{R}_2 R_0}{\pi} \left(1 - \frac{1}{2} \varepsilon - \frac{1}{4} \varepsilon^2 \right) \right]. \quad (131)$$

Pentru $x_1^a = x_1^c$, avem evident de aci $\tau = \tau_c$ (încovoiere fără torsiune). Să considerăm drept exemplu cazul $x_1^a = 0$ (sarcina aplicată în origine). Din (104) și (131) avem acum

$$\mu \tau_c = \frac{2\nu}{\pi^2 (1 + \nu)} \frac{\mathcal{R}_2}{R_0^3 \varepsilon} \left(1 + \varepsilon + \frac{7}{12} \varepsilon^2 \right), \quad (132)$$

$$\mu(\tau - \tau_c) = - \frac{12 \mathcal{R}_2}{\pi^2 R_0^3 \varepsilon^3} \left(1 - \frac{1}{2} \varepsilon - \frac{1}{4} \varepsilon^2 \right).$$

Să ne mărginim la a calcula $T(\xi, \dot{\xi})$ în punctul $\xi = R_0$. Grupul termenilor independenți de τ din (128) are în acest punct suma

$$\frac{2i \mathcal{R}_2}{\pi R_0^2 \varepsilon} \left[1 + \frac{\nu}{2(1 + \nu)} \varepsilon - \frac{1 - \nu}{4(1 + \nu)} \varepsilon^2 \right]. \quad (133)$$

Mai departe, din (128) obținem pentru termenul ce are pe τ în factor, valoarea $i \mu \tau R_0 \varepsilon (1 - \varepsilon/6)$, astfel că din (132) urmează

$$i \mu \tau_c R_0 \varepsilon \left(1 - \frac{1}{6} \varepsilon \right) = i \frac{2\nu}{\pi^2 (1 + \nu)} \frac{\mathcal{R}_2}{R_0^2} \left(1 + \frac{5}{6} \varepsilon + \frac{5}{12} \varepsilon^2 \right), \quad (134)$$

$$i \mu (\tau - \tau_c) R_0 \varepsilon \left(1 - \frac{1}{6} \varepsilon \right) = - i \frac{12 \mathcal{R}_2}{\pi^2 R_0^2} \frac{1}{\varepsilon^2} \left(1 - \frac{2}{3} \varepsilon - \frac{1}{6} \varepsilon^2 \right).$$

Pentru $\nu = 0,3$ și $\varepsilon = 0,1$, cele trei expresii din (133) și (134) au respectiv valorile

$$6,4 \ i (\mathcal{R}_2/R_0^2); \quad 0,05 \ i (\mathcal{R}_2/R_0^2); \quad -113 \ i (\mathcal{R}_2/R_0^2). \quad (135)$$

După cum se vede, tensiunea tangențială de încovoiere corespunzătoare coeficientului τ_c este neglijabilă; în schimb, cea corespunzătoare coeficientului $\tau - \tau_c$ este considerabilă.

Cele două cazuri examinate arată limpede rolul tensiunilor de torsiune care apar dacă sarcina este aplicată în afara centrului de încovoiere; aceste tensiuni sînt considerabil mai importante dacă avem de-a face cu secțiuni deschise cu pereți subțiri, care rezistă în condiții rele la torsiune.

§ 21. PROBLEMA ÎNCOVOIERII ÎN CONSOLĂ A BARELOR DE SECȚIUNE SIMPLU CONEXĂ. METODA REPREZENTĂRII CONFORME

Vom studia problema încovoierii în același cadru în care am studiat în § 17 problema torsiunii.

Întrucît, pentru \mathcal{D} simplu conex, funcția $\varphi(\zeta)$ este uniformă, problema se reduce la determinarea unei funcții *olomorfe*, din condiția la limită (11.1). Aspectul celui de al doilea membru al acestei condiții la limită, sensibil mai complicat decît cel din (17.1), face imposibilă construirea unui echivalent al metodei $\lambda, \bar{\lambda}$.

Fie deci cunoscută funcția de reprezentare și inversa sa

$$\zeta = \omega(\lambda) \quad (1)$$

$$\lambda = \omega^{-1}(\zeta). \quad (2)$$

Vom considera funcțiile transformate în planul ζ , (compară cu (17.8)) :

$$\varphi_{(1)}(\lambda) = \varphi_{(1)}[\omega(\zeta)] = \varphi(\zeta), \quad (3)$$

$$\Phi_{(1)}(\lambda) = d\varphi_{(1)}(\lambda)/d\lambda = \Phi(\zeta) = \varphi'(\zeta)/\omega'(\zeta).$$

Pentru a putea face uz de (11.1) va trebui să calculăm valorile la limită ale funcției (1) și ale derivatei sale. Avem deci (vezi (17.7))

$$\lambda = \lambda|_{\mathcal{L}} = \omega(\sigma) = \omega^+, \quad \bar{\lambda} = \bar{\lambda}|_{\mathcal{L}} = \overline{\omega(\sigma)} = \omega_*, \quad (4)$$

de unde

$$\lambda'(s) = [d\lambda/ds]|_{\mathcal{L}} = [d\omega(\zeta)/d\zeta]|_{\gamma} d\sigma/ds = \omega'(\sigma) d\sigma/ds, \quad (5)$$

$$\overline{\lambda'(s)} = [d\bar{\lambda}/ds]|_{\mathcal{L}} = [d\overline{\omega(\zeta)}/d\bar{\zeta}]|_{\gamma} d\bar{\sigma}/ds = -\sigma^{-2} \overline{\omega'(\sigma)} d\sigma/ds$$

de unde, ținînd seama de (A.11.35), urmează

$$\lambda'(s) = \omega'(\sigma) d\sigma/ds, \quad \overline{\lambda'(s)} = \omega'_*(\sigma) d\sigma/ds. \quad (6)$$

Aceste relații sînt valabile pentru frontiere \mathcal{L} de clasă C^2 . Relații analoge se pot scrie pentru valorile la limită ale funcției $\varphi(\zeta)$ și ale derivatei sale.

Condiția la limită (11.1) poate fi acum transcrisă sub forma

$$\mu[\varphi'(\sigma) + \sigma^{-2} \overline{\varphi'(\sigma)}] = H(\sigma), \quad (7)$$

unde am notat

$$H(\sigma) = \left[i\mu\tau - \frac{1}{2} c + \frac{1+2\nu}{8(1+\nu)} \alpha \overline{\omega(\sigma)} + \frac{1}{4(1+\nu)} \bar{\alpha} \omega(\sigma) \right] \overline{\omega(\sigma)} \omega'(\sigma) - \\ - \left[i\mu\tau + \frac{1}{2} c - \frac{1+2\nu}{8(1+\nu)} \bar{\alpha} \omega(\sigma) - \frac{1}{4(1+\nu)} \alpha \overline{\omega(\sigma)} \right] \sigma^{-2} \omega(\sigma) \overline{\omega'(\sigma)}. \quad (8)$$

Este vizibil că în cazul particular al torsiunii (cînd avem $\alpha = c = 0$, și $\varphi(\zeta) = \tau\psi(\zeta)$), atunci (7) și (8) conduc la

$$\psi'(\sigma) + \sigma^{-2} \overline{\psi'(\sigma)} = i [\overline{\omega(\sigma)} \omega'(\sigma) - \sigma^{-2} \omega(\sigma) \overline{\omega'(\sigma)}], \quad (9)$$

ceea ce coincide cu condiția (17.11), derivată în raport cu arcul s .

În studiul problemei (7) putem face evident uz de metoda seriilor. Introducînd

$$\omega(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n \zeta^n, \quad \varphi(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \zeta^n \quad (10)$$

(unde ω_n sînt cunoscuți) în (7) și (8), obținem prin identificare coeficienții a_n , și deci și funcția $\varphi(\zeta)$.

Metoda își păstrează valabilitatea și pentru domenii dublu conexe; întrucît însă funcția $\varphi_{(1)}(\zeta)$ are în acest caz un termen logaritmîc (vezi (11.7) și (11.9)), urmează că vom căuta soluția sub forma

$$\varphi_{(1)}(\zeta) = \gamma_1 \ln \zeta + \varphi_{0(1)}(\zeta), \quad \varphi_0(\zeta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \zeta^n, \quad (11)$$

iar funcția $H(\sigma)$ din (8) va fi modificată prin trecerea valorii provenite din termenul logaritmîc, în membrul al doilea al condiției la limită.

Calculule necesare pentru a determina coeficienții a_n sînt în principiu aceleași, dar apar în practică mult mai laborioase decît în cazul torsiunii. Notăm că acum coeficienții depînd și de constantele elastice ale materialului, și de sarcină. Metoda seriilor conduce aci la expresii de aspect greoi. Aceasta a fost metoda folosită de R. Capildeo [1]. Ea a fost reluată de către E. Deutsch [4], [6], pornind de la rezultatele (ulterioare) ale lui L. Milne-Thomson [1].

Încercările de a folosi aparatul reprezentării conforme în problema încovoierii sînt mai vechi. Astfel, menționăm lucrările lui P. Kufarev [1] și D. Avazașvili [1]. Legate însă de reprezentarea soluției prin funcțiile de încovoiere ale lui Saint-Venant — extrem de incomode — aceste încercări nu au dus prea departe.

În cele ce urmează, vom prezenta soluția dată acestei probleme de L. Milne-Thomson [1], [3], § 5.14. În comparație cu cea a lui Capildeo, ea este mult mai condensată — întrucît face uz de integralele de tip Cauchy — dar nu poate fi direct utilizată decît pentru domenii simplu conexe.

În acest scop, folosind pentru $\overline{\varphi'(\sigma)}$ relația analogă cu (6) și ținînd seama de (4) și (6) pentru $\omega(\zeta)$, transcriem (7), (8) sub forma

$$\mu [\varphi'(\sigma) - \overline{\varphi'_*(\sigma)}] = H(\sigma), \quad (12)$$

unde

$$\begin{aligned} H(\sigma) = & \left[i\mu\tau - \frac{1}{2}c + \frac{1+2\nu}{8(1+\nu)} \alpha \omega_*(\sigma) + \frac{1}{4(1+\nu)} \bar{\alpha} \omega(\sigma) \right] \omega_*(\sigma) \omega'(\sigma) + \\ & + \left[i\mu\tau + \frac{1}{2}c - \frac{1+2\nu}{8(1+\nu)} \bar{\alpha} \omega(\sigma) - \frac{1}{4(1+\nu)} \alpha \omega_*(\sigma) \right] \omega(\sigma) \omega'_*(\sigma). \end{aligned} \quad (13)$$

Înmulțind ambii membri din (12) cu $d\sigma/2\pi i(\sigma - \zeta)$ și integrând pe γ , obținem

$$\mu \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{\varphi'(\sigma)}{\sigma - \zeta} d\sigma - \mu \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{\varphi'_*(\sigma)}{\sigma - \zeta} d\sigma = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{H(\sigma)}{\sigma - \zeta} d\sigma. \quad (14)$$

Întrucît $\varphi'(\zeta)$ este olomorfă în D^+ , iar $\varphi'_*(\zeta)$ este olomorfă în D^- , din formulele (A.10.1) și (A.11.37) obținem — ca și în (17.31) —

$$\varphi'(\zeta) = \frac{1}{\mu} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{H(\sigma)}{\sigma - \zeta} d\sigma, \quad \zeta \in D^+.$$

(Am ținut seama că din (A.11.34) urmează $\varphi'_*(\infty) = 0$.)

Integrala din membrul al doilea depinde numai de $\omega(\zeta)$, așadar de *geometria* secțiunii \mathcal{D} ; prin urmare, singura deosebire dintre acest caz și cel al torsiunii constă în faptul că aci avem de calculat șase integrale cu caracter de mărimi geometrice, în loc de una singură.

Funcția $\varphi(\zeta)$ se obține din (15) prin integrare în raport cu ζ și, evident, este determinată abstracție făcînd de o constantă arbitrară (vezi § 11, pag. 216).

Din (13) se vede că în $H(\sigma)$ intervin numai produse de valori la limită ale unor funcții olomorfe în D^+ , cu valori la limită ale unor funcții olomorfe în D^- .

În cazul particular în care $\omega(\zeta)$ este rațională — și desigur olomorfă în D^+ — funcția $\omega_*(\zeta)$ este de asemenea rațională, și olomorfă în D^- . Nici una din aceste funcții nu poate avea poli pe γ , căci în acest caz \mathcal{D} nu ar fi mărginit. Derivatele lor nu pot de asemenea avea poli pe γ . Prin urmare, dacă $\omega(\zeta)$ este o funcție rațională, atunci $H(\sigma)$ este valoarea la limită a unei funcții raționale în D^+ , care posedă în D^+ numai un număr *finit* de poli, și e prelungibilă pe γ . Calculul integralei din (15) se face deci cu ajutorul formulei (A.10.20) — și el se reduce la a scădea din $H(\sigma)$, cu σ înlocuit prin ζ , părțile principale din vecinătatea tuturor polilor săi conținuți în D^+ . Rezultatul este oarecum similar celui din (17.15) pentru cazul torsiunii.

În particular, dacă avem $H(\sigma) = \sum_{n=-h}^k H_n \sigma^n$, atunci obținem

$$\mu \varphi'(\zeta) = \sum_{n=0}^k H_n \zeta^n. \quad (16)$$

În general, dacă $H(\sigma)$ este desfășurabilă în serie Fourier, soluția se obține introducînd această serie în (15) și integrînd termen cu termen — ceea ce conduce la o formulă de același tip cu (16), dar cu limita superioară de sumare $k = \infty$.

Toți coeficienții ce intervin în $H(\sigma)$ (ca și constantele C_i din (19.10)) și care depind numai de configurația domeniului \mathcal{D} , pot fi explicitați prin intermediul coeficienților ω_n .

Raționamentele din paragraful de față arată deci că, *dacă* reprezentarea conformă a domeniului \mathcal{D} pe discul unitate este cunoscută, atunci problema încovoierii în consolă (sau — caz particular — problema torsionii) este practic vorbind rezolvată. (Cazul domeniilor dublu-conexe reprezentabile conform pe o coroană circulară nu este principial mai complicat.) Prin urmare, dificultatea e redusă la găsirea reprezentării conforme a domeniului dat pe domeniul canonic adecvat. *Metoda lui Capildeo și Milne-Thomson dă așadar o soluție completă pentru tot ceea ce ține propriu-zis de teoria elasticității în aceste chestiuni.* În practică, rezolvarea acestor probleme devine dificilă pentru domeniile dublu conexe (tocmai datorită dificultății de a se construi efectiv funcțiile de reprezentare), și mai ales pentru domeniile de un ordin de conexiune superior (unde nici metoda seriilor, nici metoda integralelor de tip Cauchy nu mai pot fi direct utilizate). Din punct de vedere matematic, aceste chestiuni se subsumează chestiunilor similare privind problema plană a teoriei elasticității. (Vezi și finele § 18.)

§ 22. PROBLEMA ÎNCOVOIERII ÎN CONSOLĂ PENTRU BARE DE SECȚIUNE SIMPLU CONEXĂ. EXEMPLE

Vom da aci câteva exemple de studiu a problemei încovoierii în consolă cu ajutorul metodei reprezentării conforme, reluând unele din secțiunile pentru care în § 18 am studiat problema torsionii.

a) Discul circular

Să considerăm funcția

$$z = \omega(\zeta) = R_0 \zeta, \quad (1)$$

care reprezintă conform domeniul \mathcal{H}^+ , pe discul cu centrul în origine și de rază R_0 . Întrucît avem $z_0 = 0$, expresia (21.8) devine

$$H(\sigma) = [(3 + 2\nu)/8(1 + \nu)] R_0^3 [\alpha \sigma^{-2} + \bar{\alpha}]; \quad (2)$$

ținînd seama de (21.16), obținem

$$\mu \varphi'(\zeta) = [(3 + 2\nu)/8(1 + \nu)] R_0^3 \bar{\alpha}$$

de unde, utilizînd (21.3) și (1), deducem

$$\varphi'_{(1)}(z) = [(3 + 2\nu)/4E] R_0^2 \bar{\alpha}. \quad (3)$$

Întrucît avem evident (vezi (20.1)) :

$$l_1 = l_2 = \frac{1}{4} \pi R_0^4, \quad l = 0, \quad \delta = \frac{1}{4} \pi^2 R_0^8, \quad (4)$$

deducem din (4.12)

$$\alpha = 4R/\pi R_0^4, \quad (5)$$

astfel că pentru componentele tensiunii urmează din (8.3), (8.10):

$$\begin{aligned} \sigma_{33} &= (2/\pi R_0^4)(x_3 - l)(R\bar{\zeta} + \bar{R}\zeta), \\ \sigma_{31} + i\sigma_{32} &= \frac{[(3 + 2\nu)R_0^2 - 2\bar{\zeta}\zeta]R - (1 + 2\nu)\bar{\zeta}^2\bar{R}}{2\pi(1 + \nu)R_0^4} + i\mu\tau\bar{\zeta}. \end{aligned} \quad (6)$$

Pentru determinarea lui τ vom face uz de (19.10). Întrucît $r(x_1, x_2) \equiv 0$, din (19.8) urmează $C_1 = C_2 = C_3 = 0$, iar din (19.9) — unde $t = R_0 \exp(i\chi)$ — deducem și $C_4 = 0$. Dat fiind că din (15.4) avem $C = l_0 = \frac{1}{2}\pi R_0^4$, deducem în definitiv

$$\mathcal{M}_3^0 = \frac{1}{2}\pi R_0^4 \mu \tau, \quad (7)$$

ceea ce dă valoarea lui τ . Întrucît avem $\tau_c = 0$, urmează evident

$$\bar{\zeta}_c = 0. \quad (8)$$

O sarcină excentrică $R \neq 0$ produce în general încovoiere cu torsiune. Luînd în (2.3) $\mathcal{M}_3 = 0$, obținem $\mathcal{M}_3^0 = \mathcal{R}_2 x_1^r - \mathcal{R}_1 x_2^r$, astfel că din (7) urmează acum $\tau \neq 0$. Făcînd să varieze afixul $\bar{\zeta}_r$, variază deci în (6) termenul $i\mu\tau\bar{\zeta}$. Dacă însă sarcina este dirijată diametral (de ex. $x_2^r = \mathcal{R}_2 = 0$), atunci avem $\mathcal{M}_3^0 = 0$, și torsiunea nu mai apare.

Componentele deplasării se obțin direct din (8.32).

Comparînd acest mod de a rezolva problema cu cel din § 20, α rezultă limpede avantajele metodei integralelor de tip Cauchy.

b) Cardioida

Problema torsiunii pentru aceeași secțiune a fost considerată în § 18, **b**. Să reluăm funcția de reprezentare *rațională* (chiar polinomială) și inversa ei (vezi § A.8, **c**):

$$\bar{\zeta} = \omega(\zeta) = a(1 + \zeta)^2, \quad (9)$$

$$\zeta = \omega^{-1}(\bar{\zeta}) = (\bar{\zeta}/a)^{1/2} - 1. \quad (10)$$

Cantitățile D , $\bar{\zeta}_0$, l , l_0 necesare în studiul problemei încovoierii sînt determinate în (A.8.38) — (A.8.42). Introducînd aceste valori în (4.12), (4.8), obținem imediat

$$\alpha = 2(55R + 8\bar{R})/(21 \cdot 47 \pi a^4), \quad c = 5(R + \bar{R})/47 \pi a^3, \quad (11)$$

astfel că componenta normală σ_{33} a tensiunii este cunoscută.

Pentru a determina $\varphi(\zeta)$, avem mai întâi din (21.8)

$$H(\sigma) = 2a^2 \left[i\mu\tau - \frac{1}{2}c + \frac{1+2\nu}{8(1+\nu)} \alpha a \frac{(1+\sigma)^2}{\sigma^2} + \frac{1}{4(1+\nu)} \bar{\alpha} a (1+\sigma)^2 \right] \times \\ \times \frac{(1+\sigma)^3}{\sigma^2} + 2a^2 \left[-i\mu\tau - \frac{1}{2}c + \frac{1+2\nu}{8(1+\nu)} \bar{\alpha} a (1+\sigma)^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{4(1+\nu)} \alpha a \frac{(1+\sigma)^2}{\sigma^2} \right] \frac{(1+\sigma)^3}{\sigma^3},$$

astfel că din (21.15) și (21.16) deducem

$$\frac{\mu \varphi'(\zeta)}{2a^2} = (i\mu\tau - \frac{1}{2}c)(\zeta + 3) + \frac{1+2\nu}{8(1+\nu)} a\alpha(\zeta + 5) + \\ + \frac{1}{4(1+\nu)} a\bar{\alpha}(\zeta^3 + 5\zeta^2 + 10\zeta + 10) - \left(i\mu\tau + \frac{1}{2}c \right) + \\ + \frac{1+2\nu}{8(1+\nu)} a\bar{\alpha}(\zeta^2 + 5\zeta + 10) + \frac{1}{4(1+\nu)} a\alpha. \quad (12)$$

Utilizând încă (21.3) și (10), obținem în planul fizic

$$\mu \varphi'_{(1)}(\zeta) = \frac{1}{4(1+\nu)} a\bar{\alpha}\zeta + \frac{5+2\nu}{8(1+\nu)} a^2\bar{\alpha}(\zeta/a)^{1/2} + \\ + \left[i\mu\tau - \frac{1}{2}c + \frac{1+2\nu}{8(1+\nu)} a\alpha + \frac{9+6\nu}{8(1+\nu)} a\bar{\alpha} \right] a + \\ + \left[i\mu\tau - \frac{3}{2}c - \frac{3+4\nu}{4(1+\nu)} a\alpha + \frac{7+6\nu}{4(1+\nu)} a\bar{\alpha} \right] a(\zeta/a)^{-1/2}, \quad (13)$$

ceea ce permite calcularea componentelor σ_{31} , σ_{32} . Din (13) se obține imediat și funcția $\varphi_{(1)}(\zeta)$, necesară pentru determinarea deplasărilor.

Pentru a găsi pe τ , avem de calculat integralele (19.8), ale căror valori se obțin cu ajutorul teoremei reziduurilor. (Întrucât $\omega(\zeta)$ este rațională, $\psi(\zeta)$ este de asemenea rațională, în cazul de față, un polinom.)

Din (18.6) obținem

$$r|_{\mathcal{L}} = \frac{1}{2} ia^2 (\sigma^2 + 4\sigma - 4\sigma^{-1} - \sigma^{-2}), \quad (14)$$

iar din (9) urmează

$$t'(s) = 2a(1+\sigma). \quad (15)$$

Amintind că pe γ avem $\sigma = \sigma^{-1}$, deducem

$$C_1 = ia^4 \oint_{\gamma} (\sigma^4 + 4\sigma^3 - 4\sigma - 1)(1+\sigma)^3 \sigma^{-4} d\sigma,$$

de unde, întrucît integrandul are un singur pol de ordin 4 în origine, deducem (vezi (A.5.28) — (A.5.30))

$$C_1 = ia^4 \cdot 2\pi i (-54/3!) = 18 \pi a^4, \quad (16)$$

ceea ce coincide desigur cu valoarea din (18.12).

În mod asemănător avem

$$C_2 = ia^5 \oint_{\gamma} (\sigma^4 + 4\sigma^3 - 4\sigma - 1)(1 + \sigma)^5 \sigma^{-6} d\sigma = ia^5 \cdot 2\pi i (2880/5!) = -48 \pi a^5; \quad (17)$$

$$C_3 = ia^5 \oint_{\gamma} (\sigma^4 + 4\sigma^3 - 4\sigma - 1)(1 + \sigma)^5 \sigma^{-4} d\sigma = ia^5 \cdot 2\pi i (276/3!) = 92 \pi a^5; \quad (18)$$

$$C_4 = 2a^5 \oint_{\gamma} (1 + \sigma)^9 \sigma^{-4} d\sigma = 336 \pi ia^5. \quad (19)$$

Utilizînd valoarea lui C din (18.10), ținînd seama că avem $\text{Im } C_1 = 0$, și introducînd aici pe α din (11), obținem din (19.10):

$$\mathcal{M}_3^0 = 17 \pi a^4 \mu \tau - [(37 + 66\nu)/42 (1 + \nu)] i a (R - \bar{R}). \quad (20)$$

Pentru a determina centrul de încovoire, avem din (19.18)

$$\mu \tau_e = - [5\nu/6 (1 + \nu)] a \text{Im } \alpha = \{5\nu/[6 \cdot 21(1 + \nu) \pi a^3]\} i (R - \bar{R}), \quad (21)$$

și deci din (20) deducem

$$\mathcal{M}_e = - [(111 + 113\nu)/6 \cdot 21(1 + \nu)] ia (R - \bar{R}), \quad (22)$$

astfel că formula (19.20) dă în definitiv

$$z_e = x_1^e = [(111 + 113\nu)/63 (1 + \nu)] a. \quad (23)$$

Centrul de încovoire este situat pe axa de simetrie. El nu coincide cu centrul de greutate, și poziția sa depinde foarte puțin de proprietățile mecanice ale materialului:

$$x_1^0 = 1,667 a, \quad 1,762 a < x_1^e < 1,772 a. \quad (24)$$

Dacă $R = 0$, atunci $\alpha = c = 0$, și $\mathcal{M}_3^0 = \mathcal{M}_3$, astfel că problema se reduce la cea a torsiunii. Formula (12) devine acum

$$\varphi'(\zeta) = (2a^2/\mu) i \mu \tau (2 + \zeta), \quad (25)$$

de unde, întrucît pentru torsiune am notat $\varphi_{(1)}(\beta) = \tau \psi_{(1)}(\beta)$, deducem

$$\tau \psi(\zeta) = 2ia^2 \tau \int (2 + \zeta) d\zeta,$$

adică

$$\psi(\zeta) = ia^2(\zeta^2 + 4\zeta) + \text{const.} \quad (26)$$

ceea ce coincide cu (18.5) — abstracție făcînd de termenul constant, care se determină ca și în § 18.

Dacă $\mathcal{M}_3 = 0$, atunci $\mathcal{M}_3^0 = \mathcal{R}_2 x_1^r - \mathcal{R}_1 x_2^r$, și din (20) se determină valoarea lui τ , în general ne-nulă, corespunzătoare torsiunii de încovoiere — care se manifestă chiar pentru \mathcal{M}_3 nul. Dacă afixul ζ_r variază, atunci τ variază de asemenea, și în (12) apare un termen suplimentar de forma $i\mu\tau(2 + \zeta)$, așadar tocmai un termen de forma (25), corespunzător funcției de torsiune (26). Dacă în particular sarcina este dirijată în lungul axei de simetrie, așadar $x_2^r = \mathcal{R}_2 = 0$, atunci $\mathcal{M}_3^0 = 0$, $R - \bar{R} = 0$, și (20) dă $\tau = 0$, ceea ce era de așteptat (vezi finele § 19).

c) Lemniscata lui Bernoulli

Problema torsiunii pentru această secțiune a fost tratată în § 18, exemplul c. Să considerăm funcția de reprezentare (care *nu este* rațională) și inversa ei

$$\zeta = \omega(\zeta) = a(1 + \zeta)^{1/2}, \quad (27)$$

$$\zeta = \omega^{-1}(\zeta) = (\zeta/a)^2 - 1. \quad (28)$$

Cantitățile D , ζ_0 , l , l_0 sînt determinate în (A.8.51), (A.8.54), (A.8.58). Introducînd aceste valori în (4.12) și (4.8), obținem

$$\alpha = \frac{\left(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{16}\pi^2\right)R - \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{16}\pi^2\right)\bar{R}}{2\left(\frac{1}{8}\pi - \frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{8}\pi + \frac{1}{3} - \frac{1}{16}\pi^2\right)a^4}, \quad c = \frac{\pi(R + \bar{R})}{\left(\frac{8}{3} + \pi - \frac{1}{2}\pi^2\right)a^3}; \quad (29)$$

componenta σ_{33} a tensiunii este astfel determinată.

Pentru a găsi funcția lui Capildeo și Milne-Thomson, vom introduce mai întîi (A.8.50) în (21.8), de unde

$$\begin{aligned} \frac{2H(\sigma)}{a^2} = & \left(i\mu\tau - \frac{1}{2}c\right)\sigma^{-1/2} + \frac{1+2\nu}{8(1+\nu)}a\alpha(1+\sigma)^{1/2}\sigma^{-1} + \\ & + \frac{1}{4(1+\nu)}a\bar{\alpha}(1+\sigma)^{1/2}\sigma^{-1/2} - \left(i\mu\tau + \frac{1}{2}c\right)\sigma^{-3/2} + \\ & + \frac{1+2\nu}{8(1+\nu)}a\bar{\alpha}(1+\sigma)^{1/2}\sigma^{-3/2} + \frac{1}{4(1+\nu)}a\alpha(1+\sigma)^{1/2}\sigma^{-2}, \end{aligned} \quad (30)$$

astfel că în definitiv avem de calculat (vezi (21.15)) următoarele integrale

$$\begin{aligned} F_1(\zeta) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{\sqrt{1+\sigma}}{\sigma(\sigma-\zeta)} d\sigma, & F_2(\zeta) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{\sqrt{\sigma}}{\sigma(\sigma-\zeta)} d\sigma, \\ F_3(\zeta) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{\sqrt{\sigma}\sqrt{1+\sigma}}{\sigma(\sigma-\zeta)} d\sigma, & F_4(\zeta) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{\sqrt{1+\sigma}}{\sigma^2(\sigma-\zeta)} d\sigma, \\ F_5(\zeta) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{\sqrt{\sigma}}{\sigma^2(\sigma-\zeta)} d\sigma, & F_6(\zeta) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{\sqrt{1+\sigma}\sqrt{\sigma}}{\sigma^2(\sigma-\zeta)} d\sigma. \end{aligned} \quad (31)$$

Un calcul elementar de descompunere în fracții simple ne dă (vezi și (18.19), (18.20))

$$\frac{1}{\sigma^2(\sigma-\zeta)} = -\frac{1}{\zeta} \frac{1}{\sigma^2} + \frac{1}{\zeta^2} \left(\frac{1}{\sigma-\zeta} - \frac{1}{\sigma} \right). \quad (32)$$

Raționând ca în (18.18)–(18.22), sîntem conduși la a considera integralele

$$\begin{aligned} f_1(\zeta) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{\sqrt{1+\sigma}}{\sigma-\zeta} d\sigma, & f_2(\zeta) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{\sqrt{\sigma}}{\sigma-\zeta} d\sigma, \\ f_3(\zeta) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{\sqrt{1+\sigma}\sqrt{\sigma}}{\sigma-\zeta} d\sigma, \end{aligned} \quad (33)$$

cu ajutorul cărora funcțiile introduse în (31) se pun sub forma

$$\begin{aligned} F_j(\zeta) &= \zeta^{-1} [f_j(\zeta) - f_j(0)], \\ F_{j+3}(\zeta) &= \zeta^{-2} [f_j(\zeta) - f_j(0)] - \zeta^{-1} f_j'(0), \end{aligned} \quad j = 1, 2, 3 \quad (34)$$

ceea ce reduce problema la calcularea integralelor f_1, f_2, f_3 din (33).

Întrucît funcția $\sqrt{1+\zeta}$ este olomorfă în \mathcal{D}^+ și este uniformă și continuă inclusiv pe γ (punctul critic algebric $\zeta = -1$ de pe γ nu poate fi ocolit pe nici un drum conținut în întregime în \mathcal{D}^+), rezultă prin simpla aplicare a formulei lui Cauchy că

$$f_1(\zeta) = \sqrt{1+\zeta}, \quad f_1(0) = 1, \quad f_1'(0) = \frac{1}{2}. \quad (35)$$

Funcția $f_2(\zeta)$ coincide cu $f(\zeta)$ din (18.21); folosind expresia ei (18.25), și dezvoltarea în serie (18.26), deducem

$$f_2(\zeta) = (2/\pi) (1 + \sqrt{\zeta} \operatorname{arctg} \sqrt{\zeta}), \quad f_2(0) = 2/\pi, \quad f_2'(0) = 2/\pi. \quad (36)$$

Ne rămîne de calculat $f_3(\zeta)$, pentru care vom repeta raționamentele din (18.21) – (18.25). Anume, întrucît funcția $\sqrt{1+Z} \sqrt{Z} (Z-\zeta)^{-1}$ are în \mathcal{D}^+ polul simplu $Z = \zeta \neq 0$ și punctul critic $Z = 0$, putem aplica

teorema reziduurilor la domeniul D^+ cu o tăietură în lungul semi-axe negative. Notînd pe tăietură $Z = -\bar{T}$ și ținînd seama că \sqrt{Z} ia valorile $\pm i\sqrt{\bar{T}}$ pe cele două borduri, în timp ce $\sqrt{1+Z}$ ia valoarea $\sqrt{1-\bar{T}}$ pe ambele borduri ale tăieturii, obținem pentru valoarea reziduului în ζ expresia

$$\sqrt{\zeta(1+\zeta)} = f_3(\zeta) + \frac{1}{2\pi i} \int_1^0 \frac{\sqrt{1-\bar{T}} i \sqrt{\bar{T}}}{\bar{T} + \zeta} d\bar{T} + \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{-\sqrt{1-\bar{T}} i \sqrt{\bar{T}}}{\bar{T} + \zeta} d\bar{T},$$

de unde

$$f_3(\zeta) = \sqrt{\zeta(1+\zeta)} + \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{\sqrt{\bar{T}-\bar{T}^2}}{\bar{T} + \zeta} d\bar{T}. \quad (37)$$

Făcînd substituția evidentă

$$\sqrt{\bar{T}-\bar{T}^2} = u\bar{T}, \quad \bar{T} = 1/(u^2 + 1), \quad d\bar{T} = -2u du/(u^2 + 1)^2, \quad (38)$$

obținem pe rînd

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\sqrt{\bar{T}-\bar{T}^2}}{\bar{T} + \zeta} d\bar{T} &= \frac{2}{\zeta} \int_0^\infty \frac{u^2 du}{(u^2 + 1)^2 (u^2 + 1 + \zeta^{-1})} = \frac{2}{\zeta} \left[-\zeta \int_0^\infty \frac{du}{(u^2 + 1)^2} + \right. \\ &+ \zeta(1 + \zeta) \int_0^\infty \frac{du}{u^2 + 1} - \zeta(1 + \zeta) \int_0^\infty \frac{du}{u^2 + 1 + \zeta^{-1}} = -2 \left[\frac{1}{2} \frac{u}{u^2 + 1} + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{2} \arctg u \right]_0^\infty + 2(1 + \zeta) \arctg u \Big|_0^\infty - \\ &- 2(1 + \zeta) \sqrt{\frac{\zeta}{1 + \zeta}} \arctg \sqrt{\frac{\zeta}{1 + \zeta}} u \Big|_0^\infty = \\ &= -\frac{1}{2} \pi + 2(1 + \zeta) \frac{1}{2} \pi - 2 \sqrt{\zeta(1 + \zeta)} \frac{1}{2} \pi, \end{aligned}$$

astfel că din (37) căpătăm

$$f_3(\zeta) = \zeta + \frac{1}{2}, \quad f_3(0) = \frac{1}{2}, \quad f_3'(0) = 1. \quad (39)$$

Pentru funcțiile definite în (33) obținem acum¹⁶⁾, făcînd uz de (34), expresiile :

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{\sqrt{1+\zeta} - 1}{\zeta}, \quad F_2 = \frac{2}{\pi} \frac{\arctg \sqrt{\zeta}}{\sqrt{\zeta}}, \quad F_3 = 1, \\ F_4 &= \frac{\sqrt{1+\zeta} - 1}{\zeta^2} - \frac{1}{2\zeta}, \quad F_5 = \frac{2}{\pi} \left[\frac{\arctg \sqrt{\zeta}}{\zeta \sqrt{\zeta}} - \frac{1}{\zeta} \right], \quad F_6 = 0. \end{aligned} \quad (40)$$

¹⁶⁾ Integralele (A.8.53) și (A.8.57) care intervin în studiul acestei probleme pot fi calculate ținînd seama că

$$\oint_\gamma \sqrt{\frac{1+\sigma}{\sigma}} d\sigma = 2\pi i f_3(0) = \pi i, \quad \oint_\gamma \frac{\sqrt{1+\sigma}}{\sigma} d\sigma = 2\pi i f_1(0) = 2\pi i.$$

Toate aceste funcții sînt olomorfe în \mathcal{D}^+ (inclusiv în origine); funcția $\varphi'(\zeta)$ are deci aceeași proprietate. Din (21.15), (30), (31) și (40) obținem acum

$$\begin{aligned} \mu\varphi'(\zeta) = & \frac{1}{2}a^2 \left[\left(i\mu\tau - \frac{1}{2}c \right) \frac{2}{\pi} \frac{\operatorname{arctg} \sqrt{\zeta}}{\sqrt{\zeta}} + \frac{1+2\nu}{8(1+\nu)} a \alpha \frac{\sqrt{1+\zeta}-1}{\zeta} + \right. \\ & + \frac{1}{4(1+\nu)} a \bar{\alpha} - \left(i\mu\tau + \frac{1}{2}c \right) \frac{2}{\pi} \left(\frac{\operatorname{arctg} \sqrt{\zeta}}{\zeta\sqrt{\zeta}} - \frac{1}{\zeta} \right) + \\ & \left. + \frac{1}{4(1+\nu)} a \alpha \left(\frac{\sqrt{1+\zeta}-1}{\zeta^2} - \frac{1}{2\zeta} \right) \right]. \end{aligned} \quad (41)$$

Ținînd seama de reprezentarea inversă (28), se poate scrie explicit funcția $\varphi'_{(1)}(\beta)$, ceea ce permite calcularea tensiunii tangențiale. Funcția $\varphi_{(1)}(\beta)$ se obține prin integrarea expresiei deduse pentru $\varphi'_{(1)}(\beta)$.

Pentru determinarea lui τ ne vom servi de (19.10), unde integralele C_k din (19.8) se calculează cu ajutorul valorii la limită $r|_{\mathcal{L}}$, cunoscute din (18.32). Pentru aceasta, vom face uz de funcțiile $f_1(\zeta)$ și $f_3(\zeta)$ (vezi (33), (35) și (39)), precum și de integralele

$$\begin{aligned} N_h &= \oint_{\gamma} \sigma^h \sqrt{1+\sigma} d\sigma = \frac{2}{3} \oint_{\gamma} \sigma^h d(1+\sigma)^{3/2} = \\ &= \frac{2}{3} \sigma^h (1+\sigma)^{3/2} \Big|_{\theta=-\pi}^{\theta=\pi} - \frac{2}{3} h \oint_{\gamma} \sigma^{h-1} (1+\sigma) \sqrt{1+\sigma} d\sigma = -\frac{2h}{2h+3} N_{h-1}. \end{aligned} \quad (42)$$

Întrucît avem $N_0 = 0$, urmează prin recurență

$$N_h = 0, \quad h = 0, 1, 2, \dots \quad (43)$$

Să introducem acum (21), (A.8.50) și (18.32) în expresiile (19.8), (19.9). Prima din ele a fost deja calculată în (18.40):

$$C_1 = (2/\pi) a^4. \quad (44)$$

În expresia lui C_2 apar integralele N_h definite mai sus, astfel că

$$\begin{aligned} C_2 &= \frac{a^5}{4\pi} i \oint_{\gamma} \left[-\frac{\pi}{\sqrt{\sigma}} + 4 \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(-1)^h}{2h+1} \sigma^h \right] \frac{(1+\sigma) \sqrt{1+\sigma}}{\sigma} d\sigma = \\ &= \frac{a^5}{4\pi} i \left[-\pi \oint_{\gamma} \frac{\sqrt{1+\sigma} \sqrt{\sigma}}{\sigma^2} d\sigma - \pi \oint_{\gamma} \frac{\sqrt{1+\sigma} \sqrt{\sigma}}{\sigma} d\sigma + 4 \oint_{\gamma} \frac{\sqrt{1+\sigma}}{\sigma} d\sigma \right] = \\ &= \frac{a^5}{4\pi} i \cdot 2\pi i [-\pi f'_3(0) - \pi f_3(0) + 4f_1(0)], \end{aligned}$$

de unde

$$C_2 = \left(\frac{3}{4} \pi - 2 \right) a^5. \quad (45)$$

Calculul integralei C_3 prezintă dificultăți suplimentare, care pot fi însă ocolite calculându-se conjugata sa — în care intervin de asemenea termeni în N_h :

$$\begin{aligned}\bar{C}_3 &= \oint_{\mathcal{L}} r \bar{t} \, d\bar{t} = -\frac{a^5}{4\pi} i \oint_{\gamma} \left[-\frac{\pi}{\sqrt{\sigma}} + 4 \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(-1)^h}{2h+1} \sigma^h \right] \frac{(1+\sigma)\sqrt{1+\sigma}}{\sigma^2} d\sigma = \\ &= -\frac{a^5}{4\pi} i \left[-\pi \oint_{\gamma} \frac{\sqrt{1+\sigma}\sqrt{\sigma}}{\sigma^3} d\sigma - \pi \oint_{\gamma} \frac{\sqrt{1+\sigma}\sqrt{\sigma}}{\sigma^2} d\sigma + 4 \oint_{\gamma} \frac{\sqrt{1+\sigma}}{\sigma^2} d\sigma + \right. \\ &\quad \left. + 4 \oint_{\gamma} \frac{\sqrt{1+\sigma}}{\sigma} d\sigma - \frac{4}{3} \oint_{\gamma} \frac{\sqrt{1+\sigma}}{\sigma} d\sigma \right] = \\ &= -\frac{a^5}{4\pi} i \cdot 2\pi i \left[-\frac{1}{2} \pi f_3''(0) - \pi f_3'(0) + 4 f_1'(0) + \frac{8}{3} f_1(0) \right],\end{aligned}$$

de unde

$$C_3 = \left(\frac{7}{3} - \frac{1}{2} \pi \right) a^5. \quad (46)$$

În fine, pentru C_4 obținem

$$C_4 = \frac{1}{2} a^5 \oint_{\gamma} \frac{(1+\sigma)\sqrt{1+\sigma}}{\sigma} d\sigma = \frac{1}{2} a^5 2\pi i f_1(0),$$

de unde

$$C_4 = i \pi a^5. \quad (47)$$

Utilizând valoarea lui C din (18.41), și ținând seama că $\text{Im } C_1 = 0$, obținem acum din (19.10) și (29)

$$\mathcal{M}_3^0 = \left(\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \right) a^4 \mu \tau - \frac{\frac{10}{3} - \pi + \left(2 - \frac{1}{2} \pi \right) \nu}{\left(\pi - \frac{8}{3} \right) (1 + \nu)} a i (R - \bar{R}). \quad (48)$$

Ca și în cazul cardioidei, în membrul al doilea al acestei relații apare numai componenta \mathcal{R}_2 — ceea ce se explică prin faptul că avem $l_{12} = 0$. Componenta \mathcal{R}_1 intervine însă în expresia momentului \mathcal{M}_3^0 .

Pentru a determina β_c , calculăm din (19.18), (29) și (A.8.54)

$$\mathcal{M}_c = -\frac{\pi \nu a}{8(1+\nu)} \text{Im } \alpha = \frac{\pi \nu}{2 \left(\pi - \frac{8}{3} \right) (1+\nu) a^3} i (R - \bar{R}), \quad (49)$$

astfel că din (48) urmează

$$\mathcal{M}_c = -\frac{\left(\frac{10}{3} - \pi \right) + \left(3 - \frac{1}{2} \pi - \frac{1}{8} \pi^2 \right) \nu}{\left(\pi - \frac{8}{3} \right) (1+\nu)} a i (R - \bar{R}), \quad (50)$$

și deci, din (19.20):

$$\delta_c = x_1^c = \frac{\left(\frac{20}{3} - 2\pi\right) + \left(6 - \pi - \frac{1}{4}\pi^2\right)\nu}{\left(\pi - \frac{8}{3}\right)(1 + \nu)} a \cong \frac{0,807 + 0,823\nu}{1 + \nu} a. \quad (51)$$

Centrul de încovoire este situat pe axa de simetrie; el nu coincide cu centrul de greutate, și poziția sa depinde numai în mică măsură de proprietățile mecanice ale materialului:

$$x_1^0 = 0,785 a, \quad 0,807 a \leq x_1^c \leq 0,812 a. \quad (52)$$

Dacă $R = 0$, atunci avem $\alpha = c = 0$ și $\mathcal{M}_3^0 = \mathcal{M}_3$, astfel că problema se reduce la cea a torsiunii. Din (41) obținem acum

$$\mu \varphi'(\zeta) = \frac{1}{2} a^2 i \mu \tau \frac{2}{\pi} \left[\frac{\operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{\zeta}}{\sqrt{\zeta}} - \frac{\operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{\bar{\zeta}}}{\bar{\zeta} \sqrt{\zeta}} + \frac{1}{\zeta} \right], \quad (53)$$

de unde, ținând seama de dezvoltarea în serie (18.26), obținem

$$\mu \tau \psi(\zeta) = \frac{a^2}{\pi} i \mu \tau \int \left[\sum_{h=0}^{\infty} \frac{(-1)^h}{2h+1} \zeta^h - \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(-1)^h}{2h+1} \bar{\zeta}^{h-1} + \frac{1}{\zeta} \right] d\zeta, \quad (54)$$

de unde, abstracție făcând de o constantă complexă arbitrară:

$$\begin{aligned} \psi(\zeta) &= \frac{a^2}{\pi} i \sum_{h=0}^{\infty} (-1)^h \left(\frac{1}{2h+1} + \frac{1}{2h+3} \right) \frac{\zeta^{h+1}}{h+1} = \\ &= \frac{2a^2}{\pi} i \sum_{h=0}^{\infty} (-1)^h \left(\frac{1}{2h+1} - \frac{1}{2h+3} \right) \zeta^{h+1} = \\ &= \frac{2a^2}{\pi} i \left[\zeta \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(-1)^h}{2h+1} \zeta^h + \sum_{h=1}^{\infty} \frac{(-1)^h}{2h+1} \zeta^h \right] \end{aligned}$$

și deci

$$\psi(\zeta) = \frac{2a^2}{\pi} i (1 + \zeta) \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(-1)^h}{2h+1} \zeta^h - \frac{2a^2}{\pi} i, \quad (55)$$

ceea ce — abstracție făcând de o constantă — coincide cu (18.30).

Dacă avem $\mathcal{M}_3 = 0$ și afixul β_r variază, atunci τ variază de asemenea, și în (41) apare un termen suplimentar tocmai de forma (53), care conduce la o componentă torsională (55).

d) Alte metode și probleme

Problema încovoierii nu diferă în principiu de cea a torsiunii. Totuși, soluțiile efective sînt mult mai puțin numeroase.

O analiză a rezultatelor clasice este datorată lui J. Geckeler [1], capitolul 3. Menționăm încă soluțiile lui R. Capildeo [1] (melcul lui Pascal, coroana circulară excentrică); B. Galerkin

[2], volumul 1 (obținute cu ajutorul funcțiilor lui Saint-Venant pentru problema încovoierii); A. Stevenson [1] (sector circular, triunghi dreptunghi isoscel). Printre profilele laminate, amintim cazul celui în dublu T, studiat de M. Sarkisian [1]. Încovoierea (și torsiunea) pentru secțiuni dreptunghiulare și pentru unele secțiuni reprezentabile conform pe acestea sînt studiate de către G. Wozniak [1]. Secțiuni dublu conexe sînt considerate de L. Kapanian [1], M. Naiman [1], I. Serebrennikova [1] (cu utilizarea funcției lui Timoshenko, sau cu ajutorul metodei reprezentării conforme). Vezi și D. Topolianski [1] (secțiune eliptică, prin intermediul unei reprezentări conforme aproximative).

Metodele lui Schwarz-Mihlin și Șerman (vezi § 5.18, pag. 301) își păstrează și aci întreg interesul. (Aplicații efective aparțin și lui I. Amenzade : vezi D. Șerman [8], [9].) Pentru folosirea metodelor variaționale, vezi L. Leibenzon [2]. Unele analogii electrice sînt utilizate de B. Azimov et al. [1]; I. Blagoveșcenski și P. Filciakov [1].

CAPITOLUL 6

PROBLEMA PLANĂ

§ 1. GENERALITĂȚI

Tehnica folosește adesea corpuri elastice care nu sînt masive, ci au una din dimensiuni (grosimea) mică în raport cu celelalte două. Fuselajul de avion, corpul de navă, acoperișurile autoportante, profilele laminate, rezervoarele — iată cîteva exemple. Studiul acestor corpuri constituie azi o teorie cu probleme și metode proprii : *teoria plăcilor curbe*. Din bogata literatură consacrată ei, menționăm : A. Goldenveizer [1], [4]; V. Novojilov [4]; S. Timoshenko și S. Woinowsky-Krieger [1]; V. Visarion [1], [2]; V. Z. Vlasov [3]. Vezi și P. Naghdi [2]; Iu. Rabotnov [1]. Pentru originile teoriei, vezi A. Love [1], capitolele 22—24. Pentru plăci curbe anizotrope, vezi S. Ambartsumian [1].

Un caz particular important de astfel de corpuri îl prezintă cele ce pot fi privite ca elemente *plane* materializate, numite pe scurt *plăci*.

Problema matematică corespunzătoare este — în primă aproximație — identică cu cea a echilibrului *corpurilor cilindrice foarte lungi*, solitate de sarcini ce nu variază în lungul generatoarelor — așadar aflate într-o stare oarecum complementară celor antiplane.

Pentru astfel de corpuri, ecuațiile se simplifică (deși nu atît de mult ca pentru starea antiplană), și sîntem conduși la probleme bidimensionale : avem de-a face cu funcții de *două* variabile, definite — ca și în problema antiplană — în secțiunea normală a cilindrului. Problema corespunzătoare se numește *problema plană a teoriei elasticității*.

În acest cadru, problemele la limită fundamentale sînt azi rezolvate, cel puțin în principiu. Dimpotrivă, probleme ca cea a cilindrului solitat de sarcini oarecari pe suprafața laterală ; a încovoierii plăcilor groase ; a teoriei neliniare a plăcilor etc. — sînt încă departe de o soluție definitivă.

Dacă în problema antiplană soluția depinde în ultimă instanță de determinarea *unei* funcții de o variabilă complexă — în problema plană avem de-a face cu *două* astfel de funcții.

Ca și problema antiplană, problema plană constituie un model clasic (deși mai puțin simplu) de utilizare a metodei semi-inverse.

Ideile fundamentale în studiul cu mijloace moderne al problemei plane își au originea în lucrările lui G. Kolosov [1] — [8], și și-au găsit o dezvoltare importantă în lucrările lui N. Mushelishvili [1] — [5] și ale școlii sale. O expunere detaliată a acestui cerc de idei este dată de I. Sokol-

nikoff [2], capitolul 6. Rezultate noi aparțin lui S. Belonosov [2]; A. Green și W. Zerna [1], capitolele 6 și 8; G. Grioli [3], capitolul 8; L. Milne-Thomson [2]; G. Savin [1]. Vezi de asemenea I. Babuska et al. [1]. Vezi încă articolele de analiză ale lui J. Goodier [3], [4]; N. Mushelişvili [5], capitolul 8 (probleme recente), și [5]; I. Sneddon și D. Berry [1]; D. Şerman [6], [8]; P. P. Teodorescu [3]; I. Vekua și N. Mushelişvili [1].

În cazul corpurilor neomogene sau anizotrope, dificultățile cresc considerabil. Pentru rezultatele fundamentale în cazul corpurilor anizotrope, vezi J. Brilla [1]; A. Green și W. Zerna [1], capitolul 9; S. Leśniński [1], [2] (cap. 3 și 4); L. Milne-Thomson [2], capitolul 7.

Pentru teoria neliniară, vezi J. Ericksen și C. Truesdell [1]; A. Green și J. Adkins [1], capitolele 3, 4 și 6; C. Truesdell și R. Toupin [1], §§ 60—64.

Pentru unele probleme dinamice, vezi J. Miklowitz [2]; W. Nowacki [1], capitolele 9 și 10; R. Rosenfeld și J. Miklowitz [1].

§ 2. STAREA DE DEFORMAȚIE PLANĂ. (CILINDRU ELASTIC FOARTE LUNG)

Să considerăm un cilindru elastic omogen și izotrop. Vom nota secțiunea sa cu \mathcal{D} , și frontiera acesteia cu \mathcal{L} (vezi § 5.2, pag. 167). Originea O va fi aleasă arbitrar într-o secțiune oarecare, iar axele Ox_1x_2 vor fi alese în \mathcal{D} în așa fel încât sistemul $Ox_1x_2x_3$ (unde axa Ox_3 este paralelă cu generatoarele) să fie un sistem trirectangular drept.

Vom utiliza ecuațiile de echilibru neomogene (4.1.2):

$$\sigma_{ij,j} + F_i = 0 \quad (1)$$

și ecuațiile de compatibilitate neomogene din (4.9.6):

$$\Delta \sigma_{ij} + \frac{1}{1+\nu} \Theta_{,ij} = -\frac{\nu}{1-\nu} \delta_{ij} \operatorname{div} F - F_{i,j} - F_{j,i}. \quad (2)$$

Întrucât — ca și în problema antiplană — vom integra ecuațiile în tensiuni, ne vor fi necesare relațiile lui Hooke sub forma (3.4.19):

$$\varepsilon_{ii} = \frac{1}{E} [\sigma_{ii} - \nu(\sigma_{jj} + \sigma_{kk})] (!!!), \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} = \frac{1}{2\mu} \sigma_{ij}. \quad (3)$$

Amintim încă ecuațiile geometrice (4.1.1), expresiile componentelor rotației locale (1.5.5), și relațiile lui Cauchy (2.3.3):

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}), \quad (4)$$

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} - u_{j,i}), \quad (5)$$

$$\sigma_{ni} = \sigma_{ij} n_j. \quad (6)$$

Să presupunem că forțele de volum și datele la limită sînt de așa natură, încît nimic să nu modifice starea elastică în trecerea de la o secțiune $x_3 = \text{const.}$ la alta (monotonie după Ox_3). Pentru aceasta, vom lua

$$F_1 = F_1(x_1, x_2); \quad F_2 = F_2(x_1, x_2); \quad F_3 = 0. \quad (7)$$

Spre deosebire de capitolul 5, cuvîntul „cilindru” are deocamdată accepțiunea corectă: nu este vorba despre „baze”, și condiții la limită se pot formula numai pe suprafața laterală. Liniile care separă porțiunile în care datele sînt formulate în deplasări, de porțiunile în care ele sînt formulate în tensiuni, sînt deci niște generatoare; ele definesc pe \mathcal{L} o porțiune \mathcal{L}' pe care este dat u , și o porțiune \mathcal{L}'' , pe care este dat σ_n . Astfel, este suficientă cunoașterea datelor la limită numai pe curba directoare \mathcal{L} . Ca și în (7), trebuie să presupunem că

$$\begin{aligned} u_1|_{\mathcal{L}'} &= g_1(x_1, x_2), \quad u_2|_{\mathcal{L}'} = g_2(x_1, x_2), \quad u_3|_{\mathcal{L}'} = 0; \\ \sigma_{n1}|_{\mathcal{L}''} &= f_1(x_1, x_2), \quad \sigma_{n2}|_{\mathcal{L}''} = f_2(x_1, x_2), \quad \sigma_{n3}|_{\mathcal{L}''} = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Întrucît ecuațiile elasticității nu depind explicit de variabila x_3 , urmează că, dacă ipoteza (7), (8) este respectată, nici soluția lor nu va depinde de x_3 , și că putem lua în general

$$\partial/\partial x^3 = 0, \quad (9)$$

ceea ce înseamnă că *toate funcțiile ce descriu starea elastică sînt funcții de două variabile x_1, x_2 , definite într-o secțiune oarecare \mathcal{D} .*

Introducînd acum (9) în (4) și (3), obținem

$$\sigma_{31} = \mu u_{3,1}, \quad \sigma_{32} = \mu u_{3,2}, \quad (10)$$

astfel că a treia ecuație — în care $F_3 = 0$ — devine

$$\mu(u_{3,11} + u_{3,22}) = 0. \quad (11)$$

Întrucît pe suprafața laterală avem $n_3 = 0$, din (6) și (8) deducem

$$u_3|_{\mathcal{L}'} = 0, \quad u_{3,n}|_{\mathcal{L}''} = 0. \quad (12)$$

Din (9), (11) și (12) conchidem că în \mathcal{D} avem $u_3 = \text{const.}$ dacă $\mathcal{L} = \mathcal{L}''$, și $u_3 = 0$ dacă $\mathcal{L}' \neq \emptyset$. Neglijînd o eventuală deplasare rigidă, vom putea lua și

$$u_3 = 0. \quad (13)$$

Ținînd seama de (9) și (13) în (4), sîntem conduși la relațiile

$$\varepsilon_{31} = \varepsilon_{32} = \varepsilon_{33} = 0, \quad (14)$$

oarecum complementare relației (5.3.9) care stă la baza studiului problemei antiplane. Întrucît tensorul \mathbb{E} se reduce la forma

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (15)$$

rezultă că avem de-a face cu o stare de deformare plană (vezi (1.8.8)).

O astfel de stare poate exista și în altfel de corpuri, dacă sînt satisfăcute condițiile (9), (13). Plecînd direct de la (15), vom avea $u_{1,3} + u_{3,1} = 0$, $u_{2,3} + u_{3,2} = 0$, $u_{3,3} = 0$, de unde

$$\begin{aligned} u_1 &= -x_3 w_{0,1}(x_1, x_2) + u_1^0(x_1, x_2), \\ u_2 &= -x_3 w_{0,2}(x_1, x_2) + u_2^0(x_1, x_2), \\ u_3 &= w_0(x_1, x_2). \end{aligned} \quad (16)$$

În particular, dacă $w_0(x_1, x_2) = 0$, de aci urmează

$$u_1 = u_1^0(x_1, x_2), \quad u_2 = u_2^0(x_1, x_2), \quad u_3 = 0, \quad (17)$$

ceea ce echivalează cu (9), (13).

Întrucît avem $\varepsilon_{33} = 0$, din (3) deducem

$$\sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22}). \quad (18)$$

Starea de tensiune nu variază cu x_3 , dar ea nu e o stare plană:

$$\sigma_{31} = \sigma_{32} = 0, \quad \sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22}) \neq 0. \quad (19)$$

Componenta σ_{33} poate fi astfel eliminată din considerațiile ulterioare.

Ținînd seama de (7), (8) și de (9), (13), și introducînd notația

$$S_0 = \sigma_{11} + \sigma_{22}, \quad (20)$$

de unde urmează

$$\Theta = (1 + \nu) S_0, \quad (21)$$

obținem acum ecuațiile de echilibru sub forma

$$\sigma_{11,1} + \sigma_{12,2} + F_1 = 0, \quad \sigma_{12,1} + \sigma_{22,2} + F_2 = 0, \quad (22)$$

și ecuațiile de compatibilitate sub forma

$$\begin{aligned} \Delta \sigma_{11} + S_{0,11} &= -[\nu/(1 + \nu)] \operatorname{div} F - 2F_{1,1}, \\ \Delta \sigma_{22} + S_{0,22} &= -[\nu/(1 + \nu)] \operatorname{div} F - 2F_{2,2}, \\ \Delta \sigma_{12} + S_{0,12} &= -F_{1,2} - F_{2,1}, \end{aligned} \quad (23)$$

unde Δ și div sînt operatori în două variabile. Ecuațiile corespunzătoare indicilor (2,3) și (3,1) se reduc la identități, iar cea corespunzătoare indicilor (3,3) se obține prin adunarea primelor două ecuații (23).

Legea lui Hooke (3) se scrie acum sub forma

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= (1/E) (\sigma_{11} - \nu \sigma_{22} - \nu^2 S_0), \quad \varepsilon_{22} = (1/E) (\sigma_{22} - \nu \sigma_{11} - \nu^2 S_0), \\ \varepsilon_{12} &= [(1 + \nu)/E] \sigma_{12}, \end{aligned} \quad (24)$$

iar ecuațiile geometrice și rotația locală se reduc la

$$\varepsilon_{11} = u_{1,1}, \quad \varepsilon_{22} = u_{2,2}, \quad \varepsilon_{12} = \frac{1}{2}(u_{1,2} + u_{2,1}), \quad (25)$$

$$\omega_{12} = \frac{1}{2}(u_{1,2} - u_{2,1}). \quad (26)$$

Condițiile la limită se scriu (întrucât avem $n_3 = 0$):

$$u_1 = g_1(x_1, x_2), \quad u_2 = g_2(x_1, x_2) \quad \text{pe } \mathcal{L}', \quad (27)$$

$$\sigma_{11}n_1 + \sigma_{12}n_2 = f_1(x_1, x_2), \quad \sigma_{12}n_1 + \sigma_{22}n_2 = f_2(x_1, x_2) \quad \text{pe } \mathcal{L}''. \quad (28)$$

Celelalte componente ale stării elastice, în afară de σ_{33} , sînt nule.

Cele 9 ecuații în tensiuni pentru funcții de x_1, x_2, x_3 se reduc astfel la numai 5 ecuații, pentru funcții de x_1, x_2 . Odată determinate componentele $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}$, componenta σ_{33} rezultă din (18), iar legea lui Hooke (24) și ecuațiile (25) permit găsirea componentelor deplasării.

Funcțiile de studiat sînt definite în domeniul plan \mathcal{D} , de frontieră \mathcal{L} . Dar în timp ce în starea antiplană vectorul tensiune este definit pe elemente de normală *paralelă* cu Ox_3 , în starea de deformare plană el este definit pe elemente cilindrice, de normală *perpendiculară* pe Ox_3 . În locul tensiunilor pe astfel de elemente, vom considera tensiuni pe elemente *de arc* — curbele directoare ale acestor elemente de suprafață. De aceea nu mai putem vorbi — ca în cazul problemei antiplane — despre „tensiunea într-un punct”. Tensiunile se măsoară acum în kgf/cm, subînțelegîndu-se că este vorba de tensiuni pe elemente de suprafață cilindrice, avînd înălțimea de 1 cm (forță pe unitatea de lungime pe curba directoare). Pentru a calcula tensiunile pe alte elemente de suprafață, vom ține seama de (19) și (6).

Să presupunem acum că avem de-a face cu un cilindru *de lungime finită*, cu bazele libere. Rezolvînd problema ca mai sus, obținem o soluție valabilă pentru cilindrul dat, dar cu bazele solicitate de tensiunile $\sigma_{33} \neq 0$ din (18). Aceasta conduce la a rezolva o problemă antiplană elementară (vezi §§ 5.5—5.6). Scăzînd soluția ei din soluția problemei pentru cilindrul infinit, obținem soluția problemei date.

Cu aceasta, putem studia pînă la capăt problema cilindrului lung solicitat de forțe oarecare pe baze, și acționat de forțe de volum și de forțe superficiale (sau cu deplasări la limită) pe suprafața laterală, independente de x_3 , și fără componente după axa Ox_3 .

Problema cilindrului *scurt*, ca și cea a cilindrului acționat de sarcini *oarecare*, pe suprafața sa laterală, nu vor fi abordate aci. Pentru aceste probleme dificile, vezi de exemplu A. Lurie [4], capitolul 7, și I. Sneddon [1], capitolul 10.

Menționăm totuși *problema lui Michell și Almansi*, înrudită cu problema antiplană și cu cea plană (vezi E. Almansi [3]). Este vorba de cazul cilindrului *zvelt*, supus pe suprafața

sa laterală la sarcini reprezentabile prin polinoame în x_3 . O analiză detaliată este datorată lui G. Djanelidze [4] (corpuri izotrope) și [5] (corpuri anizotrope). Raționamentul se bazează pe un procedeu de recurență care permite să se reducă chestiunea la studiul unui șir de probleme similare celei plane, în număr egal cu gradul polinomului, plus unu.

OBSERVAȚIE. Toate aceste raționamente își pierd valabilitatea în cazul corpurilor anizotrope sau neomogene, cu proprietăți mecanice care *nu sînt* independente de x_3 .

§ 3. STAREA DE TENSIUNE PLANĂ GENERALIZATĂ ȘI STAREA DE ÎNCOVOIERE A PLĂCII SUBȚIRI (ECUAȚIILE LUI V. MANEA)

Să considerăm acum un cilindru elastic de înălțime *foarte mică* în raport cu $d(\mathcal{D})$. Un astfel de cilindru se numește *placă*. Planul situat la jumătatea distanței dintre baze se numește *plan median*, și este ales drept plan Ox_1x_2 . Ținînd seama de rolul special al coordonatei x_3 , vom scrie acum $x_3 = z$, $u_3 = w$, și vom atribui indicilor literali numai valorile 1, 2. Bazele $z = \pm h$ se numesc *fețele plăcii*, iar distanța $2h$ între fețe — *grosimea ei*. (Se pot defini și plăci de grosime variabilă.)

Chiar dacă $F_3 = f_3 = 0$, nu mai putem afirma acum că componentele stării elastice sînt independente de x_3 .

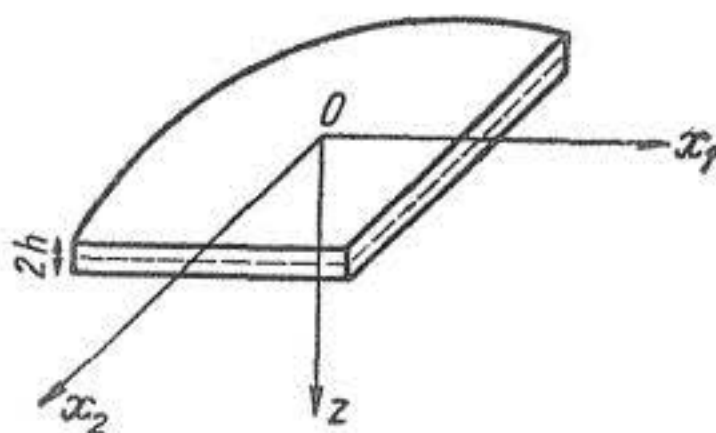


Fig. 6.3.1

În schimb, faptul că înălțimea $2h$ este mică a sugerat (lui Cauchy și Poisson) ideea de a căuta soluția sub forma unei dezvoltări în serie după puterile lui x_3 .

Menționăm și soluția lui A. Lurie [4], capitolul 4, în serii divergente (de altfel ușor de manevrat), și lucrările asupra metodelor simbolice care i-au urmat (vezi A. Agarev [1]; U. Nigul [1]; V. Prokopov [2]; V. V. Vlasov [1]).

Problema plăcii poate fi studiată desigur ca problemă tridimensională. Pentru o grosime destul de mică ($10h < d(\mathcal{D})$) prezintă însă avantaj construirea unui model simplificat, adaptat problemei. Această teorie aproximativă nu este lipsită de contradicții: nu toate ecuațiile elasticiității sînt verificate, și nu toate consecințele relațiilor aproximative sînt utilizabile.

Scopul raționamentelor ce urmează este de a reprezenta starea elastică prin *funcții de două variabile* x_1, x_2 , definite în \mathcal{D} . Subliniem aci — și nu o vom mai repeta — că expresiile ce se obțin sînt de *aspect* mult mai complicat decît cele din teoria generală, dar în fapt au o *structură* mult mai simplă, datorită caracterului lor bidimensional.

a) Componente plane și componente de încovoiere

Nu vom face uz de dezvoltări în serii după puterile lui z , ci vom reține numai câțiva termeni din astfel de dezvoltări, și vom căuta să verificăm cu ajutorul lor ecuațiile și condițiile la limită (metodă semi-inversă).

Remarcăm că orice mărime $a(z)$ (funcție eventual și de x_1, x_2) poate fi scrisă sub forma unei sume de componente *pară* și *impară*¹⁾

$$a(z) = a^+(z) + a^-(z), \quad (1)$$

unde

$$a^+(z) = \frac{1}{2} [a(z) + a(-z)], \quad a^-(z) = \frac{1}{2} [a(z) - a(-z)], \quad (2)$$

astfel că

$$a^+(-z) = a^+(z), \quad a^-(-z) = -a^-(z). \quad (3)$$

Dacă descompunem în acest mod componentele stării elastice — fie ele $a(x_1, x_2, z)$ — se constată ușor că unele din ele descriu o stare ce nu îndepărtează placa de la configurația ei plană, în timp ce altele tind să îndepărteze planul median de la poziția sa inițială. Cele dintîi vor corespunde unei stări numite — provizoriu — *stare plană*; celelalte, unei stări *de încovoiere*.

Din figura 6.3.2 se înțelege că starea plană este descrisă de componente a^+ , dacă a este componenta după Ox_1 sau Ox_2 a deplasării, vectorului tensiune, sau a unei forțe exterioare, — și de componente a^- , dacă a este componenta după Oz a unei astfel de mărimi.

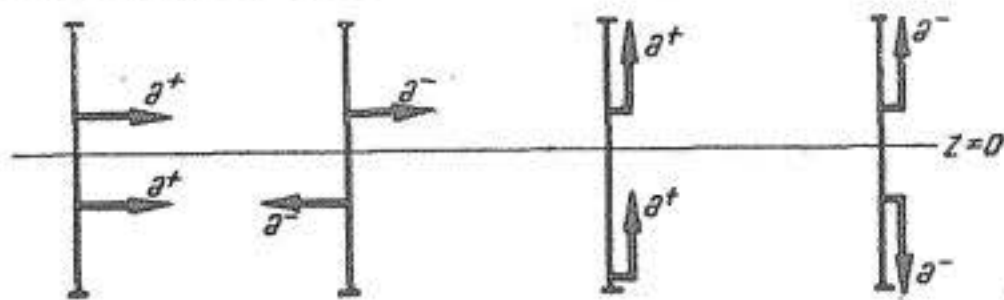


Fig. 6.3.2

Dacă $a(z)$ este un polinom, componentele a^+, a^- vor conține puterile pare, respectiv cele impare ale lui z .

Derivarea în raport cu x_1, x_2 conservă indicii $+, -$, în timp ce derivarea în raport cu z îi intervertește :

$$(a_{,3})^+ = (a^-)_{,3}, \quad (a_{,3})^- = (a^+)_{,3}. \quad (4)$$

Este vizibil că starea plană trebuie să fie caracterizată de mărimile u_i^+, w^- . Ținînd seama de ecuațiile geometrice, de legea lui Hooke, și de cele spuse în legătură cu derivarea în raport cu x_i, z , — conchidem că starea plană trebuie să fie caracterizată de componentele $\sigma_{ik}^+, \sigma_{3i}^-, \sigma_{33}^+$, ale tensiunii.

¹⁾ Acest punct de vedere a fost amănunțit dezvoltat de către K. Friedrichs și R. Dressler [1]. În aceeași lucrare se propune o teorie a plăcilor bazată pe o idee analogă celei de strat-limită.

Pentru a înțelege aceasta intuitiv, să considerăm de pildă tensiunile $\sigma_{3i}(x_1, x_2, z_0)$ acționind asupra unui element de normală dirijată paralel cu Oz , și tensiunile $\sigma_{3i}(x_1, x_2, -z_0)$, acționind asupra elementului simetric cu el, și avînd normala paralelă de asemenea cu Oz . Dacă aceste mărimi ar fi egale (componentă +), pe elementul $z = -z_0$ de normală dirijată paralel cu sensul *negativ* al axei Oz ar apare o tensiune egală și de semn opus lui $\sigma_{3i}(x_1, x_2, z_0)$, și placa ar fi supusă la încovoiere. Pentru a obține starea plană, este necesar să reținem deci componente (-) ale lui σ_{3i} .

Tot astfel, conchidem că avem de-a face cu o stare plană dacă $\sigma_{33}(x_1, x_2, z) = -\sigma_{-3,3}(x_1, x_2, -z)$, așadar dacă σ_{33} se reduce la componenta sa (+).

Aceste raționamente permit să notăm în mod potrivit componentele forțelor superficiale pe fețele plăcii. Anume, vom scrie

$$\sigma_{3i}|_{z=\pm h} = \pm q_i^{s,j}(x_1, x_2); \quad \sigma_{33}|_{z=\pm h} = \pm q^{s,j}(x_1, x_2), \quad (5)$$

unde indicii superiori s, j și semnele $+$, $-$ corespund valorilor $z = \pm h$ (fața de sus, și fața de jos). (Dublul semn din membrul al doilea dispăre, dacă în primul membru indicele 3 este înlocuit cu indicele normalei n .)

Mai departe, în spiritul notației din (2), vom scrie

$$q_i^{\pm} = \frac{1}{2}(q_i^s \pm q_i^j), \quad q^{\pm} = \frac{1}{2}(q^s \pm q^j). \quad (6)$$

După cum am arătat mai sus, starea plană este caracterizată de prezența componentelor σ_{33}^+ , σ_{3i}^+ ; prin ur-

mare, trebuie să avem în acest caz $q^s = -q^j$, și $q_i^s = q_i^j$, sau încă $q^+ = q_i^- = 0$ (ceea ce corespunde cu al patrulea și primul caz din fig. 6.3.2, și — pentru sarcina normală — cu primul caz din fig. 6.3.3). Pentru starea de încovoiere, raționamentele sînt complementare celor de aci.

Separarea părții pare de cea impară se poate realiza cu ajutorul operatorului ce face să corespundă oricărei funcții — media ei pe grosimea plăcii (care se va nota, numai în acest paragraf, cu o bară așezată superior):

$$\bar{a}(x_1, x_2) = \overline{a(x_1, x_2, z)} = (1/2h) \int_{-h}^h a(x_1, x_2, z) dz. \quad (7)$$

Într-adevăr, pentru orice funcție $a(x_1, x_2, z)$ avem evident

$$\overline{a^+} = \bar{a}, \quad \overline{a^-} = 0, \quad \overline{a^+ z} = 0, \quad \overline{a^- z} = \bar{a} z. \quad (8)$$

Se înțelege că cunoașterea celor două funcții de 2 variabile \bar{a} și $\bar{a}z$, nu echivalează cu cunoașterea funcției de 3 variabile a . Dar pentru funcții ce variază *liniar* pe grosimea plăcii:

$$a(x_1, x_2, z) = a^0(x_1, x_2) + z a'(x_1, x_2), \quad (9)$$

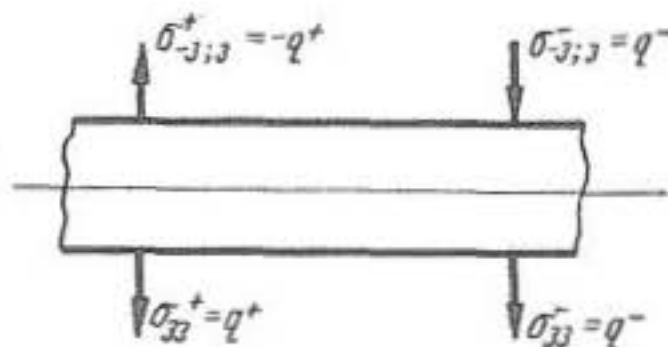


Fig. 6.3.3

avem imediat

$$a^+ = a^0(x_1, x_2) = \bar{a}, \quad a^- = z a'(x_1, x_2) = 3h^{-2} z \bar{a}z. \quad (10)$$

În cazul unor funcții cu variație *parabolică*:

$$a(x_1, x_2, z) = a^0(x_1, x_2) + z a'(x_1, x_2) + z^2 a''(x_1, x_2), \quad (11)$$

căpătăm

$$\bar{a} = a^0 + \frac{1}{3} h^2 a''; \quad (12)$$

astfel că (11) se mai poate scrie (*a'* păstrînd expresia din (10)) sub forma

$$a(x_1, x_2, z) = \bar{a} + z a' + (z^2 - \frac{1}{3} h^2) a''. \quad (13)$$

Integrarea în raport cu z permută cu derivarea în x_1 sau x_2 . În schimb, avem

$$\overline{(a, z)} = (1/2h) \int_{-h}^h a, z \, dz = (1/h) a^-(h), \quad (14)$$

(în timp ce, evident, $(\bar{a}), z = 0$), și tot astfel

$$\overline{(z a, z)} = (1/2h) \int_{-h}^h [(az), z - a] \, dz = a^+(x_1, x_2, h) - \bar{a}(x_1, x_2). \quad (15)$$

Teoria clasică caută soluția problemei sub o formă *liniară* în z . Aceasta conduce la contradicții ce vor fi explicitate mai jos, la pag. 368. Mărind gradul polinoamelor în z alese, se poate realiza — cu prețul unei ridicări a ordinului ecuațiilor — o mai bună satisfacere a condițiilor la limită.

Pionierul cercetării în această problemă (cu accent asupra chestiunii, mai dificile, a încovoierii plăcilor) este E. Reissner [1]—[3]. Ecuații analoge au fost stabilite de L. Bolle [1]. Asupra acestor ecuații — ce au avantajul de a conduce la soluții în care apare soluția clasică, *plus* termeni de corecție — vezi încă I. Babuska și M. Prager [1]; A. Goldenveizer [2]; B.F. Vlasov [1]. Aceeași problemă a mai fost abordată de către O. Aksentian și I. Vorovici [1]; K. Friedrichs [2]; A. Goldenveizer [3]; A. Goldenveizer și A. Kolos [1]; T. Hacıaturian [1], [2]; A. Kolos [1], [2]; D. Morgenstern [1], [2]; H. Muștari [2]; M. Șeremetiev și B. Pelch [1]; R. Tiffen [1]; I. Vekua [2] etc.

În cele ce urmează, vom expune un rezultat al lui V. Manea [2], [3], [4], [7], interesant prin simplitatea sa, prin posibilitatea utilizării aproape imediate a teoriei funcțiilor complexe (vezi § 12), și ușor generalizabil la cazul plăcilor de grosime medie (V. Manea [6]).

Vom începe prin a căuta componentele deplasării ca expresii liniare în z . Diferite încercări au condus la a alege

$$u_i = u_i^0 + z u_i', \quad w = w(x_1, x_2, z), \quad i = 1, 2, \quad (16)$$

unde u_i^0 , u_i' sînt patru funcții de variabilele x_1, x_2 . Ecuațiile (2.4) devin

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ik} &= \frac{1}{2} (u_{i,k}^0 + u_{k,i}^0) + \frac{1}{2} z (u'_{i,k} + u'_{k,i}), \\ \varepsilon_{3i} &= \frac{1}{2} (u'_i + w_{,i}), \quad \varepsilon_{33} = w_{,3},\end{aligned}\tag{17}$$

astfel că pentru dilatarea de volum urmează

$$\theta = \theta^0 + z \theta' + w_{,3},\tag{18}$$

unde am notat

$$\theta^0 = u_{i,i}^0, \quad \theta' = u'_{i,i}.\tag{19}$$

Să acceptăm încă — cu titlu provizoriu — legea lui Hooke, de unde

$$\begin{aligned}\sigma_{ik} &= \lambda (\theta^0 + z \theta' + w_{,3}) \delta_{ik} + \mu [(u_{i,k}^0 + u_{k,i}^0) + z (u'_{i,k} + u'_{k,i})], \\ \sigma_{3i} &= \mu (u'_i + w_{,i}), \quad \sigma_{33} = \lambda (\theta^0 + z \theta') + (\lambda + 2\mu) w_{,3}.\end{aligned}\tag{20}$$

Să ne ocupăm de satisfacerea condițiilor la limită în tensiuni pe fețele plăcii. Dacă σ_{3i} variază liniar pe grosimea plăcii, deducem imediat

$$\begin{aligned}\sigma_{3i}(x_1, x_2, z) &= \frac{1}{2} [\sigma_{3i}(x_1, x_2, h) + \sigma_{3i}(x_1, x_2, -h)] + \\ &+ \frac{1}{2} (z/h) [\sigma_{3i}(x_1, x_2, h) - \sigma_{3i}(x_1, x_2, -h)],\end{aligned}$$

de unde, ținînd seama de notațiile (5), (6) :

$$\sigma_{3i} = q_i^- + (z/h) q_i^+, \quad \sigma_{33} = q^- + (z/h) q^+.\tag{21}$$

Condițiile pe fețe rămîn verificate chiar dacă în componentele tensiunii apar termeni de ordin superior, nuli însă pe fețe :

$$\begin{aligned}\sigma_{3i} &= q_i^- + (z/h) q_i^+ + (1 - z^2/h^2) \psi_i(x_1, x_2), \\ \sigma_{33} &= q^- + (z/h) q^+ + (1 - z^2/h^2) \psi(x_1, x_2).\end{aligned}\tag{22}$$

Desigur, aceasta revine la a preciza într-o anumită măsură funcția w .

b) Eforturi și momente

Pentru a determina pe u_i^0 , u_i' , w , urmează să ținem seama acum de ecuațiile de echilibru, încă nefolosite. Introducînd (20), (22) în (2.1), am obține — prin identificarea coeficienților puterilor lui z — un număr de ecuații *superior* celui al funcțiilor necunoscute. De aceea, sîntem obligați să separăm numai termenii pari și cei impari în z , ceea ce se poate realiza

cu ajutorul integrării pe grosime. În felul acesta, se introduce *mediile* pe grosime ale cantităților cu care operăm, precum și termeni ce caracterizează *liniar* abaterea lor de la valoarea medie — ceea ce este acceptabil, întrucât h este mic, și o evaluare exactă a componentelor stării elastice ca funcții de z nu ar avea sens.

Pentru componentele tensiunii, aceasta conduce la a introduce cantitățile

$$S_{ik} = \int_{-h}^h \sigma_{ik} dz, \quad S_{3i} = \int_{-h}^h \sigma_{3i} dz, \quad S_{33} = \int_{-h}^h \sigma_{33} dz; \quad (23)$$

$$N_{ik} = \int_{-h}^h \sigma_{ik} z dz, \quad N_{3i} = \int_{-h}^h \sigma_{3i} z dz, \quad N_{33} = \int_{-h}^h \sigma_{33} z dz. \quad (24)$$

Ținând seama de definiția (7) și de relațiile (8), avem de pildă

$$S_{ik} = 2h \bar{\sigma}_{ik} = 2h \bar{\sigma}_{ik}^+, \quad N_{ik} = 2h \bar{\sigma}_{ik} z = \bar{\sigma}_{ik}^- z. \quad (25)$$

Pentru a înțelege semnificația mecanică a cantităților S_{ik} , N_{ik} , să considerăm un element de suprafață cilindric de generatoare paralele cu Oz , având înălțimea $2h$, și normala paralelă de pildă cu axa Ox_1 .

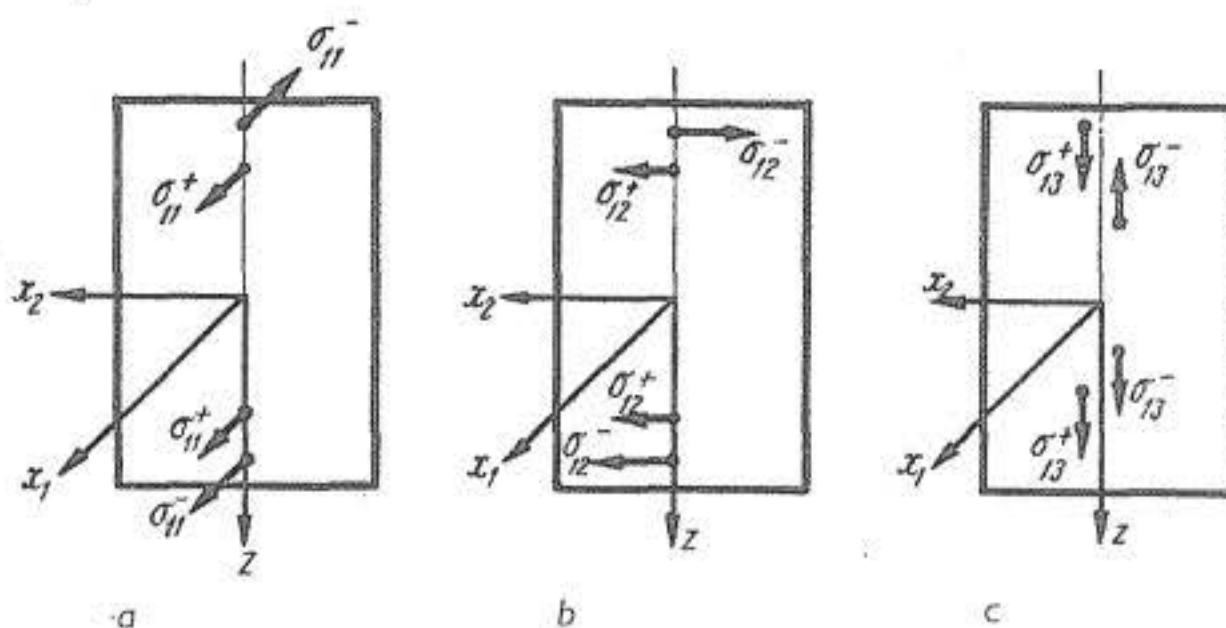


Fig. 6.3.4

Forțele σ_{11}^+ , σ_{12}^+ , σ_{13}^+ din figură formează sisteme echivalente cu cîte o forță unică. Forțele σ_{11}^- , σ_{12}^- formează sisteme echivalente cu cîte un cuplu de moment dirijat după Ox_2 , respectiv Ox_1 . Forțele σ_{13}^- formează un sistem echivalent cu zero.

Prin urmare, mărimile S_{11} , S_{12} (și similar S_{22}) sînt rezultante ale componentelor, paralele cu Ox_1x_2 , ale tensiunilor pe generatoarele unor elemente de suprafață cilindrice. Mărimile S_{11} , S_{22} se numesc *eforturi de înlindere* (sau de *compresiune*), iar S_{12} este un *efort de alunecare*. Mărimile S_{13} și S_{23} sînt rezultante ale componentelor tangențiale ale tensiunii pe aceleași elemente cilindrice; ele se numesc *forțe tăietoare*. (Apariția lor, obligatorie și în teoria elementară a plăcilor, contrazice flagrant relațiile ce ar trebui să decurgă — vezi mai jos — din (84).)

Tot astfel, N_{11} (și analog N_{22}) sînt momente rezultante ale tensiunilor σ_{11} (respectiv σ_{22}); efectul lor este acela de a încovoia elementul cilindric considerat, silindu-l să se rotească în jurul unei axe paralele cu Ox_2 (respectiv Ox_1), așadar în afara planului său; din acest motiv, ele se

numesc *momente incovoietoare*. În fine, N_{12} este momentul rezultat al tensiunilor σ_{12} , și el tinde să rotească elementul considerat în jurul unei axe paralele cu Ox_1 , așadar în planul său; de aceea el se numește *moment de torsiune*.

Mărimile S_{33} și N_{33} nu au o semnificație mecanică. Mărimile N_{3i} vor dispărea și ele din considerațiile ulterioare (vezi mai jos pp. 361 și 364). Remarcăm totodată că din figura 6.3.4, c), urmează că componenta după Oz a momentului rezultat al tensiunilor σ_{3i} este nulă.

Considerînd în planul median o curbă oarecare \mathcal{C} de normală \mathbf{n} , drept curbă directoare a unui element cilindric, și calculînd torsorul tensiunilor σ_{ni} (x_1, x_2, z) față de punctul $x_1, x_2, 0$ de pe generatoarea acestui element, obținem:

$$\begin{aligned} \text{rezultanta :} & \quad 2h \overline{\sigma_{n1}}, \quad 2h \overline{\sigma_{n2}}, \quad 2h \overline{\sigma_{n3}}; \\ \text{momentul rezultat :} & \quad 2h \overline{\sigma_{n2} z}, \quad -2h \overline{\sigma_{n1} z}, \quad 0. \end{aligned} \quad (26)$$

Prin urmare, rezultanta și momentul rezultat al tensiunilor pe un astfel de element se calculează introducînd relațiile lui Cauchy (2.6) în (26), și ținînd apoi seama de (23), (24). Dacă axele locale (\mathbf{n}, \mathbf{s}) sînt orientate la fel cu axele (x_1, x_2), putem defini eforturile și momentele (23), (24), făcînd uz de formulele de transformare (2.5.5). Noile componente se vor nota evident $S_{nn}, S_{ss}, S_{ns}, S_{nz}, S_{sz}, N_{nn}, N_{ss}, N_{ns}$, etc.

În felul acesta, formulele (23), (24) înlocuiesc studiul celor 6 componente ale tensiunii σ_{ik} , funcții de 3 variabile, prin studiul a 5 eforturi și 3 momente, funcții de numai 2 variabile, și privite ca „reduse” la planul median.

Pentru a putea face uz de (20) și (22) în (23) și (24), vom mai observa că

$$\int_{-h}^h z^2 dz = \frac{2}{3} h^3, \quad \int_{-h}^h (1 - z^2/h^2) dz = \frac{4}{3} h. \quad (27)$$

Cu aceasta, introducînd (20) în (23), (24) și păstrînd pentru integrala derivatei $w_{,3}$ notația $2hw_{,3}$, obținem acum

$$\begin{aligned} S_{ik} &= 2h \lambda (\theta^0 + \overline{w_{,3}}) \delta_{ik} + \mu (u'_{i,k} + u'_{k,i}), \\ S_{3i} &= 2h \mu (u'_i + \overline{w_{,i}}), \quad S_{33} = 2h [\lambda \theta^0 + (\lambda + 2\mu) \overline{w_{,3}}], \end{aligned} \quad (28)$$

și tot astfel:

$$\begin{aligned} N_{ik} &= 2h \lambda \left(\frac{1}{3} h^2 \theta' + \overline{z w_{,3}} \right) \delta_{ik} + \frac{2}{3} h^3 \mu (u'_{i,k} + u'_{k,i}), \\ N_{3i} &= 2h \mu \overline{z w_{,i}}, \quad N_{33} = 2h \left[\frac{1}{3} h^2 \lambda \theta' + (\lambda + 2\mu) \overline{z w_{,3}} \right]. \end{aligned} \quad (29)$$

Remarcăm aci prezența mărimilor medii \overline{w} (care va fi păstrată, ca avînd o evidentă semnificație mecanică), și $\overline{w_{,3}}$ și $\overline{z w_{,3}}$, care trebuie eli-

minate : vezi (14), (15). În acest scop, vom remarca mai întâi că forțele tăietoare S_{3i} pot fi calculate și cu ajutorul expresiilor (22). Utilizând și (27), obținem astfel :

$$S_{3i} = 2h q_i^- + \frac{4}{3} h \psi_i, \quad (30)$$

și deci, comparînd cu (28) :

$$\psi_i = \frac{3}{2} [\mu (u_i' + \bar{w}_{,i}) - q_i^-]. \quad (31)$$

În felul acesta, componentele tangențiale din (22) ale tensiunii devin

$$\sigma_{3i} = q_i^- + (z/h) q_i^+ + \frac{3}{2} (1 - z^2/h^2) [\mu (u_i' + \bar{w}_{,i}) - q_i^-]. \quad (32)$$

Un raționament analog pentru componenta normală σ_{33} dă întâi

$$S_{33} = 2h q^- + \frac{4}{3} h \psi, \quad (33)$$

și deci, prin comparație cu (28) :

$$\lambda \theta^0 + (\lambda + 2\mu) \bar{w}_{,3} = q^- + \frac{2}{3} \psi. \quad (34)$$

Să presupunem pentru moment că cele 3 componente ale deplasări ar fi polinoame de grad 2 în z . După cum rezultă din (12), media θ^0 s-ar înlocui prin $\theta^0 + \frac{1}{3} h^2 \theta''$, și am avea $\bar{w}_{,3} = w'$. Prin urmare, (34) ar deveni

$$\lambda (\theta^0 + \frac{1}{3} h^2 \theta'') + (\lambda + 2\mu) w' = q^- + \frac{2}{3} \psi. \quad (35)$$

Dar pentru o aproximație liniară a lui σ_{33} , deducem (vezi și (21))

$$\lambda \theta^0 + (\lambda + 2\mu) w' = q^-, \quad (36)$$

astfel că funcția de corecție ψ depinde în întregime de termenii patratici în expresiile u_i , prin intermediul lui $\theta'' = u_{i,i}''$ (spre deosebire de ψ_i care depind de termenii liniari u_i'). În spiritul aproximației adoptate, ψ trebuie deci neglijată, astfel că rămîne

$$\sigma_{33} = q^- + (2/h) q^+. \quad (37)$$

Să comparăm această expresie cu cea care rezultă din (20) :

$$\sigma_{33} = \lambda (\theta^0 + z \theta') + (\lambda + 2\mu) w_{,3}. \quad (38)$$

Integrând ambele expresii în raport cu z , deducem

$$2h [\lambda \theta^0 + (\lambda + 2\mu) \overline{w}_{,3}] = 2h q^-. \quad (39)$$

Înmulțindu-le cu z și integrând, deducem de asemenea

$$\frac{2}{3} h^3 \lambda \theta' + (\lambda + 2\mu) 2h \overline{zw}_{,3} = \frac{2}{3} h^2 q^+. \quad (40)$$

Prin urmare, avem

$$\overline{w}_{,3} = \frac{1}{\lambda + 2\mu} (q^- - \lambda \theta^0), \quad \overline{zw}_{,3} = \frac{h}{3(\lambda + 2\mu)} (q^+ - h \lambda \theta'), \quad (41)$$

ceea ce permite să eliminăm termenii corespunzători din (28), (29).

După calcule elementare, sîntem conduși la relațiile

$$S_{ik} = 2h \left[\frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu} \theta^0 \delta_{ik} + \mu (u_{i,k}^0 + u_{k,i}^0) + \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} q^- \delta_{ik} \right], \quad (42)$$

$$S_{3i} = 2h \mu (u_i' + \overline{w}_{,i}), \quad S_{33} = 2h q^-,$$

și respectiv

$$N_{ik} = \frac{2}{3} h^3 \left[\frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu} \theta' \delta_{ik} + \mu (u_{i,k}' + u_{k,i}') \right] + \frac{2h^2 \lambda}{3(\lambda + 2\mu)} q^+ \delta_{ik},$$

$$N_{3i} = 2h \mu \overline{zw}_{,i}, \quad N_{33} = \frac{2}{3} h^2 q^+. \quad (43)$$

Relațiile (42), (43) sînt ecuațiile fizico-geometrice ale teoriei plăcilor subțiri, transcrise în eforturi și momente. Acestea din urmă depind la rîndul lor de 5 funcții de 2 variabile: u_i^0 , u_i' , și \overline{w} .

Ținînd seama de cele spuse la pag. 354, precum și de relațiile (25), rezultă că starea plană va fi caracterizată de cantitățile S_{ik} , N_{3i} și S_{33} , — în timp ce starea de încovoiere va fi caracterizată de cantitățile N_{ik} , S_{3i} și N_{33} .

Putem trece acum la ecuațiile (2.1) pe care le vom scrie sub forma

$$\sigma_{ik,k} + \sigma_{i3,3} + F_i = 0, \quad \sigma_{3i,k} + \sigma_{33,3} + F_3 = 0. \quad (44)$$

Ținînd seama de definițiile eforturilor și momentelor (23), (24), scriind forțele de volum sub forma ce rezultă din (7), (8) și făcînd în fine uz de (14), (15), obținem prin integrarea ecuațiilor (44) în raport cu z :

$$S_{ik,k} + 2\sigma_{3i}^-(h) + 2h \overline{F}_i = 0,$$

$$S_{3k,k} + 2\sigma_{33}^-(h) + 2h \overline{F}_3 = 0. \quad (45)$$

Înmulțind în (44) cu z și integrând în raport cu z , deducem și

$$\begin{aligned} N_{ik,k} + 2h \sigma_{3i}^+(h) - S_{3i} + 2h \overline{F_i} z &= 0, \\ N_{3k,k} + 2h \sigma_{33}^+(h) - S_{33} + 2h \overline{F_3} z &= 0. \end{aligned} \quad (46)$$

Dar din condițiile la limită (5), (6) pe fețele plăcii urmează că

$$\sigma_{3i}^-(h) = q_i^+, \quad \sigma_{33}^-(h) = q^+; \quad \sigma_{3i}^+(h) = q_i^-, \quad \sigma_{33}^+(h) = q^-. \quad (47)$$

În definitiv, cele 6 ecuații (45), (46) se separă în două grupuri de câte 3 ecuații, primele relative la starea plană, iar celelalte, la starea de încovoiere :

$$\begin{cases} S_{ik,k} + 2h \overline{F_i} + 2q_i^+ = 0, \end{cases} \quad (48)$$

$$\begin{cases} N_{3k,k} - S_{33} + 2h q^- + 2h \overline{F_3} z = 0, \end{cases} \quad (49)$$

$$\begin{cases} N_{ik,k} - S_{3i} + 2h \overline{F_i} z + 2h q_i^- = 0, \end{cases} \quad (50)$$

$$\begin{cases} S_{3k,k} + 2h \overline{F_3} + 2q^+ = 0. \end{cases} \quad (51)$$

Să încercăm acum să realizăm o separare analogă în condițiile la limită pe suprafața laterală ; prin integrare pe grosime, din relațiile (2.8) — unde g_i, f_i depind de data aceasta și de z — obținem din nou condiții relative la frontiera \mathcal{L} a domeniului \mathcal{D} .

Ținând seama de expresiile (16), de formula (10), și de valorile din (27), căpătăm imediat pentru datele la limită în deplasări

$$u_i^0 = \overline{g_i}, \quad \overline{w} = \overline{g_3}, \quad u_i' = 3h^{-2} \overline{g_i} z \quad \text{pe } \mathcal{L}'. \quad (52)$$

Pentru condițiile la limită în tensiuni obținem — ținând seama că pe suprafața laterală avem $n_3 = 0$ —

$$\begin{cases} S_{ik} n_k = 2h \overline{f_i}, & S_{3k} n_k = 2h \overline{f_3}, \\ N_{ik} n_k = 2h \overline{f_i} z, & N_{3k} n_k = 2h \overline{f_3} z \end{cases} \quad \text{pe } \mathcal{L}''. \quad (53)$$

Cantitățile $\overline{f_i}, \overline{f_3}$ și $\overline{f_i} z, \overline{f_3} z$ sînt componentele torsorului pe grosimea plăcii a forțelor superficiale aplicate în lungul generatoarelor. Dată fiind grosimea mică a plăcii, este greu să măsurăm cantitățile f_i, f_3 ca funcții de z , astfel că folosirea numai a torsorului lor corespunde informației de care dispunem în fapt. Tot din cauza micii grosimi a plăcii, putem face uz de principiul lui Saint-Venant, și afirma că înlocuirea sistemului real de sarcini f_i, f_3 printr-un sistem static echivalent lui, este admisibilă. (Aceasta se confirmă la cercetare exactă : vezi A. Goldenveizer [3].)

Din (52), (53) se vede că o separare similară a celor două stări este realizabilă. Sistemul (48), (49) trebuie deci rezolvat cu datele

$$\begin{aligned} u_i^0 &= \overline{g_i} & \text{pe } \mathcal{L}', \\ S_{ik} n_k &= 2h \overline{f_i}, & N_{3k} n_k = 2h \overline{f_3} z & \text{pe } \mathcal{L}'', \end{aligned} \quad (54)$$

iar sistemul (50), (51) va fi însoțit de datele la limită

$$\overline{w} = \overline{g}_3, \quad u'_i = 3h^{-2} \overline{g}_i z \quad \text{pe } \mathcal{L}', \quad (55)$$

$$N_{ik} n_k = 2h \overline{f}_i z, \quad S_{3k} n_k = 2h \overline{f}_3 \quad \text{pe } \mathcal{L}''.$$

Această separare totală a ecuațiilor și datelor la limită reprezintă principala simplificare de atins. Dar totodată această separare a celor două stări ce apar în placă reprezintă marele dezavantaj al utilizării lor — în comparație cu plăcile curbe subțiri (corpuri de mică grosime, dar a căror suprafață mediană nu mai e un plan): în acestea din urmă, componentele stării „plane” (în acest caz: situate în planul tangent la suprafața mediană) și cele ale stării de încovoiere sînt intrinsec legate, și asigură o mult mai bună repartizare a tensiunilor în material.

c) Starea de tensiune plană generalizată

Să presupunem că forțele de volum și datele la limită sînt de așa natură, încît fenomenul de încovoiere nu apare. Vom alege (vezi pag. 354—355)

$$\overline{F}_i z = \overline{F}_3 = 0, \quad \overline{g}_i z = \overline{g}_3 = 0 \quad \text{pe } \mathcal{L}'. \quad (56)$$

$$\overline{f}_i z = \overline{f}_3 = 0 \quad \text{pe } \mathcal{L}'', \quad q^+ = q^- = 0.$$

Sistemul (50), (51) cu datele (55) va fi un sistem omogen. Ținînd seama și de ecuațiile (42), (43), acest sistem admite soluția identică nulă. (Nu dispunem de o teoremă de unicitate, și deci nu se poate afirma că aceasta este *singura* soluție a problemei cu date nule pentru forțe și deplasări la limită.)

Rămîne deci de rezolvat sistemul (48), (49), cu datele la limită din (54) pe suprafața laterală, și cele ce decurg din (22) pe fețe:

$$\sigma_{3i}(\pm h) = \pm q_i^+, \quad \sigma_{33}(\pm h) = q^-. \quad (57)$$

Ținînd seama în (22) de funcția de corecție ψ_i din (31), și observînd că aceasta este nulă în virtutea relației a doua din (56), și a faptului că componenta S_{3i} din (42) este acum nulă, amintind că $\psi = 0$, și ținînd seama și de ultimele relații (56), sîntem conduși la a serie

$$\sigma_{3i}(x_1, x_2, z) = (z/h) q_i^+, \quad \sigma_{33}(x_1, x_2, z) = q^-, \quad (58)$$

astfel că componentele de indice 3 ale tensiunii sînt determinate elementar, în funcție de sarcina pe fețe. De acum încolo, *ne putem limita la cazul în care fețele plăcii sînt libere.*

Să examinăm ecuația (49). Întrucît $S_{33} = 2h q^-$ (vezi (42)), rezultă că — chiar pentru placa ale cărei fețe nu sînt libere — (49) devine

$$N_{3k,k} + 2h \overline{F}_3 z = 0. \quad (59)$$

Introducînd (29) în (59), căpătăm acum

$$\mu \Delta zw + \overline{F}_3 z = 0. \quad (60)$$

Presupunând deplasarea normală w scrisă de asemenea sub formă polinomială în z , rezultă că în (60) va apare laplasianul componentei sale impare w' — așadar al unei mărimi greu de evaluat cu precizie pentru o placă subțire. Ținând seama de acest fapt, de faptul că mărimile N_{3i} nu au semnificație mecanică, de faptul că cantitatea $\bar{z}\bar{w}$ nu intervine în datele la limită, conchidem că (60) este o relație incertă între mărimi de al doilea ordin, pe care o vom neglija. (Raționamente mai precise confirmă acest mod de a proceda.)

Drept sistem de ecuații de echilibru vom reține deci numai ecuațiile (48) care, întrucât fețele sînt libere, devin acum

$$S_{ik,k} + 2h \bar{F}_i = 0. \quad (61)$$

Datele la limită (54) devin la rîndul lor

$$u_i^0|_{\mathcal{L}'} = \bar{g}_i, \quad S_{ik} n_k|_{\mathcal{L}''} = 2h f_i, \quad (62)$$

iar ecuațiile fizico-geometrice (42) se reduc la

$$S_{ik} = 2h [\lambda^* \theta^0 \delta_{ik} + \mu (u_{i,k}^0 + u_{k,i}^0)], \quad (63)$$

unde s-a notat

$$\lambda^* = 2\lambda\mu/(\lambda + 2\mu). \quad (64)$$

Formulele (63) pot fi evident privite ca reprezentînd legea lui Hooke pentru un corp aflat în *stare de deformare plană*, cu constanta λ înlocuită prin λ^* . Relațiile (61) și (62) coincid cu (2.22), (2.27) și (2.28) — scrise însă pentru *mediile* pe grosime ale deplasărilor, tensiunilor, forțelor de volum, și datelor la limită.

Condiției (2.14) îi corespunde aci (vezi (58), cazul fețelor libere):

$$S_{31} = S_{32} = S_{33} = 0. \quad (65)$$

Prin analogie cu (2.5.15), o astfel de stare va fi numită *stare de tensiune plană generalizată* — căci nu tensorul tensiune, ci numai cel al tensiunilor medii are (aproximativ) proprietatea ce ne interesează: componente independente de z , și orientate în plane paralele cu planul $z = 0$.

Întrucît sistemul format de ecuațiile de echilibru și de ecuațiile de compatibilitate constituie un echivalent al sistemului complet de ecuații, urmează că problema stării plane de tensiune generalizate este rezolvată prin studiul aceluiași ecuații (2.22), (2.23) ca în starea plană de deformare scrise însă pentru valorile medii u_i^0 , $(1/2h) S_{ik}$, pentru mediile datelor la limită, și pentru același domeniu, dar pentru constantele modificate λ^* , μ .

Din (3.4.6), (3.4.7), (3.4.16) urmează, ținînd seama de (64):

$$\begin{aligned} \lambda^* &= \frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu}, \quad \mu^* = \mu, \quad \nu^* = \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} = \frac{\nu}{1 + \nu}, \quad E^* = E \frac{1 + 2\nu}{(1 + \nu)^2}; \\ \lambda &= \frac{2\lambda^*\mu}{2\mu - \lambda^*}, \quad \nu = \frac{\nu^*}{1 - \nu^*}, \quad E = E^* \frac{1}{1 - \nu^{*2}}. \end{aligned} \quad (66)$$

Cu aceasta, problema plăcii solicitate în condițiile ce rezultă din (56) și avînd fețele libere se reduce la studiul stării plane de deformare, și nu vom avea a ne mai ocupa de ea. *Sub o formă mai elementară, aceeași concluzie decurge din raționamentele lui N. Mushelişvili [3], § 26.*

OBSERVAȚIA 1. Legea lui Hooke pentru starea de tensiune plană generalizată este o consecință a legii lui Hooke (2.3) în care se ia $\sigma_{33} = 0$ — astfel că domeniul ei de valabilitate este mai larg decît ar părea. Într-adevăr, în acest caz avem

$$\varepsilon_{11} = (1/E) (\sigma_{11} - \nu \sigma_{22}), \quad \varepsilon_{22} = (1/E) (\sigma_{22} - \nu \sigma_{11}). \quad (67)$$

Ținînd seama de (3.4.7) și încercînd să separăm, de pildă, un termen de forma $2\mu\varepsilon_{11}$, obținem ușor

$$\sigma_{11} = \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_{11} + \nu \varepsilon_{22}) = \frac{2\mu}{1 - \nu} (\varepsilon_{11} + \nu \varepsilon_{22}) = \frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu} (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) + 2\mu\varepsilon_{11},$$

astfel încît constanta modificată din (64) apare și aci. Pentru σ_{22} găsim o expresie similară. Constanta μ rămîne nealterată.

Presupunerea $\sigma_{33} = 0$ este frecvent utilizabilă. Într-adevăr, sarcina normală pe fețele plăcii nu depășește de obicei cîteva tone pe m^2 (planșee încărcate cu utilaj greu). Din formula linară (37) urmează că σ_{33} variază între 0 (pe fața inferioară, nesolicitată) și valoarea sarcinii pe unitatea de suprafață de pe fața superioară, așadar este de ordinul a cîteva kgf/cm^2 . În fond, placa plană joacă rolul unei adevărat „transformator” al tensiunilor: sarcinile normale, cărora (din cauza micii grosimi) ea nu le poate rezista, sînt transformate în tensiuni dirijate în planul median.

OBSERVAȚIA 2. Ca și în cazul stării plane de deformare, ecuațiile (61), (63) formează un sistem de 5 ecuații de primul ordin pentru 5 funcții necunoscute. Introducînd (63) în (61), obținem imediat

$$\mu \Delta u_i^0 + (\lambda^* + \mu) \theta_{,i}^0 + \bar{F}_i = 0, \quad (68)$$

așadar un sistem de 2 ecuații de ordinul al doilea pentru 2 funcții necunoscute de 2 variabile. Desigur, acesta este un sistem de ecuații Lamé bidimensionale (vezi și § 4.8).

Pentru studiul stării de tensiune plană generalizată, vezi încă și lucrările lui E. Reiss și S. Locke [1]; R. Salganik [1]; E. Vorovici [1].

d) Starea de încovoiere a plăcii subțiri

Să presupunem acum că forțele de volum și datele la limită sînt de așa natură, încît să nu apară starea de tensiune plană generalizată. Pentru aceasta, vom face ipotezele complementare celor din (56), așadar vom presupune

$$\begin{aligned} \bar{F}_i = \bar{F}_3 z = 0, \quad \bar{g}_i = \bar{g}_3 z = 0 \quad \text{pe } \mathcal{L}', \\ \bar{f}_i = \bar{f}_3 z = 0 \quad \text{pe } \mathcal{L}'', \quad q^- = q_i^+ = 0. \end{aligned} \quad (69)$$

Sistemul (48), (49) cu datele (54) va admite deci (vezi (42), (43)) soluția identic nulă. Rămâne de rezolvat sistemul (50), (51), cu datele (55) pe suprafața laterală, și cele ce decurg din (22) pe fețe:

$$\sigma_{3i}(\pm h) = q_i^-, \quad \sigma_{33}(\pm h) = \pm q^+. \quad (70)$$

Cu aceasta, ecuațiile de echilibru ale problemei capătă forma

$$\begin{aligned} N_{ik,k} - S_{3i} + 2h \overline{F}_i z + 2h q_i^- &= 0, \\ S_{3k,k} + 2h \overline{F}_3 + 2q^+ &= 0, \end{aligned} \quad (71)$$

de rezolvat împreună cu ecuațiile fizico-geometrice ce ne rămân din (42), (43):

$$N_{ik} = \frac{2}{3} h^3 [\lambda^* \theta' \delta_{ik} + \mu(u'_{i,k} + u'_{k,i})] + \frac{1}{3} h^2 (\lambda^*/\mu) q^+ \delta_{ik}, \quad (72)$$

$$S_{3i} = 2h \mu(u'_i + \overline{w}_{,i}), \quad N_{33} = \frac{2}{3} h^2 q^+.$$

Introducând valorile din (72) în (71), obținem

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} h^2 [\mu \Delta u'_i + (\lambda^* + \mu) \theta'_{,i}] - \mu(u'_i + \overline{w}_{,i}) + \\ + \overline{F}_i z + q_i^- + \frac{1}{6} h (\lambda^*/\mu) q^+_{,i} &= 0, \\ \mu \Delta \overline{w} + \mu \theta' + \overline{F}_3 + q^+/h &= 0, \end{aligned} \quad (73)$$

așadar un sistem de 3 ecuații de al doilea ordin, pentru cele 3 funcții necunoscute u'_i, \overline{w} . Primele două ecuații din (73) prezintă o asemănare vizibilă cu ecuațiile (68) ale stării plane. În același timp, este evident gradul sporit de dificultate al problemei încovoierii.

Trecând la condițiile la limită, constatăm că datele de tip Dirichlet din (55) conțin valorile pe frontieră ale celor trei funcții necunoscute. Poate prezenta utilitate înlocuirea componentelor u'_1, u'_2 prin componente ce se vor nota u'_n, u'_s (proiecții ale aceleiași mărimi cu caracter vectorial, pe axele locale (n, s) în fiecare punct al frontierei).

În ce privește datele de tip Neumann din (55), ele pot fi de asemenea transcrise, cu ajutorul relațiilor (72), prin intermediul lui u'_i, \overline{w} — ceea ce conduce însă la 3 expresii foarte complicate de al doilea ordin. Semnificația mărimilor ce apar în aceste condiții este aceea a unor momente N_{n1}, N_{n2} și a unei forțe tăietoare S_{n3} . Ca și mai sus, este preferabil să trecem în fiecare punct de pe frontiera laterală la axele locale (n, s) , și să înlocuim — în urma unei rotații de axe — momentele N_{n1}, N_{n2} prin N_{nn} și N_{ns} (moment de încovoierie, respectiv de torsiune, pe elementul frontieră de normală n). Condițiile de tip Neumann din (55) devin atunci

$$N_{nn}|_{\mathcal{L}''} = N_{nn}(s), \quad N_{ns}|_{\mathcal{L}''} = N_{ns}(s), \quad S_{n3}|_{\mathcal{L}''} = S_{n3}(s), \quad (74)$$

unde funcțiile din al doilea membru sînt funcții cunoscute de arcul s .

După cum se vede, atât condițiile de tip Dirichlet, cât și cele de tip Neumann, sînt în număr de 3 pe fiecare porțiune a frontierei.

Odată rezolvat sistemul (71), se pot determina și componentele tensiunii; anume, din (9), (10) și (24) avem imediat

$$\sigma_{\alpha} = \frac{3}{2} h^{-3} z N_{\alpha}. \quad (75)$$

Pentru componentele σ_{3i} nu putem face uz de formulele (9), (10) și (23): acestea sînt liniare în z , ceea ce este infirmat în (32). Ținînd seama de faptul că la încovoiere avem $q_i^+ = 0$, precum și de expresia (72) a forței tăietoare, căpătăm din (32):

$$\sigma_{3i} = \frac{3}{4} h^{-1} (1 - z^2/h^2) S_{3i} + \left[1 - \frac{3}{2} (1 - z^2/h^2) \right] q_i^-. \quad (76)$$

Dacă se rezolvă sistemul în deplasări (73), componentele tensiunii se deduc introducînd (72) în (75), și făcînd uz de (32) pentru $q_i^+ = 0$.

Să ne fixăm atenția asupra sistemului (73).

Derivînd prima sa ecuație în raport cu x_i și sumînd, obținem

$$\frac{1}{3} h^2 (\lambda^* + 2\mu) \Delta \theta' - \mu (\theta' + \Delta \bar{w}) + z \overline{F_{i,i}} + q_{i,i}^- + \frac{1}{6} h (\lambda^*/\mu) \Delta q^+ = 0. \quad (77)$$

Să introducem aci valoarea lui $\mu (\theta' + \Delta \bar{w})$ din ultima ecuație (73); să înmulțim expresia obținută cu $2h$, și să introducem notațiile

$$D = 2h \left(\frac{1}{3} h^2 \right) (\lambda^* + 2\mu) = \frac{2}{3} h^3 E / (1 - \nu^2), \quad (78)$$

$$Q = 2h \left[\overline{F_3} + z \overline{F_{i,i}} + q^+/h + \frac{1}{6} h (\lambda^*/\mu) \Delta q^+ + q_{i,i}^- \right]. \quad (79)$$

Mărimea D (a nu se confunda cu aria!) se numește *rigiditate la încovoiere* a plăcii. Q este *sarcina normală redusă*. Cu aceasta, (77) devine

$$\Delta \theta' = -Q/D, \quad (80)$$

așadar o ecuație Poisson pentru dilatarea θ' . (Compară cu (4.9.5).)

Izolînd $\Delta \bar{w}$ în ultima ecuație (73), aplicînd în ambii membri operatorul lui Laplace, și ținînd seama de (80), deducem (vezi și (4.10.9)):

$$\Delta \Delta \bar{w} = Q/D - \mu^{-1} \Delta (\overline{F_3} + q^+/h). \quad (81)$$

În fine, prima ecuație (73) (pentru $i = 1, 2$) se poate scrie sub forma

$$\begin{aligned} \mu \left(\frac{1}{3} h^2 \Delta u'_i - u'_i \right) + \frac{1}{3} h^2 (\lambda^* + \mu) \theta'_{,i} - \mu \bar{w}_{,i} + \\ + \left[z \overline{F_{i,i}} + q_i^- + \frac{1}{6} h (\lambda^*/\mu) q_{,i}^+ \right] = 0, \end{aligned} \quad (82)$$

așadar o ecuație de ordinul al doilea pentru fiecare din componentele u'_i , dacă θ' și \bar{w} sînt cunoscute. Aplicînd operatorul biarmonic și ținînd seama de (80), (81), se obțin două ecuații de ordinul al șaselea :

$$\mu \left(\frac{1}{3} h^2 \Delta \Delta \Delta u'_i - \Delta \Delta u'_i \right) + Q_i = 0, \quad i = 1, 2, \quad (83)$$

unde sarcinile reduse Q_i se determină elementar din termenii liberi din (80)–(82).

Determinarea componentelor u'_i conduce deci la studiul unor ecuații de ordin superior celei pentru \bar{w} , și chiar a ecuațiilor lui Lamé în cazul tridimensional. În schimb, numărul variabilelor se reduce de la 3 la 2.

e) Teoria clasică

Varianta clasică a teoriei este bazată pe anumite ipoteze simplificatoare, numite ale lui Love și Kirchhoff. În esență, acestea tind să reducă problema la determinarea unei singure funcții necunoscute. Pentru aceasta, să presupunem că

$$\varepsilon_{33} = 0, \quad \varepsilon_{3i}|_{z=\pm h} = 0, \quad \sigma_{33} = 0. \quad (84)$$

Prima din aceste relații exprimă presupunerea că contracția transversală este neglijabilă, și revine la a lua $w = w^0(x_1, x_2)$, deci la a neglija termenii de forma $\bar{w}_{,3}$. Cea de-a doua — valabilă numai în cazul fețelor libere — este o consecință a teoremei de reciprocitate (vezi finele § 2.4). Împreună cu ipoteza de liniaritate în raport cu z , ea conduce la concluzia $\varepsilon_{3i} \equiv \sigma_{3i} \equiv S_{3i} \equiv 0$, ceea ce ar contrazice flagrant condițiile de echilibru. În fine, cea de-a treia ipoteză (84) — justificată în spiritul celor de la pag. 365 — este evident în contradicție cu cea dintîi (vezi pag. 351).

O imagine intuitivă a acestui ansamblu de ipoteze se realizează dacă presupunem că — dată fiind mica grosime a plăcii — deplasarea w nu variază pe grosime, iar componentele

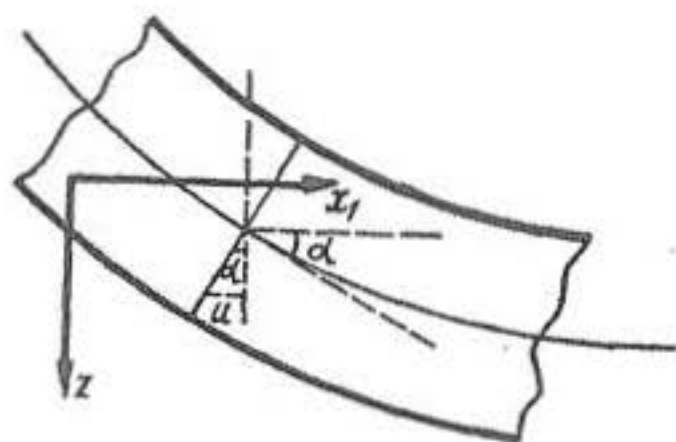


Fig. 6.3.5

$$u'_i + w^0_{,i} = 0.$$

u'_i apar numai datorită încovoierii planului median, așa cum se vede în figura 6.3.5 (unde $\sin \alpha \cong \tan \alpha \cong w^0_{,1}$). Aceasta revine la a lua $u'_i = -z w^0_{,i}$, ceea ce conduce din nou la primele două relații (84) (vezi și (2.16)).

Pentru a restabili valabilitatea ecuației a treia de echilibru, teoria clasică introduce totuși pe o cale ocolită componentele S_{3i} . Întrucît w nu depinde de z , a doua ipoteză (84) conduce la relația (vezi (17)) :

$$(85)$$

Să observăm că (85) nu are un sens fizic, ci este numai o relație de simplificare a ecuațiilor; de aceea ea trebuie folosită cît mai tîrziu

posibil. (Dacă (85) se introduce în ultima ecuație (73), aceasta dispare pur și simplu — ceea ce nu e acceptabil.) Pentru acest motiv, păstrăm ecuațiile (80), (81), și introducem (85) numai în (82), care se reduce la :

$$\frac{1}{3} h^2 [\mu \Delta u'_i + (\lambda^* + \mu) \theta'_{,i}] + \left[\overline{F_i z} + q_i^- + \frac{1}{6} h (\lambda^*/\mu) q_{,i}^+ \right] = 0, \quad (86)$$

așadar un sistem similar sistemului (68) care descrie starea plană. Componentele u'_i, w sînt deci acum soluții ale unor probleme cu caracter bi-armonic.

Din (85) urmează că toate mărimile cu care avem de-a face pot fi exprimate prin intermediul funcției w^0 . Anume, avem

$$u'_i = -w^0_{,i}, \quad \theta' = -\Delta w^0, \quad u'_{i,k} = u'_{k,i} = -w^0_{,ik}. \quad (87)$$

Din (72) deducem așadar

$$\begin{aligned} N_{11} &= -D (w^0_{,11} + \nu w^0_{,22}) + \frac{1}{3} h^2 (\lambda^*/\mu) q^+, \\ N_{22} &= -D (w^0_{,22} + \nu w^0_{,11}) + \frac{1}{3} h^2 (\lambda^*/\mu) q^+, \\ N_{12} &= -D (1 - \nu) w^0_{,12}, \end{aligned} \quad (88)$$

în timp ce forțele tăietoare rezultă nule. Din (75) și (88) avem acum

$$\sigma_{ik} = \frac{3}{2} h^{-3} z N_{ik}, \quad (89)$$

în timp ce σ_{3i} trebuie determinate pe altă cale. Anume, ecuațiile de echilibru (44) dau derivatele $\sigma_{3i,3}$ prin intermediul componentelor σ_{ik} , așadar, făcînd uz de (88) și (89), prin intermediul lui w^0 . Integrînd în raport cu z , și presupunînd $F_i = q_i^- = 0$ (ipoteze provenind din teoria clasică), deducem

$$\sigma_{3i} = -\frac{3}{4} (D/h) (1 - z^2/h^2) \Delta w^0_{,i}, \quad (90)$$

și printr-o nouă integrare :

$$S_{3i} = -D \Delta w^0_{,i}, \quad (91)$$

ceea ce nu se poate obține prin particularizare din (72).

Faptul că acum atît numărul funcțiilor necunoscute, cît și ordinul ecuațiilor se micșorează, obligă la reconsiderarea condițiilor la limită.

Introducînd (87) în condițiile de tip Dirichlet din (55), rezultă că sînt date valorile la limită ale lui w^0 și $w^0_{,i}$.

Dar întrucît avem

$$w_{,s}^0 = -w_{,1}^0 n_2 + w_{,2}^0 n_1, \quad w_{,n}^0 = w_{,1}^0 n_1 + w_{,2}^0 n_2, \quad (92)$$

și întrucît cunoașterea valorilor funcției w^0 pe o curbă permite să se calculeze derivata sa tangențială, rezultă că condițiile (55) echivalează cu

$$w^0|_{\mathcal{L}'} = w^0(s), \quad w_{,n}^0|_{\mathcal{L}'} = w_1^0(s). \quad (93)$$

Astfel de condiții pot fi într-adevăr puse pentru ecuația bi-armonică (81), și problema are sens.

În schimb, condițiile de tip Neumann din (74) conduc la un număr prea mare de condiții, în general incompatibile. Dificultatea este ocolită în teoria clasică cu ajutorul următorului raționament al lui G. Kirchhoff[1].

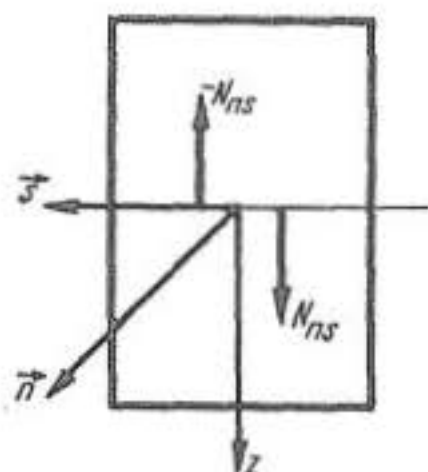


Fig. 6.3.6.

Se observă că efectul de rotire în planul elementului-frontieră, caracteristic pentru acțiunea momentului N_{ns} , poate fi obținut și cu ajutorul unui sistem de forțe tăietoare. Într-adevăr, acțiunea cuplului de moment $N_{ns} ds$ aplicat pe elementul de lungime ds de pe \mathcal{L}'' poate fi înlocuită prin acțiunea a două forțe paralele N_{ns} și $-N_{ns}$. Considerînd și segmentul alăturat acestuia (în sensul $ds > 0$), acționat de forțele $N_{ns} + dN_{ns}$ și $-(N_{ns} + dN_{ns})$, și continuînd din aproape în aproape această operație de înlocuire, obținem un sistem de forțe tăietoare de

intensitate $N_{ns,s}$, distribuite pe \mathcal{L}'' . Momentele de torsiune din (74) pot fi deci înlocuite prin niște forțe tăietoare, care se adaugă forțelor tăietoare $S_{n3}(s)$ date. Pentru forța tăietoare sumară, vom scrie (evident, s nu este un indice numeric, de sumare):

$$N_{n3} = S_{n3} + N_{ns,s}, \quad (94)$$

astfel că (74) conduce la numai două condiții

$$N_{nn}|_{\mathcal{L}''} = N_{nn}(s), \quad N_{n3}|_{\mathcal{L}''} = N_{n3}(s), \quad (95)$$

în acord cu ordinul ecuației de studiat.

Această ecuație nu păstrează totuși forma (81). Anume, întrucît în teoria clasică ea este obținută pe o altă cale, cel de-al doilea termen din membrul al doilea nu apare, și avem numai

$$\Delta \Delta w^0 = Q/D, \quad (96)$$

unde D are aceeași valoare ca în (78), iar Q se reduce la

$$Q = 2h \bar{F}_3 + 2q^+. \quad (97)$$

Ecuația (96) este *ecuația lui Sophie Germain și J. Lagrange*. (În (88) termenii în q^+ trebuie de asemenea neglijați în teoria ce pornește de la ecuația (96).)

Deosebirea esențială între ecuațiile (80)–(83) și ecuația (96) constă tocmai în ordinul mai înalt al celor dintâi — așadar în posibilitatea de a include soluții pe care ecuația (96) nu le poate pune în evidență, și de a satisface mai corect condițiile la limită cu semnificație mecanică.

Calculule efectuate până în prezent par totuși să arate că în general (pentru plăci suficient de subțiri), ecuația (96) conduce la soluții ce nu se deosebesc prea mult de cele ale ecuațiilor mai exacte, de ordin superior. Aceasta se explică prin configurația cu totul specială a plăcii *plane* subțiri. Dimpotrivă, pentru teoria plăcilor *curbe* subțiri, o astfel de coborîre a ordinului ecuațiilor și micșorare a numărului de condiții la limită utilizabile poate duce la neglijarea unor factori cu efect catastrofal.

Raționamentele din paragraful de față conduc la concluzia că problema *stării de deformare plană*, cea a *stării de tensiune plană generalizată*, și cea a *încovoierii plăcilor subțiri*, sînt echivalente din punct de vedere matematic. Acest fapt permite să ne mărginim la studiul *uneia singure* din aceste probleme, soluția obținută transferîndu-se cu ușurință și asupra celorlalte două.

§ 4. SISTEMUL COMPLET DE ECUAȚII AL ELASTICITĂȚII PLANE. FUNCȚIA LUI AIRY

a) Sistemul de ecuații

Ne vom fixa atenția asupra sistemului de ecuații obținut în § 2. Recapitulăm datele problemei. Avem de studiat ecuațiile

$$\sigma_{11,1} + \sigma_{12,2} + F_1 = 0, \quad \sigma_{12,1} + \sigma_{22,2} + F_2 = 0; \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \Delta \sigma_{11} + S_{0,11} &= -[\nu/(1+\nu)] \operatorname{div} \mathbf{F} - 2F_{1,1}, \\ \Delta \sigma_{22} + S_{0,22} &= -[\nu/(1+\nu)] \operatorname{div} \mathbf{F} - 2F_{2,2}, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\Delta \sigma_{12} + S_{0,12} = -F_{1,2} - F_{2,1},$$

unde am folosit notația

$$S_0 = \sigma_{11} + \sigma_{22}. \quad (3)$$

Odată tensiunile σ_{11} , σ_{22} , σ_{12} determinate, componentele deformăției și deplasările se calculează din relațiile

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= (1/E) (\sigma_{11} - \nu \sigma_{22} - \nu^2 S_0), \quad \varepsilon_{22} = (1/E) (\sigma_{22} - \nu \sigma_{11} - \nu^2 S_0), \\ \varepsilon_{12} &= [(1+\nu)/E] \sigma_{12}; \end{aligned} \quad (4)$$

$$u_{1,1} = \varepsilon_{11}, \quad u_{2,2} = \varepsilon_{22}, \quad u_{1,2} + u_{2,1} = 2\varepsilon_{12}. \quad (5)$$

Toate funcțiile din (1)–(5) sînt funcții de x_1, x_2 , definite în domeniul \mathcal{D} . Componentele deplasării sînt funcții de clasă $C^2(\mathcal{D})$.

Acestea sînt ecuații *exacte* pentru starea de deformare plană, și ecuații *aproximative*, obținute prin integrare pe grosime, pentru starea de tensiune plană generalizată (constantele elastice trebuind să fie înlocuite prin cele din (3.66)). Menționăm că în această ultimă problemă, apar dificultăți suplimentare dacă se încearcă integrarea pe grosime a ecuațiilor de compatibilitate. Vezi în acest sens și lucrările indicate la pag. 365.

Problemele la limită fundamentale și teorema de unicitate decurg printr-un simplu decalc al rezultatelor din capitolul 4. Prin urmare, *problema lui Dirichlet* va fi caracterizată prin darea valorilor :

$$u|_{\mathcal{L}} = g(x_1, x_2); \quad (6)$$

problema lui Neumann — prin darea valorilor

$$\sigma_n(u)|_{\mathcal{L}} = f(x_1, x_2), \quad (7)$$

unde

$$\sigma_{n1} = \sigma_{11} n_1 + \sigma_{12} n_2, \quad \sigma_{n2} = \sigma_{12} n_1 + \sigma_{22} n_2; \quad (8)$$

problema mixtă — prin darea valorilor

$$u|_{\mathcal{L}'} = g(x_1, x_2), \quad \sigma_n(u)|_{\mathcal{L}''} = f(x_1, x_2), \quad (9)$$

unde $\mathcal{L}' \cup \mathcal{L}'' = \mathcal{L}$, $\mathcal{L}' \cap \mathcal{L}'' = \emptyset$. Aceasta din urmă cuprinde drept cazuri particulare problemele Dirichlet și Neumann, și teorema de unicitate corespunzătoare se obține ca și în § 4.5.

În ce privește *a patra problemă fundamentală*, menționăm cazul

$$u \cdot n|_{\mathcal{L}'} = h(x_1, x_2), \quad \sigma_n(u) \cdot s|_{\mathcal{L}''} = k(x_1, x_2), \quad (10)$$

(vezi de ex. L. Milne-Thomson [2], § 3.50; N. Muskhelişvili [5], § 115).

Evident, toți vectorii din (6)–(10) au numai cîte două componente.

Reproducînd calculele din § 4.8, se obține *sistemul lui Lamé*

$$\Delta u + (1 - 2\nu)^{-1} \text{grad div } u + \mu^{-1} F = 0. \quad (11)$$

Aceste două ecuații sînt evident analoge ecuațiilor (4.8.7). Ca și în cazul problemei antiplane, este însă mai comod să abordăm studiul problemei plane pornind de la cele cinci ecuații în tensiuni (1), (2).

După cum am arătat în § 4.10, putem face în general abstracție de forțele de volum. Întrucît însă raționamentele necesare nu sînt aci esențial mai complicate, și întrucît în problema încovoierii plăcilor este util să considerăm ecuațiile neomogene, vom presupune totuși deocamdată $F \neq 0$.

b) Funcția lui Airy

Să considerăm funcțiile G_1, G_2 definite prin relațiile

$$G_{1,1} = F_1, \quad G_{2,2} = F_2. \quad (12)$$

Ecuațiile (1) se scriu acum sub forma

$$(\sigma_{11} + G_1)_{,1} = -\sigma_{12,2}, \quad \sigma_{12,1} = -(\sigma_{22} + G_2)_{,2}, \quad (13)$$

și ele vor fi identic satisfăcute, dacă putem găsi două funcții A_1, A_2 astfel încît

$$\sigma_{11} + G_1 = A_{1,2}, \quad \sigma_{12} = -A_{1,1}, \quad \sigma_{12} = A_{2,2}, \quad \sigma_{22} + G_2 = A_{2,1}. \quad (14)$$

De aci urmează relația $A_{1,1} = -A_{2,2}$, la rîndul ei satisfăcută dacă există o funcție $A(x_1, x_2)$ astfel ca

$$A_1 = A_{,2}, \quad A_2 = -A_{,1}. \quad (15)$$

Introducînd (15) în (14), obținem

$$\sigma_{11} = A_{,22} - G_1, \quad \sigma_{22} = A_{,11} - G_2, \quad \sigma_{12} = -A_{,12}. \quad (16)$$

Orice funcție $A(x_1, x_2) \in C^3(\mathcal{D})$ permite, cu ajutorul relațiilor (16), să asigurăm verificarea identică a ecuațiilor de echilibru. Funcția astfel introdusă se numește *funcția lui G. Airy* [1]. Ea este un *potențial de tensiune*.

J. Maxwell [1] a observat însă că funcția lui Airy trebuie să satisfacă și ecuațiile ce derivă din condițiile de compatibilitate. Introducînd (16) în (2), a treia ecuație rezultă identic verificată, în timp ce primele două se reduc la o aceeași ecuație

$$\Delta\Delta A = G_{1,22} + G_{2,11} - [\nu/(1-\nu)](G_{1,11} + G_{2,22}). \quad (17)$$

Dacă există o funcție de forță G , așadar dacă

$$F_1 = G_{,1}, \quad F_2 = G_{,2}, \quad (18)$$

urmează $G_1 = G_2 = G$, și ecuația (17) devine

$$\Delta\Delta A = [(1-2\nu)/(1-\nu)]\Delta G. \quad (19)$$

În fine, în cazul absenței forțelor de volum, din (16) căpătăm

$$\sigma_{11} = A_{,22}, \quad \sigma_{22} = A_{,11}, \quad \sigma_{12} = -A_{,12}, \quad (20)$$

iar funcția lui Airy verifică *ecuația biarmonică*

$$\Delta\Delta A = 0. \quad (21)$$

Problema a fost astfel redusă la integrarea unei singure ecuații (17) (sau (21)), cu condiții la limită ce rezultă din (6)–(10). Ecuația (17)

este *identică* cu ecuația lui Sophie Germain și Lagrange (3.96). În § 12 vom vedea că și condițiile la limită concordă.

Dacă $F = 0$, ecuațiile considerate conduc la ecuația biarmonică. Ținând seama de teorema lui E. Almansi și M. Nicolescu (vezi § 4.10, pag. 156), rezultă că soluția problemei depinde de determinarea a *două* funcții armonice (independente), sau (ceea ce e același lucru) a *două funcții analitice de o variabilă complexă* definite în \mathcal{D} , — în timp ce soluția problemei antiplane depinde de determinarea *unei singure* astfel de funcții.

OBSERVAȚIE. Pentru unele încercări de extindere a rezultatului lui Airy la cazul tridimensional, vezi începutul § 7.3.

§ 5. UTILIZAREA FUNCȚIEI LUI AIRY. EXEMPLE

Utilizarea funcției lui Airy a mers în general pe linia unei metode de tip invers: dându-se funcții biarmonice în domenii \mathcal{D} , se determinau apoi condițiile la limită mecanice corespunzătoare. Sînt puțin numeroase domeniile pentru care problema a putut fi studiată direct sub o formă efectivă.

G. Airy [1] și A. Măsnager [1] au căutat soluții pentru anumite domenii simple, sub forma unor *polinoame biarmonice*. Numeroase exemple de acest tip sînt expuse de către M. Filonenko-Borodici [1], capitolele 6 și 7; P. Papkovici [4], capitolele 9–11; S. Timoshenko și J. Goodier [1], capitolele 3, 4 și 7. Vezi de asemenea lucrările lui Th. von Karman [3] și F. Seewald [1] pentru domeniul dreptunghiular, comportînd comparații între soluțiile exacte și cele aproximative. Vezi încă P.P. Teodorescu [2], privitor la același domeniu.

a) Soluții polinomiale

Componentele stării elastice nu depind de eventuali termeni liniari din funcția lui Airy. Să începem deci cu considerarea polinomului

$$A(x_1, x_2) = \frac{1}{2} p x_1^2 + q x_1 x_2 + \frac{1}{2} r x_2^2, \quad (1)$$

unde p, q, r sînt niște constante. Introducînd (1) în (4.20), obținem

$$\sigma_{11} = r, \quad \sigma_{22} = p, \quad \sigma_{12} = -q, \quad (2)$$

astfel că funcția (1) caracterizează o stare de tensiune *omogenă* a corpului, oricare ar fi configurația sa. Constantelor p, r le corespund stări de întindere (compresiune), iar constantei q , o stare de alunecare pură.

Luînd mai departe drept funcție a lui Airy un polinom de grad 3

$$A(x_1, x_2) = \frac{1}{6} p x_1^3 + \frac{1}{2} q x_1^2 x_2 + \frac{1}{2} r x_1 x_2^2 + \frac{1}{6} s x_2^3, \quad (3)$$

avem de asemenea $\Delta^2 A = 0$.

Introducând (3) în (4.20), deducem

$$\sigma_{11} = rx_1 + sx_2, \quad \sigma_{22} = px_1 + qx_2, \quad \sigma_{12} = -qx_1 - rx_2. \quad (4)$$

De aci obținem cele patru stări de tensiune posibile :

$$p \neq 0 : \quad \sigma_{11} = 0, \quad \sigma_{22} = px_1, \quad \sigma_{12} = 0; \quad (5)$$

$$q \neq 0 : \quad \sigma_{11} = 0, \quad \sigma_{22} = qx_2, \quad \sigma_{12} = -qx_1; \quad (6)$$

$$r \neq 0 : \quad \sigma_{11} = rx_1, \quad \sigma_{22} = 0, \quad \sigma_{12} = -rx_2; \quad (7)$$

$$s \neq 0 : \quad \sigma_{11} = sx_2, \quad \sigma_{22} = 0, \quad \sigma_{12} = 0. \quad (8)$$

Primul caz rezolvă problema domeniului dreptunghiular de laturi $x_1 = \pm a$, $x_2 = \pm b$, supus la încovoiere pură (plană!) de către tensiuni normale aplicate pe laturile $x_2 = \pm b$, și variind

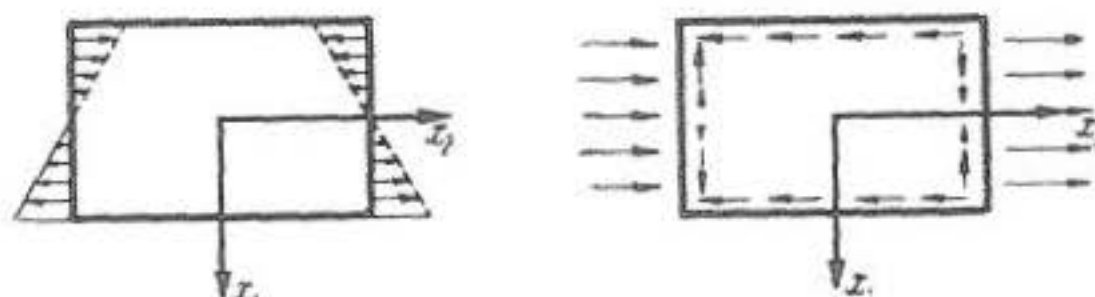


Fig. 6.5.1

liniar pe aceste laturi (compară cu (5.6.17)). Al doilea caz rezolvă problema aceluiași domeniu, supus la o combinație de întinderi și alunecări. Ultimele două cazuri se deduc din cele dintâi prin intervertirea axelor. În figură sunt redată primele două cazuri, pentru $p > 0$, $q > 0$.

b) Placa dreptunghiulară în consolă

Să trecem la studiul analogului plan al problemei consolei de secțiune dreptunghiulară, cercetată în § 5.20, exemplul f.

Pentru aceasta, fie că consola de axă Ox_3 este plană în raport cu Ox_2 — înțelegând prin aceasta fie că ea are forma unei plăci plane de grosime $2h$ pe direcția Ox_2 (stare de tensiune plană generalizată), fie forma unui cilindru infinit de generatoare paralele cu Ox_2 (stare plană de deformare). În primul caz este vorba de o placă subțire dispusă *vertical*; în cel de-al doilea, de o placă infinită (eventual groasă) dispusă *orizantal*. (A se revedea figurile 5.20.2 și 5.20.3.)

Prima din aceste probleme a putut fi rezolvată ca problemă anti-plană, soluția fiind dată cu o bună aproximație chiar de formulele lui Jurawski (5.20.39); dimpotrivă, cea de-a doua nu a putut fi examinată (vezi § 5.20, pag. 318). Cea de-a doua problemă poate fi la rindu-i studiată în două moduri: ca stare plană de deformare, și ca problemă de placă încovoiată.

Să reducem chestiunea la studiul problemei plane pentru domeniul din figura 6.5.2, unde avem $-a \leq x_1 \leq a$, $0 \leq x_3 \leq l$, sarcina fiind echivalentă cu o forță \mathcal{R}_1 (măsurată în kgf/cm). Domeniul \mathcal{D} considerat este o secțiune longitudinală a consolei, ce trece prin axele Ox_1 și Ox_3 .

Axa Ox_1 este axă centrală principală de inerție. Întrucît planul Ox_1x_2 din paragrafele anterioare este aci înlocuit cu planul Ox_1x_3 , vom avea de făcut modificările corespunzătoare de notații.

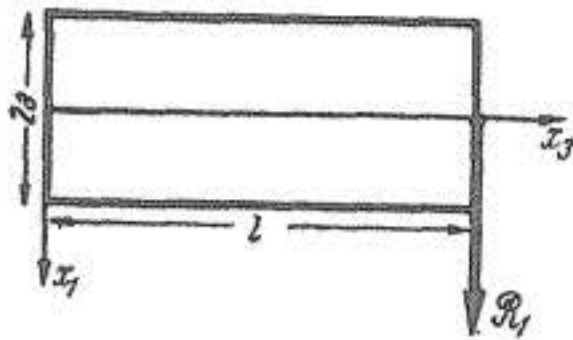


Fig. 6.5.2

Avem de rezolvat ecuația (4.21) cu condițiile la limită pe frontiera domeniului \mathcal{D} , condiții care, în spiritul principiului lui Saint-Venant, trebuie scrise sub forma :

$$\sigma_{11} = 0, \quad \sigma_{13} = 0 \quad \text{pentru } x_1 = \pm a, \quad (9)$$

$$\sigma_{33} = 0, \quad \int_{-a}^a \sigma_{13} dx_1 = \mathcal{R}_1 \quad \text{pentru } x_3 = l, \quad (10)$$

ele exprimînd faptul că suprafața laterală a consolei (așadar, fețele „superioară” și „inferioară” ale paralelipipedului) este liberă, iar baza $x_3 = l$ este supusă la o sarcină tangențială de rezultantă \mathcal{R}_1 .

Vom începe prin a căuta soluția problemei tot cu ajutorul unei funcții Airy polinomiale, de grad 3 (așadar evident biarmonică) :

$$A(x_1, x_3) = px_1^3 + qx_1^2 x_3 + rx_1 x_3^2 + sx_3^3 + p'x_1^2 + q'x_1 x_3 + r'x_3^2, \quad (11)$$

de unde, cu ajutorul relațiilor (4.20), deducem

$$\sigma_{11} = 2rx_1 + 6sx_3 + 2r', \quad \sigma_{33} = 6px_1 + 2qx_3 + 2p', \quad \sigma_{13} = -2qx_1 - 2rx_3 - q'. \quad (12)$$

Din (9) și din prima condiție (10), obținem

$$\pm 2ra + 6sx_3 + 2r' = \pm 2qa - 2rx_3 - q' = 6px_1 + 2ql + 2p' = 0,$$

ceea ce este posibil dacă și numai dacă luăm

$$p = r = s = 0, \quad r' = \pm ra, \quad q' = \pm 2qa, \quad p' = -ql,$$

așadar dacă toate constantele din (11) sînt nule. Prin urmare, forma aleasă pentru funcția lui Airy este prea elementară pentru a permite satisfacerea tuturor condițiilor la limită. Adăugîndu-i un termen de grad 4, de forma $s'x_1^3 x_3$, obținem în loc de (12), expresiile

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= 2rx_1 + 6sx_3 + 2r', \\ \sigma_{33} &= 6px_1 + 2qx_3 + 2p' + 6s'x_1 x_3, \\ \sigma_{13} &= -2qx_1 - 2rx_3 - q' - 3s'x_1^2; \end{aligned} \quad (13)$$

condițiile la limită mai sus considerate dau acum $\pm 2ra + 6sx_3 + 2r' = 0$, $\pm 2qa - 2rx_3 - q' - 3s'a^2 = 0$, $6px_1 + 2ql + 2p' + 6s'x_1 l = 0$, ceea ce conduce la

$$q = r = s = p' = r' = 0, \quad p = -s'l, \quad q' = -3s'a^2. \quad (14)$$

Introducînd (13) în a doua condiție (10), obținem acum

$$s' = \mathcal{R}_1/4a^3, \quad (15)$$

astfel că în definitiv funcția lui Airy se scrie

$$A(x_1, x_3) = (\mathcal{R}_1/4a^3)(x_1^3 x_3 - lx_1^3 - 3a^3 x_1 x_3), \quad (16)$$

Iar componentele (13) ale tensiunii au valorile

$$\sigma_{11} = 0, \quad \sigma_{33} = - (3 \mathcal{R}_1 / 2 a^3) x_1 (l - x_3), \quad \sigma_{13} = (3 \mathcal{R}_1 / 4 a^3) (a^2 - x_1^2). \quad (17)$$

Să calculăm acum momentul de inerție I_2 al secțiunii (normale) a consolei. Pentru dreptunghiul de laturi $2a$, $2b$ avem din (5.7.7)

$$I_2 = \iint_{\mathcal{D}} x_1^2 dD = \frac{4}{3} a^3 b. \quad (18)$$

Raportînd acest moment de inerție la unitatea de lungime pe direcția Ox_2 — așa cum procedăm cu toate mărimile cu care avem de-a face în problema plană — vom obține pentru *momentul de inerție unitar* $I_2/2b$, pe care îl notăm din nou cu I_2 , valoarea

$$I_2 = \frac{2}{3} a^3. \quad (19)$$

Cu aceasta, formulele (17) devin

$$\sigma_{11} = 0, \quad \sigma_{33} = - (\mathcal{R}_1 / I_2) x_1 (l - x_3), \quad \sigma_{13} = (\mathcal{R}_1 / 2 I_2) (a^2 - x_1^2). \quad (20)$$

Valoarea componentei σ_{33} coincide cu cea rezultînd din (5.9.7). Componenta σ_{13} are valoarea din (5.20.39). În fine, componentele σ_{11} și σ_{2j} (în particular, σ_{23}) sînt nule, ca și în cazul problemei consolei tratate cu formulele lui Jurawski.

Formulele (20) nu depind de constantele elastice, și deci conduc la aceleași valori ale tensiunii, atît pentru starea de deformația plană, cît și pentru cea de tensiune plană generalizată. Spre deosebire de soluția elementară din § 5.20, cea de aci se dovedește însă valabilă și dacă $2b \gg l \gg 2a$.

Dimpotrivă, deplasările diferă între ele. Pentru a le calcula, putem face uz de (1.9.8), transcriind deformația cu ajutorul legii lui Hooke *în cele două variante distincte* ce rezultă din (3.67) pentru primul caz, respectiv (2.24) pentru cel de-al doilea (unde trebuie să intervertim și variabilele x_2 și x_3), și făcînd uz de (17) sau (20). Integrarea se poate face pe *orice* drum, de pildă pe un drum compus din segmente paralele cu axele.

Tot atît de ușor se pot integra direct ecuațiile fizico-geometrice. Astfel, din (3.67) și (20) se obțin valorile $u_{1,1}$, $u_{3,3}$ și $u_{1,3} + u_{3,1}$. Integrînd primele două expresii, apar două funcții necunoscute, care se determină ținînd seama de cea de-a treia expresie considerată. Obținem astfel :

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{2} (\mathcal{R}_1 / E I_2) \left[l x_3^2 - \frac{1}{3} x_3^3 + \nu x_1^2 (l - x_3) + A x_3 + C \right], \\ u_2 &= 0, \\ u_3 &= \frac{1}{2} (\mathcal{R}_1 / E I_2) \left[x_1 (x_3^2 - 2l x_3) - \frac{1}{3} (2 + \nu) x_1^3 - B x_1 - D \right], \end{aligned} \quad (21)$$

unde A , B , C , D sînt constante, legate prin relația $A - B = 2(1 + \nu) a^2$.

În cazul stării plane de deformare, ecuațiile (3.67) se înlocuiesc cu (2.24). Rezultatul final se poate obține direct din (21), înlocuind constantele ν , E prin valorile din a doua linie din (3.66), și apoi revenind la notațiile ν , E .

Tratând problema ca problemă de *încovoiere a unei plăci infinite*, avem de integrat (3.96) cu condițiile (3.93), (3.95). De data aceasta, trebuie să intervertim x_1 cu x_3 și u_1 cu u_3 , și să înlocuim $2h$ cu $2a$. Întrucât componentele stării elastice nu depind de x_2 , sintem conduși la a integra ecuația

$$d^4 u_1 / dx_3^4 = 0. \quad (22)$$

În ce privește condițiile la limită, vom presupune că placa este rigid fixată (*încastrată*) în lungul liniei $x_3 = 0$: această linie nu se poate deplasa, și planul tangent în lungul ei de asemenea nu se deplasează în procesul de deformare. Dimpotrivă, marginea $x_3 = l$ se rotește liber, astfel că aci nu pot fi aplicate momente încovoietoare, ci numai o forță tăietoare. Avem deci

$$u_1|_{x_3=0} = du_1/dx_3|_{x_3=0} = 0, \quad N_{33}|_{x_3=l} = 0, \quad N_{31}|_{x_3=l} = \mathcal{R}_1. \quad (23)$$

Făcînd uz de formulele (3.88), (3.91) și (3.78), obținem imediat

$$u_1 = \frac{1}{2} (\mathcal{R}_1/D) \left(lx_3^2 - \frac{1}{3} x_3^3 \right), \quad D = \frac{2}{3} E a^3 / (1 - \nu^2). \quad (24)$$

Ținînd acum seama de presupunerea că componenta σ_{11} (care înlocuiește aci pe σ_{33}) este neglijabilă, precum și de relațiile (3.88) – (3.90), obținem componentele tensiunii

$$\sigma_{11} = 0, \quad \sigma_{33} = -\frac{3}{2} (\mathcal{R}_1/a^3) x_1 (l - x_3), \quad \sigma_{13} = \frac{3}{4} (\mathcal{R}_1/a^3) (a^2 - x_1^2), \quad (25)$$

ceea ce coincide cu (17), sau – ceea ce este același lucru – cu (20).

Rezultatul privind starea de tensiune este deci identic în cele trei variante. Pentru determinarea deplasărilor în ultima variantă, dispunem de u_1 din (24), unde putem introduce valorile l_2 și D din (19) și (24). Componenta u_2 este nulă, iar din (3.16) și (3.85) căpătăm $u_3 = -x_1 u_{1,3}$. Prin urmare, avem:

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{2} (\mathcal{R}_1/E l_2) (1 - \nu^2) \left(lx_3^2 - \frac{1}{3} x_3^3 \right), \\ u_2 &= 0 \\ u_3 &= \frac{1}{2} (\mathcal{R}_1/E l_2) (1 - \nu^2) x_1 (x_3^2 - 2lx_3). \end{aligned} \quad (26)$$

Formulele (21) cu constantele elastice înlocuite așa cum am arătat mai sus, conțin încă și alți termeni – a căror prezență se explică prin aceea că soluția în cazul stării plane de deformare este soluția exactă, în timp ce în starea de încovoiere a plăcii intervin ipoteze suplimentare. (De unde obligația de a satisface primele două condiții (23).) Expresiile ce depind de A , B , C , D descriu o deplasare rigidă, eliminată în (26) prin condițiile de încastrare.

c) Grinda pe două reazime

Să considerăm același paralelipiped de muchii $2a$, $2b$, l , solicitat de o sarcină repartizată de intensitate constantă Q pe fața sa superioară. Dacă $2b \ll 2a \ll l$, avem de-a face cu o placă dispusă în planul vertical, și așezată pe două reazime cvasi-punctuale (fig. 5.20.2). Dacă $2b \gg l \gg 2a$, placa este așezată orizontal și e sprijinită pe două linii de rezemare (fig. 5.20.3).

În primul caz, Q măsoară intensitatea liniară a sarcinii pe grosimea plăcii; în cel de-al doilea, intensitatea liniară a sarcinii pe o flșie de lățime unitară a feței superioare a plăcii.

În ambele cazuri, secțiunea normală a cilindrului (de ax Ox_2), sau planul median al plăcii subțiri, sînt solicitate după schema din figura 6.5.3. Probleme de acest tip (sarcină pe suprafața laterală a barei cilindrice, eventual funcție de x_3) se rezolvă curent cu mijloacele rezistenței materialelor — cu toate că soluțiile exacte nu sînt încă în general cunoscute.

În cazul secțiunii dreptunghiulare, problema poate fi rezolvată aproape la fel ca în cazul plăcii în consolă. Este însă adesea util să folosim eventuale soluții aproximative ale problemei — dacă dispunem de ele — pentru a ușura căutarea funcției lui Airy.

Să abordăm problema de față cu mijloacele rezistenței materialelor, așadar utilizînd (5.20.39). Ținînd seama și de (5.9.7), vom lua ca punct de plecare

$$\sigma_{31} = \frac{1}{2} (\mathcal{R}_1/l_2) (a^2 - x_1^2), \quad \sigma_{32} = 0, \quad \sigma_{33} = (\mathcal{R}_1/l_2) x_1 (x_3 - l). \quad (27)$$

Să considerăm că componentele normale σ_{33} apar ca efect al acțiunii momentului încovoietor corespunzător în fiecare secțiune (vezi § 5.9, pag. 207). Componentele σ_{31} sînt produse de forțele dirijate tangențial, după direcția axei Ox_1 . Soluția se va obține deci suprapunînd efectele forțelor $Q dx_3$ distribuite în lungul barei, precum și efectul momentelor corespunzătoare, considerînd secțiunea x_3 acționată de toate forțele ce lucrează la dreapta ei (principiul secțiunilor imaginare).

Sarcina globală Ql provoacă apariția în reazime a două reacțiuni egale cu $-Ql/2$. Momentul sarcinilor repartizate $Q dx_3$ aplicate în punctele curențe $x_3 \leq X_3 \leq l$, plus momentul reacțiunii în reazimul $x_3 = l$, este dirijat după Ox_3 și are valoarea

$$\mathcal{M}_2(x_3) = Q \int_{x_3}^l (X_3 - x_3) dx_3 - \frac{1}{2} Ql(l - x_3) = -\frac{1}{2} Qx_3(l - x_3). \quad (28)$$

Din (5.9.22) și (5.9.17) urmează acum

$$\sigma_{33} = -[\mathcal{M}_2(x_3)/l_2] x_1 = \frac{1}{2} (Q/l_2) (l - x_3) x_1 x_3. \quad (29)$$

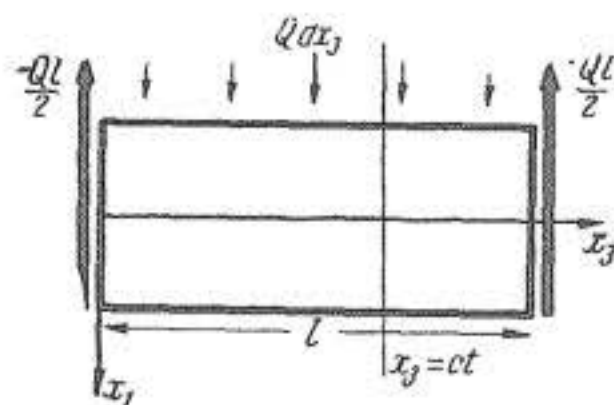


Fig. 6.5.3

Pentru a determina σ_{31} , vom face uz de prima formulă (27), luând $\mathcal{R}_1 = Q dX_3$, integrând de la x_3 la l și ținând seama și de sarcina $-Ql/2$ pe baza $x_3 = l$. Obținem atunci

$$\begin{aligned}\sigma_{31} &= -\frac{1}{2} Ql (1/2 l_2) (a^2 - x_1^2) + (Q/2 l_2) (a^2 - x_1^2) \int_{x_3}^l dX_3 = \\ &= \frac{1}{2} (Q/l_2) (a^2 - x_1^2) \left(\frac{1}{2} l - x_3 \right).\end{aligned}\quad (30)$$

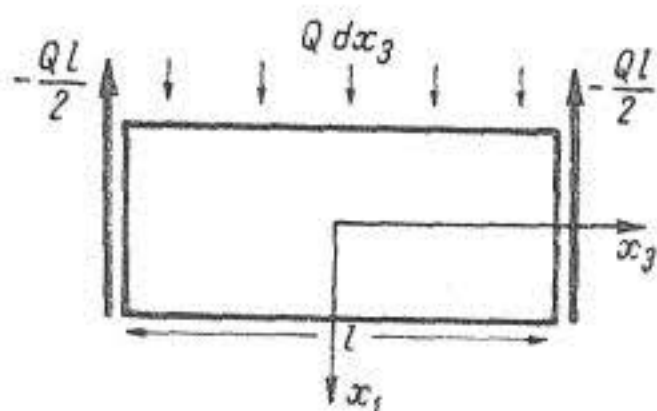


Fig. 6.5.4

Soluția (29), (30) va constitui punctul de pornire pentru căutarea funcției lui Airy a problemei. Întrucât este de preferat să raportăm domeniul dreptunghiular considerat din planul $Ox_1 x_3$ la axele centrale principale, vom înlocui x_3 cu $x_3 + l/2$. Cu aceasta, formulele (29), (30) devin

$$\sigma_{33} = -\frac{1}{2} (Q/l_2) \left(x_3^2 - \frac{1}{4} l^2 \right) x_1, \quad \sigma_{13} = -\frac{1}{2} (Q/l_2) (a^2 - x_1^2) x_3. \quad (31)$$

Vom începe prin a căuta acum soluția corectă a problemei sub forma

$$\sigma_{33} = p x_1 + q x_1 x_3^2, \quad \sigma_{13} = r x_3 + s x_1^2 x_3, \quad (32)$$

care păstrează structura formulelor elementare (31). Notind cu $B(x_1, x_3)$ funcția lui Airy prezumată care — prin intermediul relațiilor (4.20) — conduce la expresiile (32), obținem

$$B_{,11} = p x_1 + q x_1 x_3^2, \quad B_{,13} = -r x_3 - s x_1^2 x_3. \quad (33)$$

Integrând prima din aceste ecuații, avem

$$B(x_1, x_3) = \frac{1}{6} p x_1^3 + \frac{1}{6} q x_1^3 x_3^2 + x_1 f_1(x_3) + f_2(x_3). \quad (34)$$

Introducând această expresie în a doua ecuație (33), deducem

$$q x_1^2 x_3 + f_1(x_3) = -r x_3 - s x_1^2 x_3,$$

de unde, introducând o nouă constantă t :

$$s = -q, \quad f_1(x_3) = -\frac{1}{2} r x_3^2 + t, \quad (35)$$

astfel că (34) devine (termenul în t fiind neglijabil)

$$B(x_1, x_3) = \frac{1}{6} p x_1^3 + \frac{1}{6} q x_1^3 x_3^2 - \frac{1}{2} r x_1 x_3^2 + f_2(x_3). \quad (36)$$

Această funcție verifică relațiile (33) — dar nu este biarmonică, întrucât

$$\Delta \Delta B = 4 q x_1 + f_2^{IV}(x_3) \neq 0. \quad (37)$$

Ea nu poate fi funcția lui Airy a problemei: spre deosebire de cazul plăcii în consolă, soluția elementară nu poate asigura verificarea ecuațiilor exacte. Să luăm atunci

$$A(x_1, x_3) = B(x_1, x_3) + C(x_1, x_3), \quad (38)$$

și să determinăm funcția $C(x_1, x_3)$ din condiția ca $A(x_1, x_3)$ să fie biarmonică. Deducem

$$\Delta \Delta C = -4 q x_1 - f_2^{IV}(x_3), \quad (39)$$

ecuație care este satisfăcută dacă alegem (cu scopul ca $\Delta \Delta C$ să fie liniară în x_1)

$$C(x_1, x_3) = p' x_1 x_3^4 + q' x_1^5 - f_2(x_3) + g_1(x_3), \quad (40)$$

unde $g_1(x_3)$ este un polinom de grad cel mult 3. Avem desigur $\Delta \Delta C = 24 p' x_1 + 120 q' x_1 - f_2^{IV}(x_3)$, de unde, comparînd cu (39), deducem

$$p' + 5q' = -\frac{1}{6} q. \quad (41)$$

Funcția lui Airy se scrie deci deocamdată sub forma

$$A(x_1, x_3) = \frac{1}{6} p x_1^3 + \frac{1}{6} q x_1^3 x_3^2 - \frac{1}{2} r x_1 x_3^2 + p' x_1 x_3^4 - \left(\frac{1}{5} p' + \frac{1}{30} q \right) x_1^5 + g_1(x_3). \quad (42)$$

Introducînd (42) în relațiile (4.20), obținem acum

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{1}{3} q x_1^3 - r x_1 + 12 p' x_1 x_3^2 + g_1''(x_3), \\ \sigma_{33} &= p x_1 + q x_1 x_3^2 - \left(4p' + \frac{2}{3} q \right) x_1^3, \\ \sigma_{13} &= -q x_1^2 x_3 + r x_3 - 4q' x_3^3. \end{aligned} \quad (43)$$

Pentru a determina p, q, r, p' și $g_1''(x_3)$, dispunem de condițiile la limită ale problemei, care — scrise în spiritul principiului lui Saint-Venant — sînt

$$\sigma_{1;-1} = Q, \quad \sigma_{13} = 0 \quad \text{pentru } x_1 = -a; \quad (44)$$

$$\sigma_{11} = 0, \quad \sigma_{13} = 0 \quad \text{pentru } x_1 = a; \quad (45)$$

$$\sigma_{33} = 0, \quad \int_{-a}^a \sigma_{13} dx_1 = \mp \frac{1}{2} Q l \quad \text{pentru } x_3 = \pm \frac{1}{2} l. \quad (46)$$

(Pe baza $x_3 = -\frac{1}{2} l$ acționează tensiunea $\sigma_{1;-3} = -\sigma_{13}$.)

Prima condiție (44) și prima condiție (45) se scriu sub forma

$$\begin{aligned} -\frac{1}{3} q a^3 + r a - 12 p' a x_3^2 + g_1''(x_3) &= -Q, \\ \frac{1}{3} q a^3 - r a + 12 p' a x_3^2 + g_1''(x_3) &= 0. \end{aligned} \quad (47)$$

Adunând și scăzând aceste relații termen cu termen, obținem

$$g_1''(x_3) = -\frac{1}{2} Q, \quad \frac{2}{3} q a^3 - 2 r a = Q, \quad p' = 0. \quad (48)$$

Formulele (43) devin atunci (q și r nemalfiind independente)

$$\sigma_{11} = \frac{1}{3} q x_1^3 - r x_1 - \frac{1}{2} Q, \quad \sigma_{33} = p x_1 + q x_1 x_3^2 - \frac{2}{3} q x_1^3, \quad \sigma_{13} = q x_1^2 x_3 + r x_3. \quad (49)$$

Introducând expresia σ_{13} din (49) în (44) și (45), deducem

$$q = r/a^2, \quad (50)$$

și a doua relație (48) permite atunci să scriem

$$q = -\frac{3}{4} Q/a^3, \quad r = -\frac{3}{4} Q/a. \quad (51)$$

Cele două condiții (46) rămân deci să servească la determinarea unice constante încă necunoscute din (49), constanta p . A doua din aceste condiții este identic verificată: într-adevăr, ținând seama de (51), avem pentru $x_3 = \pm l/2$

$$\int_{-a}^a \sigma_{13} dx_1 = \pm \frac{1}{2} l \int_{-a}^a (-q x_1^2 + r) dx_1 = \mp \frac{1}{2} Ql.$$

În schimb, din (49) și (51) deducem

$$\sigma_{33} \Big|_{x_3 = \pm \frac{l}{2}} = \left(p - \frac{3}{16} Q l^2 / a^3 \right) x_1 + \frac{1}{2} (Q/a^3) x_1^3, \quad (52)$$

astfel că cea dintâi din condițiile (46) *nu poate fi* verificată identic.

Disponem de două căi pentru a ieși din acest impas. Prima ar consta dintr-o nouă modificare a funcției lui Airy, în așa fel încît să fie respectate condițiile deja verificate, și să se asigure și satisfacerea celei din urmă condiții. A doua cale constă în a ne mulțumi cu verificarea acestora în spiritul principiului lui Saint-Venant. Calculînd rezultanta și momentul resultant al tensiunilor σ_{33} pentru $x_3 = \pm l/2$ obținem din (52)

$$\mathcal{R}_3 = \int_{-a}^a \sigma_{33} dx_1 = 0, \quad \mathcal{M}_2 = - \int_{-a}^a \sigma_{33} x_1 dx_1 = - \left(\frac{2}{3} p a^3 - \frac{1}{8} Q l^2 + \frac{1}{5} Q a^2 \right), \quad (53)$$

astfel că tensiunile normale σ_{33} formează un sistem static echivalent cu un cuplu de moment \mathcal{M}_2 , în general diferit de zero. Din (54) obținem deci

$$p = (3/2a^3) \left(-\mathcal{M}_2 + \frac{1}{8} Q l^2 - \frac{1}{5} Q a^2 \right), \quad (54)$$

astfel că relațiile (49) iau forma definitivă

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= - (3 Q/4a^3) \left(\frac{1}{3} x_1^3 - a^2 x_1 + \frac{2}{3} a^3 \right), \\ \sigma_{33} &= (3/2a^3) \left(-\mathcal{M}_2 + \frac{1}{8} Q l^2 - \frac{1}{5} Q a^2 \right) x_1 - (3Q/4a^3) x_1 x_3^2 + (Q/2a^3) x_1^3, \\ \sigma_{13} &= - (3 Q/4a^3) (a^2 - x_1^2) x_3. \end{aligned} \quad (55)$$

Să presupunem acum $\mathcal{M}_2=0$, ceea ce înseamnă că condiția (46) pentru σ_{33} este satisfăcută în spiritul principiului lui Saint-Venant. Ținând seama și de (19), obținem din (55) soluția problemei inițiale :

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= -\frac{1}{2} (Q/l_2) \left(\frac{1}{3} x_1^3 - a^2 x_1 + l_2 \right), & \sigma_{13} &= -\frac{1}{2} (Q/l_2) (a^2 - x_1^2) x_3, \\ \sigma_{33} &= -\frac{1}{2} (Q/l_2) \left(x_3^2 - \frac{1}{4} l^2 - \frac{2}{3} x_1^2 + \frac{2}{5} a^2 \right) x_1. \end{aligned} \quad (56)$$

Comparînd-o cu soluția elementară din (31) (completată cu valoarea $\sigma_{11}=0$), se constată că componenta σ_{31} își păstrează valoarea, în timp ce σ_{33} crește cu $(Q/l_2) \left(\frac{1}{3} x_1^2 - \frac{1}{5} a^2 \right) x_1$. Aceasta e o mărime neglijabilă, în afară de cazul $x_3 \cong \pm l/2$. În fine, σ_{11} nu e nulă, ci variază de la zero la $-Q$.

Pornind de la (55), se pot determina deplasările (ceea ce soluția (31) nu îngăduie). În particular, aceasta permite și rezolvarea problemei grinzii *incastate* la capete, caz în care valoarea (necunoscută) a momentului \mathcal{M}_2 se determină din condițiile la limită de forma

$$u_{1,3}|_{x_2=\pm l/2} = 0, \quad \text{sau} \quad u_{3,1}|_{x_2=\pm l/2} = 0. \quad (57)$$

(Prima exprimă condiția ca direcția elementelor orizontale să nu varieze la capetele barei; a doua exprimă aceeași condiție pentru elementele verticale.)

d) Problema dreptunghiului. Metoda separării variabilelor

În general, se pot întîlni date la limită oarecare pe cele patru laturi ale dreptunghiului, ceea ce obligă la atacarea problemei printr-o metodă directă.

În acest scop, se caută adesea funcția lui Airy sub forma

$$A(x_1, x_2) = \sum_{n=0}^{\infty} X_n(x_1) Y_n(x_2). \quad (58)$$

Introducând (3) în (4.20), deducem

$$\sigma_{11} = rx_1 + sx_2, \quad \sigma_{22} = px_1 + qx_2, \quad \sigma_{12} = -qx_1 - rx_2. \quad (4)$$

De aci obținem cele patru stări de tensiune posibile :

$$p \neq 0 : \quad \sigma_{11} = 0, \quad \sigma_{22} = px_1, \quad \sigma_{12} = 0; \quad (5)$$

$$q \neq 0 : \quad \sigma_{11} = 0, \quad \sigma_{22} = qx_2, \quad \sigma_{12} = -qx_1; \quad (6)$$

$$r \neq 0 : \quad \sigma_{11} = rx_1, \quad \sigma_{22} = 0, \quad \sigma_{12} = -rx_2; \quad (7)$$

$$s \neq 0 : \quad \sigma_{11} = sx_2, \quad \sigma_{22} = 0, \quad \sigma_{12} = 0. \quad (8)$$

Primul caz rezolvă problema domeniului dreptunghiular de laturi $x_1 = \pm a$, $x_2 = \pm b$, supus la încovoiere pură (plană!) de către tensiuni normale aplicate pe laturile $x_2 = \pm b$, și variind

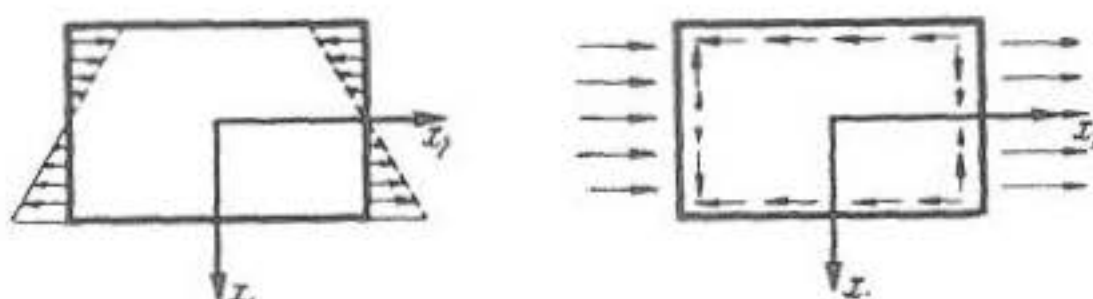


Fig. 6.5.1

liniar pe aceste laturi (compară cu (5.6.17)). Al doilea caz rezolvă problema aceluiași domeniu, supus la o combinație de întinderi și alunecări. Ultimele două cazuri se deduc din cele dintâi prin intervertirea axelor. În figură sînt redată primele două cazuri, pentru $p > 0$, $q > 0$.

b) Placa dreptunghiulară în consolă

Să trecem la studiul analogului plan al problemei consolei de secțiune dreptunghiulară, cercetată în § 5.20, exemplul *f*.

Pentru aceasta, fie că consola de axă Ox_3 este plană în raport cu Ox_2 — înțelegînd prin aceasta fie că ea are forma unei plăci plane de grosime $2h$ pe direcția Ox_2 (stare de tensiune plană generalizată), fie forma unui cilindru infinit de generatoare paralele cu Ox_2 (stare plană de deformare). În primul caz este vorba de o placă subțire dispusă *vertical*; în cel de-al doilea, de o placă infinită (eventual groasă) dispusă *orizontal*. (A se revedea figurile 5.20.2 și 5.20.3.)

Prima din aceste probleme a putut fi rezolvată ca problemă anti-plană, soluția fiind dată cu o bună aproximație chiar de formulele lui Jurawski (5.20.39); dimpotrivă, cea de-a doua nu a putut fi examinată (vezi § 5.20, pag. 318). Cea de-a doua problemă poate fi la rîndu-i studiată în două moduri: ca stare plană de deformare, și ca problemă de placă încovoiată.

Să reducem chestiunea la studiul problemei plane pentru domeniul din figura 6.5.2, unde avem $-a \leq x_1 \leq a$, $0 \leq x_2 \leq l$, sarcina fiind echivalentă cu o forță \mathcal{R}_1 (măsurată în kgf/cm). Domeniul \mathcal{D} considerat este o secțiune longitudinală a consolei, ce trece prin axele Ox_1 și Ox_3 .

Axa Ox_1 este axă centrală principală de inerție. Întrucât planul Ox_1x_2 din paragrafele anterioare este aci înlocuit cu planul Ox_1x_3 , vom avea de făcut modificările corespunzătoare de notații.

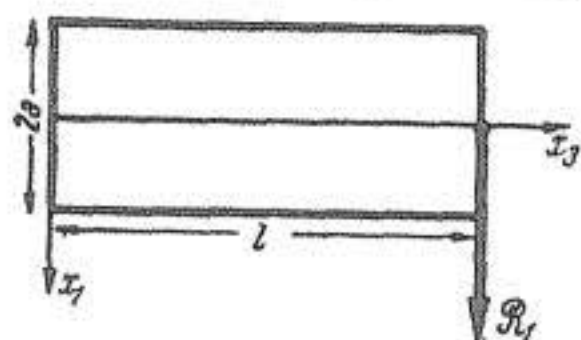


Fig. 6.5.2

Avem de rezolvat ecuația (4.21) cu condițiile la limită pe frontiera domeniului \mathcal{D} , condiții care, în spiritul principiului lui Saint-Venant, trebuie scrise sub forma :

$$\sigma_{11} = 0, \quad \sigma_{13} = 0 \quad \text{pentru } x_1 = \pm a, \quad (9)$$

$$\sigma_{33} = 0, \quad \int_{-a}^a \sigma_{13} dx_1 = \mathcal{R}_1 \quad \text{pentru } x_3 = l, \quad (10)$$

ele exprimând faptul că suprafața laterală a consolei (așadar, fețele „superioară” și „inferioară” ale paralelipipedului) este liberă, iar baza $x_3 = l$ este supusă la o sarcină tangențială de rezultantă \mathcal{R}_1 .

Vom începe prin a căuta soluția problemei tot cu ajutorul unei funcții Airy polinomiale, de grad 3 (așadar evident biarmonică) :

$$A(x_1, x_3) = px_1^3 + qx_1^2 x_3 + rx_1 x_3^2 + sx_3^3 + p' x_1^2 + q' x_1 x_3 + r' x_3^2, \quad (11)$$

de unde, cu ajutorul relațiilor (4.20), deducem

$$\sigma_{11} = 2rx_1 + 6sx_3 + 2r', \quad \sigma_{33} = 6px_1 + 2qx_3 + 2p', \quad \sigma_{13} = -2qx_1 - 2rx_3 - q'. \quad (12)$$

Din (9) și din prima condiție (10), obținem

$$\pm 2ra + 6sx_3 + 2r' = \pm 2qa - 2rx_3 - q' = 6px_1 + 2ql + 2p' = 0,$$

ceea ce este posibil dacă și numai dacă luăm

$$p = r = s = 0, \quad r' = \pm ra, \quad q' = \pm 2qa, \quad p' = -ql,$$

așadar dacă toate constantele din (11) sînt nule. Prin urmare, forma aleasă pentru funcția lui Airy este prea elementară pentru a permite satisfacerea tuturor condițiilor la limită. Adăugîndu-i un termen de grad 4, de forma $s' x_1^3 x_3$, obținem în loc de (12), expresiile

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= 2rx_1 + 6sx_3 + 2r', \\ \sigma_{33} &= 6px_1 + 2qx_3 + 2p' + 6s' x_1 x_3, \\ \sigma_{13} &= -2qx_1 - 2rx_3 - q' - 3s' x_1^2; \end{aligned} \quad (13)$$

condițiile la limită mai sus considerate dau acum $\pm 2ra + 6sx_3 + 2r' = 0$, $\pm 2qa - 2rx_3 - q' - 3s'a^2 = 0$, $6px_1 + 2ql + 2p' + 6s'x_1l = 0$, ceea ce conduce la

$$q = r = s = p' = r' = 0, \quad p = -s'l, \quad q' = -3s'a^2. \quad (14)$$

Introducînd (13) în a doua condiție (10), obținem acum

$$s' = \mathcal{R}_1/4a^3, \quad (15)$$

astfel că în definitiv funcția lui Airy se scrie

$$A(x_1, x_3) = (\mathcal{R}_1/4a^3)(x_1^3 x_3 - lx_1^3 - 3a^2 x_1 x_3), \quad (16)$$

iar componentele (13) ale tensiunii au valorile

$$\sigma_{11} = 0, \quad \sigma_{33} = - (3 \mathcal{R}_1 / 2 a^3) x_1 (l - x_3), \quad \sigma_{13} = (3 \mathcal{R}_1 / 4 a^3) (a^2 - x_1^2). \quad (17)$$

Să calculăm acum momentul de inerție I_2 al secțiunii (normale) a consolei. Pentru dreptunghiul de laturi $2a$, $2b$ avem din (5.7.7)

$$I_2 = \iint_D x_1^2 dD = \frac{4}{3} a^3 b. \quad (18)$$

Raportînd acest moment de inerție la unitatea de lungime pe direcția Ox_2 — așa cum procedăm cu toate mărimile cu care avem de-a face în problema plană — vom obține pentru *momentul de inerție unitar* $I_2/2b$, pe care îl notăm din nou cu I_2 , valoarea

$$I_2 = \frac{2}{3} a^3. \quad (19)$$

Cu aceasta, formulele (17) devin

$$\sigma_{11} = 0, \quad \sigma_{33} = - (\mathcal{R}_1 / I_2) x_1 (l - x_3), \quad \sigma_{13} = (\mathcal{R}_1 / 2 I_2) (a^2 - x_1^2). \quad (20)$$

Valoarea componentei σ_{33} coincide cu cea rezultînd din (5.9.7). Componenta σ_{13} are valoarea din (5.20.39). În fine, componentele σ_{11} și σ_{2j} (în particular, σ_{23}) sînt nule, ca și în cazul problemei consolei tratate cu formulele lui Jurawski.

Formulele (20) nu depind de constantele elastice, și deci conduc la aceleași valori ale tensiunii, atît pentru starea de deformația plană, cît și pentru cea de tensiune plană generalizată. Spre deosebire de soluția elementară din § 5.20, cea de aci se dovedește însă valabilă și dacă $2b \gg l \gg 2a$.

Dimpotrivă, deplasările diferă între ele. Pentru a le calcula, putem face uz de (1.9.8), transcriind deformația cu ajutorul legii lui Hooke în cele două variante distincte ce rezultă din (3.67) pentru primul caz, respectiv (2.24) pentru cel de-al doilea (unde trebuie să intervertim și variabilele x_2 și x_3), și făcînd uz de (17) sau (20). Integrarea se poate face pe *orice* drum, de pildă pe un drum compus din segmente paralele cu axe.

Tot atît de ușor se pot integra direct ecuațiile fizico-geometrice. Astfel, din (3.67) și (20) se obțin valorile $u_{1,1}$, $u_{3,3}$ și $u_{1,3} + u_{3,1}$. Integrînd primele două expresii, apar două funcții necunoscute, care se determină ținînd seama de cea de-a treia expresie considerată. Obținem astfel :

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{2} (\mathcal{R}_1 / E I_2) \left[l x_3^2 - \frac{1}{3} x_3^3 + \nu x_1^2 (l - x_3) + A x_3 + C \right], \\ u_2 &= 0, \\ u_3 &= \frac{1}{2} (\mathcal{R}_1 / E I_2) \left[x_1 (x_3^2 - 2l x_3) - \frac{1}{3} (2 + \nu) x_1^3 - B x_1 - D \right], \end{aligned} \quad (21)$$

unde A , B , C , D sînt constante, legate prin relația $A - B = 2(1 + \nu) a^2$.

În cazul stării plane de deformare, ecuațiile (3.67) se înlocuiesc cu (2.24). Rezultatul final se poate obține direct din (21), înlocuind constantele ν , E prin valorile din a doua linie din (3.66), și apoi revenind la notațiile ν , E .

Tratând problema ca problemă de *încovoiere a unei plăci infinite*, avem de integrat (3.96) cu condițiile (3.93), (3.95). De data aceasta, trebuie să intervertim x_1 cu x_3 și u_1 cu u_3 , și să înlocuim $2h$ cu $2a$. Întrucât componentele stării elastice nu depind de x_2 , sintem conduși la a integra ecuația

$$d^4 u_1/dx_3^4 = 0. \quad (22)$$

În ce privește condițiile la limită, vom presupune că placa este rigid fixată (*încastrată*) în lungul liniei $x_3 = 0$: această linie nu se poate deplasa, și planul tangent în lungul ei de asemenea nu se deplasează în procesul de deformare. Dimpotrivă, marginea $x_3 = l$ se rotește liber, astfel că aci nu pot fi aplicate momente încovoietoare, ci numai o forță tăietoare. Avem deci

$$u_1|_{x_3=0} = du_1/dx_3|_{x_3=0} = 0, \quad N_{33}|_{x_3=l} = 0, \quad N_{31}|_{x_3=l} = \mathcal{R}_1. \quad (23)$$

Făcînd uz de formulele (3.88), (3.91) și (3.78), obținem imediat

$$u_1 = \frac{1}{2} (\mathcal{R}_1/D) \left(lx_3^2 - \frac{1}{3} x_3^3 \right), \quad D = \frac{2}{3} E a^3/(1 - \nu^2). \quad (24)$$

Ținînd acum seama de presupunerea că componenta σ_{11} (care înlocuiește aci pe σ_{33}) este neglijabilă, precum și de relațiile (3.88) – (3.90), obținem componentele tensiunii

$$\sigma_{11} = 0, \quad \sigma_{33} = -\frac{3}{2} (\mathcal{R}_1/a^3) x_1 (l - x_3), \quad \sigma_{13} = \frac{3}{4} (\mathcal{R}_1/a^3) (a^2 - x_1^2), \quad (25)$$

ceea ce coincide cu (17), sau – ceea ce este același lucru – cu (20).

Rezultatul privind starea de tensiune este deci identic în cele trei variante. Pentru determinarea deplasărilor în ultima variantă, dispunem de u_1 din (24), unde putem introduce valorile l_2 și D din (19) și (24). Componenta u_2 este nulă, iar din (3.16) și (3.85) căpătăm $u_3 = -x_1 u_{1,3}$. Prin urmare, avem:

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{2} (\mathcal{R}_1/E l_2) (1 - \nu^2) \left(lx_3^2 - \frac{1}{3} x_3^3 \right), \\ u_2 &= 0 \\ u_3 &= \frac{1}{2} (\mathcal{R}_1/E l_2) (1 - \nu^2) x_1 (x_3^2 - 2lx_3). \end{aligned} \quad (26)$$

Formulele (21) cu constantele elastice înlocuite așa cum am arătat mai sus, conțin încă și alți termeni – a căror prezență se explică prin aceea că soluția în cazul stării plane de deformare este soluția exactă, în timp ce în starea de încovoiere a plăcii intervin ipoteze suplimentare. (De unde obligația de a satisface primele două condiții (23).) Expresiile ce depind de A , B , C , D descriu o deplasare rigidă, eliminată în (26) prin condițiile de încastrare.

c) Grinda pe două reazime

Să considerăm același paralelipiped de muchii $2a$, $2b$, l , solicitat de o sarcină repartizată de intensitate constantă Q pe fața sa superioară. Dacă $2b \ll 2a \ll l$, avem de-a face cu o placă dispusă în planul vertical, și așezată pe două reazime cvasi-punctuale (fig. 5.20.2). Dacă $2b \gg l \gg 2a$, placa este așezată orizontal și e sprijinită pe două linii de rezemare (fig. 5.20.3).

În primul caz, Q măsoară intensitatea liniară a sarcinii pe grosimea plăcii; în cel de-al doilea, intensitatea liniară a sarcinii pe o fișie de lățime unitară a feței superioare a plăcii.

În ambele cazuri, secțiunea normală a cilindrului (de ax Ox_2), sau planul median al plăcii subțiri, sînt solicitate după schema din figura 6.5.3. Probleme de acest tip (sarcină pe suprafața laterală a barei cilindrice, eventual funcție de x_3) se rezolvă curent cu mijloacele rezistenței materialelor — cu toate că soluțiile exacte nu sînt încă în general cunoscute.

În cazul secțiunii dreptunghiulare, problema poate fi rezolvată aproape la fel ca în cazul plăcii în consolă. Este însă adesea util să folosim eventuale soluții aproximative ale problemei — dacă dispunem de ele — pentru a ușura căutarea funcției lui Airy.

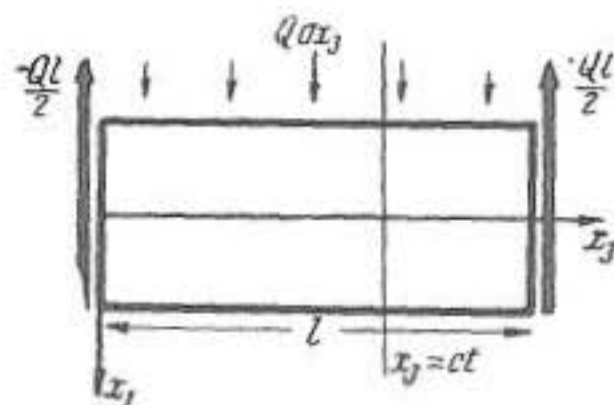


Fig. 6.5.3

Să abordăm problema de față cu mijloacele rezistenței materialelor, așadar utilizînd (5.20.39). Ținînd seama și de (5.9.7), vom lua ca punct de plecare

$$\sigma_{31} = \frac{1}{2} (\mathcal{R}_1/l_2) (a^2 - x_1^2), \quad \sigma_{32} = 0, \quad \sigma_{33} = (\mathcal{R}_1/l_2) x_1 (x_3 - l). \quad (27)$$

Să considerăm că componentele normale σ_{33} apar ca efect al acțiunii momentului încovoiator corespunzător în fiecare secțiune (vezi § 5.9, pag. 207). Componentele σ_{31} sînt produse de forțele dirijate tangențial, după direcția axei Ox_1 . Soluția se va obține deci suprapunînd efectele forțelor $Q dx_3$ distribuite în lungul barei, precum și efectul momentelor corespunzătoare, considerînd secțiunea x_3 acționată de toate forțele ce lucrează la dreapta ei (principiul secțiunilor imaginare).

Sarcina globală Ql provoacă apariția în reazime a două reacțiuni egale cu $-Ql/2$. Momentul sarcinilor repartizate $Q dx_3$ aplicate în punctele curente $x_3 \leq X_3 \leq l$, plus momentul reacțiunii în reazimul $x_3 = l$, este dirijat după Ox_3 și are valoarea

$$\mathcal{M}_2(x_3) = Q \int_{x_3}^l (X_3 - x_3) dx_3 - \frac{1}{2} Ql(l - x_3) = -\frac{1}{2} Qx_3(l - x_3). \quad (28)$$

Din (5.9.22) și (5.9.17) urmează acum

$$\sigma_{33} = -[\mathcal{M}_2(x_3)/l_2] x_1 = \frac{1}{2} (Q/l_2) (l - x_3) x_1 x_3. \quad (29)$$

Pentru a determina σ_{31} , vom face uz de prima formulă (27), luând $\mathcal{Q}_1 = Q dX_3$, integrând de la x_3 la l și ținând seama și de sarcina $-Ql/2$ pe baza $x_3 = l$. Obținem atunci

$$\begin{aligned}\sigma_{31} &= -\frac{1}{2} Ql (1/2 l_2) (a^2 - x_1^2) + (Q/2 l_2) (a^2 - x_1^2) \int_{x_3}^l dX_3 = \\ &= \frac{1}{2} (Q/l_2) (a^2 - x_1^2) \left(\frac{1}{2} l - x_3 \right).\end{aligned}\quad (30)$$

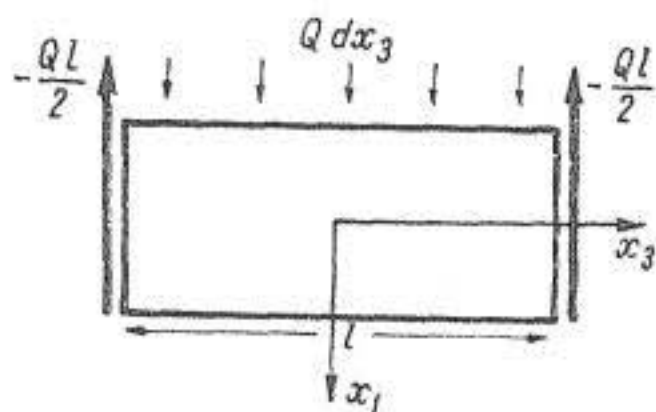


Fig. 6.5.4

Soluția (29), (30) va constitui punctul de pornire pentru căutarea funcției lui Airy a problemei. Întrucât este de preferat să raportăm domeniul dreptunghiular considerat din planul $Ox_1 x_3$ la axele centrale principale, vom înlocui x_3 cu $x_3 + l/2$. Cu aceasta, formulele (29), (30) devin

$$\sigma_{33} = -\frac{1}{2} (Q/l_2) \left(x_3^2 - \frac{1}{4} l^2 \right) x_1, \quad \sigma_{13} = -\frac{1}{2} (Q/l_2) (a^2 - x_1^2) x_3. \quad (31)$$

Vom începe prin a căuta acum soluția corectă a problemei sub forma

$$\sigma_{33} = p x_1 + q x_1 x_3^2, \quad \sigma_{13} = r x_3 + s x_1^2 x_3, \quad (32)$$

care păstrează structura formulelor elementare (31). Notind cu $B(x_1, x_3)$ funcția lui Airy prezumată care — prin intermediul relațiilor (4.20) — conduce la expresiile (32), obținem

$$B_{,11} = p x_1 + q x_1 x_3^2, \quad B_{,13} = -r x_3 - s x_1^2 x_3. \quad (33)$$

Integrând prima din aceste ecuații, avem

$$B(x_1, x_3) = \frac{1}{6} p x_1^3 + \frac{1}{6} q x_1^3 x_3^2 + x_1 f_1(x_3) + f_2(x_3). \quad (34)$$

Introducând această expresie în a doua ecuație (33), deducem

$$q x_1^2 x_3 + f_1(x_3) = -r x_3 - s x_1^2 x_3,$$

de unde, introducând o nouă constantă t :

$$s = -q, \quad f_1(x_3) = -\frac{1}{2} r x_3^2 + t, \quad (35)$$

astfel că (34) devine (termenul în t fiind neglijabil)

$$B(x_1, x_3) = \frac{1}{6} p x_1^3 + \frac{1}{6} q x_1^3 x_3^2 - \frac{1}{2} r x_1 x_3^2 + f_2(x_3). \quad (36)$$

Această funcție verifică relațiile (33) — dar nu este biarmonică, întrucât

$$\Delta \Delta B = 4 q x_1 + f_2^{IV}(x_3) \neq 0. \quad (37)$$

Ea nu poate fi funcția lui Airy a problemei: spre deosebire de cazul plăcii în consolă, soluția elementară nu poate asigura verificarea ecuațiilor exacte. Să luăm atunci

$$A(x_1, x_3) = B(x_1, x_3) + C(x_1, x_3), \quad (38)$$

și să determinăm funcția $C(x_1, x_3)$ din condiția ca $A(x_1, x_3)$ să fie biarmonică. Deducem

$$\Delta \Delta C = -4 q x_1 - f_2^{IV}(x_3), \quad (39)$$

ecuație care este satisfăcută dacă alegem (cu scopul ca $\Delta \Delta C$ să fie liniară în x_1)

$$C(x_1, x_3) = p' x_1 x_3^4 + q' x_1^5 - f_2(x_3) + g_1(x_3), \quad (40)$$

unde $g_1(x_3)$ este un polinom de grad cel mult 3. Avem desigur $\Delta \Delta C = 24 p' x_1 + 120 q' x_1 - f_2^{IV}(x_3)$, de unde, comparînd cu (39), deducem

$$p' + 5q' = -\frac{1}{6} q. \quad (41)$$

Funcția lui Airy se scrie deci deocamdată sub forma

$$A(x_1, x_3) = \frac{1}{6} p x_1^3 + \frac{1}{6} q x_1^3 x_3^2 - \frac{1}{2} r x_1 x_3^2 + p' x_1 x_3^4 - \left(\frac{1}{5} p' + \frac{1}{30} q \right) x_1^5 + g_1(x_3). \quad (42)$$

Introducînd (42) în relațiile (4.20), obținem acum

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{1}{3} q x_1^3 - r x_1 + 12 p' x_1 x_3^2 + g_1''(x_3), \\ \sigma_{33} &= p x_1 + q x_1 x_3^2 - \left(4 p' + \frac{2}{3} q \right) x_1^3, \\ \sigma_{13} &= -q x_1^2 x_3 + r x_3 - 4 q' x_3^3. \end{aligned} \quad (43)$$

Pentru a determina p, q, r, p' și $g_1''(x_3)$, dispunem de condițiile la limită ale problemei, care — scrise în spiritul principiului lui Saint-Venant — sînt

$$\sigma_{1;-1} = Q, \quad \sigma_{13} = 0 \quad \text{pentru } x_1 = -a; \quad (44)$$

$$\sigma_{11} = 0, \quad \sigma_{13} = 0 \quad \text{pentru } x_1 = a; \quad (45)$$

$$\sigma_{33} = 0, \quad \int_{-a}^a \sigma_{13} dx_1 = \mp \frac{1}{2} Q l \quad \text{pentru } x_3 = \pm \frac{1}{2} l. \quad (46)$$

(Pe baza $x_3 = -\frac{1}{2} l$ acționează tensiunea $\sigma_{1;-3} = -\sigma_{13}$.)

Prima condiție (44) și prima condiție (45) se scriu sub forma

$$\begin{aligned} -\frac{1}{3} q a^3 + r a - 12 p' a x_3^2 + g_1''(x_3) &= -Q, \\ \frac{1}{3} q a^3 - r a + 12 p' a x_3^2 + g_1''(x_3) &= 0. \end{aligned} \quad (47)$$

Adunând și scăzând aceste relații termen cu termen, obținem

$$g_1''(x_3) = -\frac{1}{2} Q, \quad \frac{2}{3} q a^3 - 2 r a = Q, \quad p' = 0. \quad (48)$$

Formulele (43) devin atunci (q și r nemalfiind independente)

$$\sigma_{11} = \frac{1}{3} q x_1^3 - r x_1 - \frac{1}{2} Q, \quad \sigma_{33} = p x_1 + q x_1 x_3^2 - \frac{2}{3} q x_1^3, \quad \sigma_{13} = q x_1^2 x_3 + r x_3. \quad (49)$$

Introducând expresia σ_{13} din (49) în (44) și (45), deducem

$$q = r/a^2, \quad (50)$$

și a doua relație (48) permite atunci să scriem

$$q = -\frac{3}{4} Q/a^3, \quad r = -\frac{3}{4} Q/a. \quad (51)$$

Cele două condiții (46) rămân deci să servească la determinarea unicei constante încă necunoscute din (49), constanta p . A doua din aceste condiții este identic verificată : într-adevăr, ținând seama de (51), avem pentru $x_3 = \pm l/2$

$$\int_{-a}^a \sigma_{13} dx_1 = \pm \frac{1}{2} l \int_{-a}^a (-q x_1^2 + r) dx_1 = \mp \frac{1}{2} Ql.$$

În schimb, din (49) și (51) deducem

$$\sigma_{33} \Big|_{x_3 = \pm l/2} = \left(p - \frac{3}{16} Q l^2 / a^3 \right) x_1 + \frac{1}{2} (Q/a^3) x_1^3, \quad (52)$$

astfel că cea dintâi din condițiile (46) nu poate fi verificată identic.

Disponem de două căi pentru a ieși din acest impas. Prima ar consta dintr-o nouă modificare a funcției lui Airy, în așa fel încît să fie respectate condițiile deja verificate, și să se asigure și satisfacerea celei din urmă condiții. A doua cale constă în a ne mulțumi cu verificarea acesteia în spiritul principiului lui Saint-Venant. Calculînd rezultanta și momentul resultant al tensiunilor σ_{33} pentru $x_3 = \pm l/2$ obținem din (52)

$$\mathcal{R}_3 = \int_{-a}^a \sigma_{33} dx_1 = 0, \quad \mathcal{M}_2 = - \int_{-a}^a \sigma_{33} x_1 dx_1 = - \left(\frac{2}{3} p a^3 - \frac{1}{8} Q l^2 + \frac{1}{5} Q a^2 \right), \quad (53)$$

astfel că tensiunile normale σ_{33} formează un sistem static echivalent cu un cuplu de moment \mathcal{M}_2 , în general diferit de zero. Din (54) obținem deci

$$p = (3/2a^3) \left(-\mathcal{M}_2 + \frac{1}{8} Q l^2 - \frac{1}{5} Q a^2 \right), \quad (54)$$

astfel că relațiile (49) iau forma definitivă

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= - (3 Q/4a^3) \left(\frac{1}{3} x_1^3 - a^2 x_1 + \frac{2}{3} a^3 \right), \\ \sigma_{33} &= (3/2a^3) \left(-\mathcal{M}_2 + \frac{1}{8} Q l^2 - \frac{1}{5} Q a^2 \right) x_1 - (3Q/4a^3) x_1 x_3^2 + (Q/2a^3) x_1^3, \\ \sigma_{13} &= - (3 Q/4a^3) (a^2 - x_1^2) x_3. \end{aligned} \quad (55)$$

Să presupunem acum $\mathcal{M}_2=0$, ceea ce înseamnă că condiția (46) pentru σ_{33} este satisfăcută în spiritul principiului lui Saint-Venant. Ținând seama și de (19), obținem din (55) soluția problemei inițiale :

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= -\frac{1}{2} (Q/l_2) \left(\frac{1}{3} x_1^3 - a^2 x_1 + l_2 \right), & \sigma_{13} &= -\frac{1}{2} (Q/l_2) (a^2 - x_1^2) x_3, \\ \sigma_{33} &= -\frac{1}{2} (Q/l_2) \left(x_3^2 - \frac{1}{4} l^2 - \frac{2}{3} x_1^2 + \frac{2}{5} a^2 \right) x_1. \end{aligned} \quad (56)$$

Comparând-o cu soluția elementară din (31) (completată cu valoarea $\sigma_{11}=0$), se constată că componenta σ_{31} își păstrează valoarea, în timp ce σ_{33} crește cu $(Q/l_2) \left(\frac{1}{3} x_1^2 - \frac{1}{5} a^2 \right) x_1$.

Aceasta e o mărime neglijabilă, în afară de cazul $x_3 \cong \pm l/2$. În fine, σ_{11} nu e nulă, ci variază de la zero la $-Q$.

Pornind de la (55), se pot determina deplasările (ceea ce soluția (31) nu îngăduie). În particular, aceasta permite și rezolvarea problemei grinzii *incastrate* la capete, caz în care valoarea (necunoscută) a momentului \mathcal{M}_2 se determină din condițiile la limită de forma

$$u_{1,3}|_{x_2=\pm l/2} = 0, \quad \text{sau} \quad u_{3,1}|_{x_2=\pm l/2} = 0. \quad (57)$$

(Prima exprimă condiția ca direcția elementelor orizontale să nu varieze la capetele barei ; a doua exprimă aceeași condiție pentru elementele verticale.)

d) Problema dreptunghiului. Metoda separării variabilelor

În general, se pot întilni date la limită oarecare pe cele patru laturi ale dreptunghiului, ceea ce obligă la atacarea problemei printr-o metodă directă.

În acest scop, se caută adesea funcția lui Airy sub forma

$$A(x_1, x_2) = \sum_{n=0}^{\infty} X_n(x_1) Y_n(x_2). \quad (58)$$

Ecuția biarmonică (4.21) ia astfel forma

$$X^{IV}Y + 2X''Y'' + XY^{IV} = 0.$$

(pentru fiecare termen al sumei (58)), sau încă

$$X^{IV}/X + 2(X''/X)(Y''/Y) + Y^{IV}/Y = 0. \quad (59)$$

Derivind această ecuație în raport cu x_1 , obținem

$$2(Y''/Y) = - (X^{IV}/X)' : (X''/X)', \quad (60)$$

astfel că ambii membri ai acestei ultime ecuații trebuie să fie egali cu o aceeași constantă, fie ea $-2\lambda^2$ (mai exact : $-2\lambda_n^2$). De aci avem mai întâi ecuația

$$Y'' + \lambda^2 Y = 0, \quad (61)$$

a cărei soluție are forma

$$Y = h \cos \lambda x_2 + k \sin \lambda x_2. \quad (62)$$

Întrucât din (61) urmează $Y^{IV} = -\lambda^2 Y'' = \lambda^4 Y$, ecuația (59) devine

$$X^{IV} - 2\lambda^2 X'' + \lambda^4 X = 0, \quad (63)$$

cu soluția generală

$$X(x_1) = A \operatorname{ch} \lambda x_1 + B \operatorname{sh} \lambda x_1 + C x_1 \operatorname{ch} \lambda x_1 + D x_1 \operatorname{sh} \lambda x_1. \quad (64)$$

Funcția lui Airy este deci o sumă de produse de funcții de forma (62) și (64), cu coeficienți — funcții de n — care trebuie determinați din condițiile la limită.

În particular, luând $h = 0$ în (62), se obține soluția lui L. Filon [1]; dimpotrivă, pentru $k = 0$, rezultă soluția lui M. Ribière [1] [2]. Pentru detalii, vezi P. Papkovici [4], §§ 10.4—10.6; S. Timoshenko și J. Goodier [1], § 23.

Dreptunghiul elastic — inclusiv în cazurile limită în care dezvoltările în serie sînt înlocuite prin integrale Fourier — este studiat cu un mare număr de exemple de P.P. Teodorescu [2]. Vezi încă B. Abramian și M. Manukian [1] (soluție prin serii, sisteme de ecuații complet regulate).

Pentru un punct de vedere modern, uzînd de teoria distribuțiilor, vezi J. Leray [1] (cu aplicații : J. C. Leray [1]).

Să examinăm pe scurt cazul dreptunghiului pentru $a \ll b$, ceea ce permite verificarea condițiilor la limită pe laturile $x_2 = \pm b$ în spiritul principiului lui Saint-Venant.

Pentru a ne elibera de prezența unor sarcini σ_{22} pe laturile $x_2 = \pm b$, să luăm în (62) $h = 0$, $\lambda_n b = n\pi$, așadar să căutăm soluția sub forma propusă de Filon :

$$A(x_1, x_2) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi x_2}{b} \left[A_n \operatorname{ch} \frac{n\pi x_1}{b} + B_n \operatorname{sh} \frac{n\pi x_1}{b} + C_n x_1 \operatorname{ch} \frac{n\pi x_1}{b} + D_n x_1 \operatorname{sh} \frac{n\pi x_1}{b} \right]. \quad (65)$$

Într-adevăr, fiecare termen al seriei ce rezultă de aci pentru $\sigma_{22} = A_{11}$ este nul pentru $x_2 = \pm b$. În ce privește sarcinile tangențiale σ_{12} , ele trebuie să fie determinate din condițiile la limită de pe laturile $x_1 = \pm a$, care se scriu sub forma

$$\begin{aligned} \sigma_{11} = A_{22} = f_1(x_2), \quad \sigma_{12} = -A_{12} = g_1(x_2) & \text{ pentru } x_1 = a, \\ \sigma_{11} = -A_{22} = f_2(x_2), \quad \sigma_{12} = A_{12} = g_2(x_2), & \text{ pentru } x_1 = -a, \end{aligned} \quad (66)$$

unde f_1, f_2, g_1, g_2 sînt sarcinile (normale și tangențiale) cunoscute pe bazele dreptunghiului. Dezvoltînd aceste funcții în serii Fourier, obținem prin identificare un număr de $4m$ condiții pentru determinarea celor $4m$ coeficienți ce apar în (65), dacă se rețin numai primii m termeni ai seriei.

Funcțiile g_1, g_2 sînt valori la limită ale unor serii de cosinuși, și ele trebuie deci să satisfacă condițiile

$$\int_{-b}^b g_1(x_2) dx_2 = \int_{-b}^b g_2(x_2) dx_2 = 0, \quad (67)$$

ceea ce arată că sarcina tangențială trebuie să aibă rezultanta nulă. Sarcina normală pe laturile $x_1 = \pm a$ va fi echilibrată de rezultanta sarcinii tangențiale pe laturile $x_2 = \pm b$ (reacțiuni în reazime). Soluția de acest tip poate fi folosită și pentru sarcini ce nu respectă condiția globală (67), suprapunîndu-i-se soluții elementare polinomiale.

OBSERVAȚIE. Metoda separării variabilelor poate sluji și pentru alte domenii decît cel dreptunghiular, dacă putem trece la coordonate convenabile. Cazul cel mai simplu este cel al domeniilor cu frontiere circulare (coroană, sector etc.) studiat în coordonate polare. Pentru detalii, vezi de exemplu M. Filonenko-Borodici [1], capitolul 7, sau P. Papkovici [4], capitolul 11.

§ 6. FORMA ECUAȚIILOR PROBLEMEI PLANE ÎN VARIABILE COMPLEXE CONJUGATE

Am arătat la finele § 4 că problema plană poate fi redusă la determinarea a două funcții de o variabilă complexă, ceea ce permite atacarea problemelor fundamentale prin metode directe.

Eficacitatea acestui punct de vedere depinde în mare măsură de modul în care se stabilește legătura dintre mărimile elastice, și potențialii complecși. Primele cercetări în această direcție sînt cele ale lui A. Love [1], capitolul 9, și L. Filon [1]. Dar cele mai importante rezultate aparțin școlii lui N. Muskhelișvili, și își găsesc originea în lucrările lui G. Kolosov, care încă în 1909 arăta că : „Metoda expusă dă : 1° mijlocul de a aplica problemei plane teoria reprezentării conforme, așa cum ea se aplică în hidrodinamică; 2° o infinitate de mijloace de a transforma soluțiile și de a deduce dintr-o soluție, altele”. (G. Kolosov [4].)

În ce privește limitele metodei, avertizăm că ea nu poate fi decît cu greu extinsă la studiul problemelor tridimensionale. Rămîn aci valabile și rezervele formulate în §5.18, g, pag. 301.

a) Ecuațiile problemei

Ca și în cazul sistemului (5.3.14), vom transcrie și integra ecuațiile (4.1) — (4.5) sub o formă complexă, privind toate funcțiile de x_1, x_2 care intervin în aceste ecuații, ca funcții de z și \bar{z} (L. Solomon [10]). Vom admite deocamdată că $F \neq 0$.

Să considerăm deci forța de volum complexă

$$F(z, \bar{z}) = F_1(x_1, x_2) + i F_2(x_1, x_2), \quad (1)$$

unde F_1, F_2 sînt componentele forței de volum F , și deplasarea complexă

$$U(z, \bar{z}) = u_1(x_1, x_2) + i u_2(x_1, x_2). \quad (2)$$

Amintim încă relația (4.3)

$$S_0(z, \bar{z}) = \sigma_{11}(x_1, x_2) + \sigma_{22}(x_1, x_2). \quad (3)$$

Pentru a transcrie sub formă complexă cantitatea reală $\operatorname{div} F$ ce apare în ecuațiile (4.2), remarcăm că din (A.4.13) urmează

$$F_{,s} = \frac{1}{2} [(F_{1,1} + F_{2,2}) + i (F_{2,1} - F_{1,2})], \quad (4)$$

sau altfel scris

$$2F_{,s} = \operatorname{div} F + i \operatorname{rot} F, \quad (5)$$

de unde

$$\operatorname{div} F = F_{,s} + \bar{F}_{,\bar{s}}. \quad (6)$$

Pentru orice cantitate complexă $G = G_1 + iG_2$, deducem tot astfel

$$G_{1,1} + G_{2,2} = 2 \operatorname{Re} G_{,s}. \quad (7)$$

Să considerăm mai întâi ecuațiile de compatibilitate. Adunînd termen cu termen primele două ecuații (4.2) și ținînd seama de (3), găsim

$$\Delta S_0 = -(1 - \nu)^{-1} \operatorname{div} F, \quad (8)$$

sau încă, utilizînd expresia (A.4.7) și (6):

$$S_{0,ss} = -\frac{1}{4} (1 - \nu)^{-1} (F_{,s} + \bar{F}_{,\bar{s}}). \quad (9)$$

Forma celui de-al doilea operator din (A.4.7) sugerează să scriem încă

$$\begin{aligned} \Delta (\sigma_{22} - \sigma_{11} + 2i\sigma_{12}) + (S_{0,22} - S_{0,11} + 2iS_{0,12}) = \\ = -2F_{2,2} + 2F_{1,1} - 2iF_{1,2} - 2iF_{2,1}, \end{aligned}$$

ceea ce conduce la introducerea funcției complexe

$$S(z, \bar{z}) = \sigma_{22}(x_1, x_2) - \sigma_{11}(x_1, x_2) + 2i\sigma_{12}(x_1, x_2), \quad (10)$$

și permite ca, utilizând (1), (3) și (4), să ajungem la ecuația

$$S_{,s\bar{s}} - S_{0,s\bar{s}} = \bar{F}_{,s}. \quad (11)$$

Trecînd acum la transcrierea ecuațiilor de echilibru, vom exprima mai întîi componentele tensiunii prin intermediul mărimilor S_0 și S :

$$\sigma_{11} = \frac{1}{2} S_0 - \frac{1}{4} (S + \bar{S}), \quad \sigma_{22} = \frac{1}{2} S_0 + \frac{1}{4} (S + \bar{S}), \quad \sigma_{12} = -\frac{1}{4} i(S - \bar{S}), \quad (12)$$

de unde urmează și

$$\sigma_{11} + i\sigma_{12} = \frac{1}{2} (S_0 - \bar{S}), \quad \sigma_{12} + i\sigma_{22} = -\frac{1}{2} i(S_0 + \bar{S}). \quad (13)$$

Făcînd uz de (7) în (13), obținem pentru primii doi termeni ai ecuațiilor de echilibru (compară cu trecerea de la (5.3.14) la (5.4.16)):

$$\sigma_{11,1} + \sigma_{12,2} = 2 \operatorname{Re} (\sigma_{11} + i\sigma_{12})_{,s} = \operatorname{Re} (S_0 - \bar{S})_{,s}; \quad (14)$$

$$\sigma_{12,1} + \sigma_{22,2} = 2 \operatorname{Re} (\sigma_{12} + i\sigma_{22})_{,s} = -\operatorname{Im} (S_0 + S)_{,s}.$$

Adunînd membru cu membru ecuațiile (4.1) astfel transformate, deducem

$$S_{0,s} - S_{,s} + \bar{F} = 0; \quad (15)$$

prin scădere termen cu termen, se găsește relația conjugată cu (15).

A doua ecuație de compatibilitate (11) este deci o consecință a ecuației (15), și nu trebuie reținută. Prin urmare, sistemul celor 5 ecuații (4.1), (4.2) se reduce la sistemul format de cele 2 ecuații (9) și (15)

$$S_{,s} - S_{0,s} = \bar{F}, \quad S_{0,s\bar{s}} = -\frac{1}{4} (1 - \nu)^{-1} (F_{,s} + \bar{F}_{,s}), \quad (16)$$

unde amintim că am notat

$$S_0 = \sigma_{11} + \sigma_{22}, \quad S = \sigma_{22} - \sigma_{11} + 2i\sigma_{12}. \quad (17)$$

Pentru a determina deplasările, deducem mai întîi din (4.4), (4.5), (3) și (10):

$$\begin{aligned} u_{1,1} + u_{2,2} &= [(1 - \nu - 2\nu^2)/E] S_0, \\ u_{1,1} - u_{2,2} &= [(1 + \nu)/E] (\sigma_{11} - \sigma_{22}) = -[(1 + \nu)/E] \operatorname{Re} S, \\ u_{1,2} + u_{2,1} &= 2[(1 + \nu)/E] \sigma_{12} = [(1 + \nu)/E] \operatorname{Im} S. \end{aligned} \quad (18)$$

Dar, făcînd uz de (A.4.13), deducem

$$\begin{aligned} U, i &= \frac{1}{2} [(u_{1,1} + u_{2,2}) + i(u_{2,1} - u_{1,2})], \\ U, \bar{i} &= \frac{1}{2} [(u_{1,1} - u_{2,2}) + i(u_{2,1} + u_{1,2})]. \end{aligned} \quad (19)$$

astfel că din (18) obținem

$$U, i = -[(1 + \nu)/2E] \bar{S}, \quad U, i + \bar{U}, i = [(1 + \nu)(1 - 2\nu)/E] S_0, \quad (20)$$

sau încă, înlocuind constantele :

$$U, i = -(1/4\mu) \bar{S}, \quad U, i + \bar{U}, i = [(1 - 2\nu)/2\mu] S_0. \quad (21)$$

Deplasarea U odată găsită, din (2.26) și (19) obținem și

$$\omega_{12} = -\operatorname{Im} U, i. \quad (22)$$

Ecuatiile (16) sînt ecuațiile în tensiuni ale problemei plane (prima din ele fiind ecuația de echilibru, iar cea de-a doua, ecuația de compatibilitate). Ecuatiile (20) (sau (21)) sînt ecuațiile fizico-geometrice ale problemei.

Este semnificativă compararea ecuațiilor (16), (21) cu ecuațiile (5.4.16), (5.4.20) — (5.4.24) ale problemei anti-plane. În particular, rămîn valabile cele arătate la finele § 5.1, pag. 166 (vezi și mai jos, Observația de la pag. 391).

b) Criterii de rezistență

Pentru a încheia, să examinăm pe scurt criteriile de rezistență în cadrul problemei plane. (Compară cu § 5.10, pag. 212). Pentru simplitate, ne limităm la cazul deformației plane, astfel că tensorul tensiune are forma

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \nu S_0 \end{bmatrix}, \quad (23)$$

iar invarianții săi sînt (vezi (2.5.19)) :

$$\Sigma_1 = (1 + \nu) S_0, \quad \Sigma_2 = \sigma_{11} \sigma_{22} - \sigma_{12}^2 + \nu S_0^2, \quad \Sigma_3 = \nu S_0 (\sigma_{11} \sigma_{22} - \sigma_{12}^2). \quad (24)$$

Dat fiind că $\sigma_{33} = \nu S_0$ este evident una din tensiunile principale, deducem că primul membru al ecuației (2.5.20) este aci divizibil prin $\sigma - \nu S_0$. După calcule elementare, obținem pentru celelalte două tensiuni principale ecuația

$$\sigma^2 - S_0 \sigma + (\sigma_{11} \sigma_{22} - \sigma_{12}^2) = 0, \quad (25)$$

astfel că în definitiv avem, ținând seama și de (10):

$$\sigma_1 = \frac{1}{2} (S_0 + |S|), \quad \sigma_2 = \frac{1}{2} (S_0 - |S|), \quad \sigma_3 = \nu S_0. \quad (26)$$

(Componentele $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ nu sînt numerotate în ordinea mărimii lor, dat fiind că această ordine depinde esențial de valorile σ_{ij} și ν .)

Să ne limităm la cazul în care criteriile (4.3.1) și (4.3.2) sînt privite drept criterii de plasticitate. Din motive de continuitate, rezultă că în momentul trecerii în starea plastică avem $\nu = \frac{1}{2}$ (vezi § 3.4. pag. 93).

Or, în acest caz $\sigma_3 = \frac{1}{2} S_0$ este tensiunea principală mijlocie, și din (2.6.11) și (26) urmează

$$T_{\max} = \pm \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_2) = \frac{1}{2} |S|. \quad (27)$$

În felul acesta, (4.3.1) conduce la condiția de plasticitate

$$|S| \leq \sigma_s. \quad (28)$$

Pe de altă parte, din (4.3.2) obținem ușor pentru $\nu = \frac{1}{2}$ condiția

$$(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4 \sigma_{12}^2 \leq \frac{4}{3} \sigma_s^2,$$

sau încă, ținând seama ca și în soluțiile ecuației (25) de expresia (10):

$$|S| \leq 1,16 \sigma_s. \quad (29)$$

Prin urmare, în ambele variante considerate, condiția de plasticitate este independentă de S_0 , și este în întregime caracterizată de $|S|$. Acest raționament subliniază semnificația diferită a mărimilor S_0 și S , introduse în (3) și (10) prin considerații formale. Prima din ele caracterizează deformarea de volum (și intervine numai în ecuația de compatibilitate, specifică teoriei elasticității). Cea de-a doua (singura ce intervine în condiția de plasticitate) caracterizează distorsiunea.

§ 7. REPREZENTAREA SOLUȚIEI ECUAȚIILOR PROBLEMEI PLANE. FUNCȚIILE LUI KOLOSOV ȘI MUSHELIȘVILI

Ecuațiile (6.16), (6.21) se pot integra asemănător celor din § 5.8.

a) Ecuațiile omogene

Fie de rezolvat mai întâi sistemul omogen

$$S_{0,\bar{z}} = 0, \quad S_{,\bar{z}} - S_{0,z} = 0. \quad (1)$$

Integrând²⁾ prima din aceste ecuații întâi în raport cu \bar{z} și apoi în raport cu z , obținem

$$S_0 = \int S_1(z) dz + \overline{S_2(z)} \quad (2)$$

(S_1 și $\overline{S_2}$ sînt funcții arbitrare). Dat fiind că S_0 este o cantitate reală, vom scrie

$$2\Phi(z) = \int S_1(z) dz. \quad (3)$$

și relația (2) va deveni

$$S_0 = 2[\Phi(z) + \overline{\Phi(z)}]. \quad (4)$$

Ținînd seama acum de (4) în a doua ecuație (1), obținem

$$S_{,\bar{z}} = 2\Phi'(z), \quad (5)$$

de unde, prin integrarea în raport cu \bar{z} , urmează

$$S = 2[\bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z)], \quad (6)$$

unde $\Psi(z)$ este o nouă funcție arbitrară. Întrucît $\sigma_{ij} \in C^1(\mathcal{D})$, urmează că $\Phi(z)$, $\Psi(z)$ sînt funcții diferențiabile și cu derivate parțiale continue în \mathcal{D} , așadar sînt *funcții analitice de z în \mathcal{D}* . Asupra naturii lor ne vom opri în § 10.

Considerînd încă și funcțiile analitice $\varphi(z)$, $\psi(z)$ (care nu trebuie desigur confundate cu funcțiile notate în același fel în studiul problemei anti-plane) definite în \mathcal{D} prin relațiile

$$\varphi'(z) = \Phi(z), \quad \psi'(z) = \Psi(z), \quad (7)$$

²⁾ Vezi § 5.8, pag. 200, și § A.4, pag. 704.

vom transcrie (4) și (6) sub forma definitivă

$$S_0 = 2[\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}], \quad S = 2[\bar{z}\varphi''(z) + \psi'(z)]. \quad (8)$$

Soluția ecuațiilor (1) are deci forma (8). Reciproc, pentru orice funcții analitice $\varphi(z)$, $\psi(z)$, funcțiile definite de (8) verifică (1).

Trecând acum la integrarea ecuațiilor în deplasări, vom introduce expresiile (8) în ecuațiile (6.21), ceea ce dă sistemul

$$\begin{aligned} U_{, \bar{z}} &= -(1/2\mu)[\bar{z}\varphi''(z) + \psi'(z)], \\ U_{, z} + \bar{U}_{, \bar{z}} &= [(1 - 2\nu)/\mu][\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}]. \end{aligned} \quad (9)$$

Integrând prima din aceste ecuații în raport cu \bar{z} , obținem

$$U = -(1/2\mu)[\bar{z}\varphi'(z) + \psi(z)] + U_1(z), \quad (10)$$

unde $U_1(z)$ este o funcție deocamdată necunoscută. Introducând expresia (10) în a doua ecuație (9), deducem mai întâi $U'_1 + \bar{U}'_1 = [(3 - 4\nu)/2\mu][\varphi' + \overline{\varphi'}]$, de unde urmează

$$U_1(z) = [(3 - 4\nu)/2\mu]\varphi(z), \quad (11)$$

astfel că în definitiv (10) devine

$$2\mu U(z, \bar{z}) = \kappa\varphi(z) - \bar{z}\varphi'(z) - \psi(z), \quad (12)$$

unde am notat cu κ coeficientul funcției $\varphi(z)$ așa cum apare el din (11). Ținând seama de relațiile (3.66), avem pentru κ valorile

$$\kappa = \begin{cases} 3 - 4\nu & \text{în starea de deformare plană; } 1 < \kappa < 3; \\ \frac{3 - \nu}{1 + \nu} & \text{în starea de tensiune plană generalizată; } \frac{5}{3} < \kappa < 3. \end{cases} \quad (13)$$

Formulele (8) și (12) dau — în absența forțelor de volum — reprezentarea soluției prin intermediul celor două funcții $\varphi(z)$, $\psi(z)$. Aceste funcții au fost introduse de către G. Kolosov [1], [2]³⁾ și larg utilizate de N. Mushelișvili [1] — [5] în studiul problemei plane. Vom numi funcțiile φ , ψ — *funcțiile lui Kolosov și Mushelișvili*.

Raționamentul de mai sus este similar celui din § 5.8. El este apropiat de modul în care A. Stevenson [2], [3] a stabilit (după Kolosov și Mushelișvili, dar în mod independent) formule de același tip.

OBSERVAȚIA 1. Aparatul introdus de Kolosov pentru probleme de *elasto-statică*, începe să găsească aplicații și în probleme de *elasto-dinamică* (J. Radok [1], N. Șandru [3]), de *elasticitate asimetrică* (G. Savin [2], § 3; R. Mindlin [7]), de *visco-elasticitate asimetrică* (M. Mișleu [7]), chiar de *plasticitate* (B. Anin [1], V. L. Dobrovolski [1], [2], G. Dincă [1]). În unele din aceste lucrări, tocmai punctul de vedere din §§ 6 și 7 este cel care conduce la țintă. (Revezi încă cele spuse la pag. 388).

³⁾ Unele din formulele lui Kolosov au fost găsite și utilizate în 1900 de către S. Ciaplișchin, dar publicate abia postum, în [1], volumul 3, pag. 306—323.

Această formulă a fost stabilită făcând uz de (A.3.12), așadar pentru axe (n, s) orientate la fel cu axele (x_1, x_2) . În caz contrar, semnul din membrul al doilea trebuie schimbat.

Relațiile (8) și (19) au aceeași formă în starea de deformare, și în starea de tensiune plană generalizată. Dimpotrivă, relația (12) depinde de κ , ale cărei valori, distincte, sînt date în (13) pentru cele două stări.

Se poate stabili ușor legătura între funcțiile φ , ψ , și funcția lui Airy. În acest scop, să considerăm soluția reală a ecuației

$$4 A_{, \bar{z}} = K(z, \bar{z}). \quad (20)$$

Ținînd seama aci de formula (17), deducem

$$\int K(z, \bar{z}) d\bar{z} = 2[\bar{z}\varphi(z) + z\overline{\varphi(z)} + \chi(z) + \chi_1(z)], \quad (21)$$

unde $\chi_1(z)$ este o funcție arbitrară de z , și unde am notat

$$\chi(z) = \int \psi(z) dz. \quad (22)$$

Pentru ca $A(z, \bar{z})$ să rezulte reală, e necesar și suficient ca $\chi_1 = \chi$. Din (20), (21) urmează acum

$$A(z, \bar{z}) = \operatorname{Re} [\bar{z}\varphi(z) + \chi(z)], \quad (23)$$

ceea ce este tocmai funcția lui Airy. Într-adevăr, din (23) avem evident

$$\Delta\Delta A \equiv 16 A_{, z\bar{z}z\bar{z}} = 0, \quad (24)$$

astfel că $A(z, \bar{z})$ este biarmonică. Mai departe, din (16) și (20) avem

$$S_0 = 4A_{, z\bar{z}}, \quad S = \overline{K}_{, z} = 4A_{, z^2}; \quad (25)$$

ținînd seama de (6.17) și (A.4.7), deducem deci

$$\sigma_{11} = A_{, 22}, \quad \sigma_{22} = A_{, 11}, \quad \sigma_{12} = -A_{, 12}, \quad (26)$$

așadar tocmai relațiile (4.20).

Prin urmare, funcția $A(z, \bar{z})$ din (20) coincide cu funcția lui Airy $A(x_1, x_2)$ din (4.20), iar formula (23) dă legătura ei cu funcțiile lui Kolosov și Mushelișvili. Orice funcție de forma (23) este biarmonică, și reciproc, prin integrarea succesivă a ecuației (24) în raport cu z, \bar{z} , se vede că orice funcție biarmonică admite această reprezentare. Formula (23) se numește *formula lui E. Goursat* [1], și constituie analogul în complex al teoremei lui Almansi și Nicolescu.

OBSERVATIA 2. Raționamentele de mai sus au un caracter formal (vezi § A.4, pag. 704; revezi și § 5.8, pag. 200). Justificarea lor rezidă în faptul că soluțiile ecuațiilor elasticității sînt (pentru $F = 0$) funcții biarmonice (vezi § 4.10, pag. 155), așadar în cazul de față funcții

analitice de x_1, x_2 în \mathcal{D} . Încercările unor autori de a fundamenta introducerea funcțiilor $\varphi(\zeta), \psi(\zeta)$, demonstrarea formulei lui Goursat etc., pentru clase mai largi de funcții, nu are deci sens decât cel mult pentru $F \neq 0$.

Să scriem încă componentele tensiunii și condițiile de plasticitate (în cazul $F = 0$). Introducând (8) în (6.12), avem imediat

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= \operatorname{Re}(2\varphi' - \bar{\zeta}\varphi'' - \psi'), & \sigma_{22} &= \operatorname{Re}(2\varphi' + \bar{\zeta}\varphi'' + \psi') \\ \sigma_{12} &= \operatorname{Im}(\bar{\zeta}\varphi'' + \psi').\end{aligned}\quad (27)$$

Pe de altă parte, ținând seama în (6.28) și (6.29) de a doua formulă (8), conchidem că determinarea punctelor în care se face trecerea în starea de deformare plastică se reduce la căutarea punctelor de maximum pentru cantitatea

$$|S(\zeta, \bar{\zeta})| = 2|\bar{\zeta}\varphi''(\zeta) + \psi'(\zeta)|. \quad (28)$$

b) Ecuațiile neomogene

Formulele de mai sus pot fi extinse la cazul $F \neq 0$, prin adăugarea termenilor corespunzători unei soluții particulare S_0^*, S^*, U^* a sistemului neomogen (6.16), (6.21). În acest scop, să începem prin a considera ecuațiile

$$f_{,\bar{\zeta}} = F, \quad g_{,\zeta} = F. \quad (29)$$

Formulele lui Pompeiu ⁴⁾ (A.4.48), (A.4.49) dau pentru orice domeniu (chiar multiplu conex) $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}$ de frontieră \mathcal{C} :

$$\begin{aligned}f(\zeta, \bar{\zeta}) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(Z, \bar{Z})}{Z - \zeta} dZ - \frac{1}{\pi} \iint_{\mathcal{A}} \frac{F}{Z - \zeta} dD, \\ g(\zeta, \bar{\zeta}) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \frac{g(Z, \bar{Z})}{\bar{Z} - \bar{\zeta}} d\bar{Z} - \frac{1}{\pi} \iint_{\mathcal{A}} \frac{F}{Z - \bar{\zeta}} dD,\end{aligned}\quad (30)$$

În orice punct $\zeta \in \mathcal{A}$ (unde $dD = dX_1 dX_2$). Integralele curbilinii din (30) sînt integrale de tip Cauchy, așadar reprezintă funcții olomorfe de ζ , respectiv de $\bar{\zeta}$, în \mathcal{A} . Derivînd în mod convenabil formulele de mai sus, obținem din (29) și (30)

$$F(\zeta, \bar{\zeta}) = -\frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} \iint_{\mathcal{A}} \frac{F}{Z - \zeta} dD, \quad F(\zeta, \bar{\zeta}) = -\frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial \zeta} \iint_{\mathcal{A}} \frac{F}{\bar{Z} - \bar{\zeta}} dD, \quad (31)$$

⁴⁾ Pentru primele lor aplicări la astfel de probleme, vezi N. Teodorescu [1].

de unde în particular urmează egalitatea

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \iint_{\mathcal{A}} \frac{F}{\bar{Z} - \bar{z}} dD = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \iint_{\mathcal{A}} \frac{F}{Z - z} dD. \quad (32)$$

Pentru integralele din (31) se obțin de asemenea, derivând în raport cu z , respectiv \bar{z} , (ca parametri sub semnul integralei), formulele:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \iint_{\mathcal{A}} \frac{F}{Z - z} dD &= \iint_{\mathcal{A}} \frac{F}{(Z - z)^2} dD, \\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \iint_{\mathcal{A}} \frac{F}{\bar{Z} - \bar{z}} dD &= \iint_{\mathcal{A}} \frac{F}{(\bar{Z} - \bar{z})^2} dD. \end{aligned} \quad (33)$$

Pentru justificarea acestor formule (valabile pentru $F \in C^0(\mathcal{A})$) vezi I. Vekua [1], teorema 1.32. Faptul că derivatele din (31) nu sînt nule se explică tocmai prin prezența termenului izolat în teorema lui Pompeiu datorită singularității funcției $f(Z, \bar{Z})/(Z - z)$.

Toate aceste formule au caracter de *identități*, valabile în punctele lui \mathcal{A} . Pentru valabilitatea lor în \mathcal{D} , este suficient să putem lua $\mathcal{A} = \mathcal{D}$ și $\mathcal{C} = \mathcal{L}$.

Să considerăm acum a doua ecuație (6.16) și să introducem în ea prima formulă (31) pentru $\mathcal{A} = \mathcal{D}$. Obținem atunci

$$S_{0, \bar{z}}^* = \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} \iint_{\mathcal{D}} \left(\frac{F}{Z - z} + \frac{\bar{F}}{\bar{Z} - \bar{z}} \right) dD, \quad (34)$$

ecuație care posedă soluția evidentă

$$S_0^* = \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \iint_{\mathcal{D}} \left(\frac{F}{Z - z} + \frac{\bar{F}}{\bar{Z} - \bar{z}} \right) dD. \quad (35)$$

Introducînd (35) în prima ecuație (6.16), căpătăm

$$S_{, \bar{z}}^* = \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \iint_{\mathcal{D}} \left(\frac{F}{Z - z} + \frac{\bar{F}}{\bar{Z} - \bar{z}} \right) dD + \bar{F}. \quad (36)$$

Ținînd seama de relațiile ce se deduc din a doua formulă (31) și din (32) dacă înlocuim F prin \bar{F} , avem

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \iint_{\mathcal{D}} \frac{\bar{F}}{\bar{Z} - \bar{z}} dD + \bar{F} &= -\frac{3-4\nu}{4(1-\nu)} \frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \iint_{\mathcal{D}} \frac{\bar{F}}{\bar{Z} - \bar{z}} dD = \\ &= -\frac{3-4\nu}{4(1-\nu)} \frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \iint_{\mathcal{D}} \frac{\bar{F}}{Z - z} dD, \end{aligned} \quad (37)$$

astfel că componenta corespunzătoare acestor doi termeni în S^* este găsită. Pentru a pune și primul termen din (36) sub forma derivatei în raport cu \bar{z} a unei funcții, deocamdată necunoscute, remarcăm că avem

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \iint_{\mathcal{D}} F \frac{\bar{Z} - \bar{z}}{(Z - z)^2} dD = - \iint_{\mathcal{D}} \frac{F}{(Z - z)^2} dD = - \frac{\partial}{\partial z} \iint_{\mathcal{D}} \frac{F}{Z - z} dD, \quad (38)$$

unde am ținut seama de (33), iar operația de derivare în raport cu \bar{z} ca parametru sub semnul integralei este evidentă. Cu aceasta, din (36)–(38) urmează

$$S^* = - \frac{3 - 4\nu}{4\pi(1 - \nu)} \iint_{\mathcal{D}} \frac{\bar{F}}{Z - z} dD - \frac{1}{4\pi(1 - \nu)} \iint_{\mathcal{D}} F \frac{\bar{Z} - \bar{z}}{(Z - z)^2} dD, \quad (39)$$

Să introducem acum valoarea S^* de mai sus în prima din ecuațiile (6.21). După integrare în raport cu parametrul \bar{z} , obținem evident

$$U^* = - \frac{3 - 4\nu}{16\pi\mu(1 - \nu)} \iint_{\mathcal{D}} \bar{F} \ln(\bar{Z} - \bar{z}) dD + \frac{1}{16\pi\mu(1 - \nu)} \iint_{\mathcal{D}} \bar{F} \frac{Z - z}{\bar{Z} - \bar{z}} dD + U_1^*(z), \quad (40)$$

unde $U_1^*(z)$ este încă nedeterminată. Introducând (40) și (35) în a doua ecuație (6.21), și ținând seama că prima integrală din (40) nu depinde de \bar{z} , în timp ce în cea de-a doua putem deriva în raport cu \bar{z} ca parametru, obținem

$$\begin{aligned} & - \frac{1}{16\pi\mu(1 - \nu)} \iint_{\mathcal{D}} \left(\frac{\bar{F}}{\bar{Z} - \bar{z}} + \frac{F}{Z - z} \right) dD + \frac{dU_1^*(z)}{dz} + \frac{d\overline{U_1^*(z)}}{d\bar{z}} = \\ & = \frac{1 - 2\nu}{8\pi\mu(1 - \nu)} \iint_{\mathcal{D}} \left(\frac{F}{Z - z} + \frac{\bar{F}}{\bar{Z} - \bar{z}} \right) dD, \end{aligned}$$

de unde, separând variabilele și integrând în raport cu parametrul \bar{z} , deducem

$$U_1^*(z) = - \frac{3 - 4\nu}{16\pi\mu(1 - \nu)} \iint_{\mathcal{D}} F \ln(Z - z) dD. \quad (41)$$

Cu aceasta, expresia (40) a deplasării U^* devine

$$U^* = - \frac{3 - 4\nu}{8\pi\mu(1 - \nu)} \iint_{\mathcal{D}} F \ln|Z - z| dD + \frac{1}{16\pi\mu(1 - \nu)} \iint_{\mathcal{D}} \bar{F} \frac{Z - z}{\bar{Z} - \bar{z}} dD. \quad (42)$$

Termenul multiform din integrandul din (40) nu se menține deci în rezultatul final. Formulele (35), (39) și (42) dau soluția particulară căutată.

OBSERVAȚIA 3. Înlocuind \mathcal{D} prin \mathcal{A} în aceste formule, ele continuă să reprezinte o soluție particulară a ecuațiilor neomogene, valabilă însă numai în punctele $z \in \mathcal{A}$.

Să trecem la determinarea vectorului-tensiune. Din (14) urmează evident

$$\sigma_{n1}^* + i\sigma_{n2}^* = -\frac{1}{2}i[S_0^* \delta'(s) + \overline{S^*} \overline{\delta'(s)}], \quad (43)$$

unde trebuie să introducem (35) și (39). Ținând seama de (31) și (33), și derivând în raport cu δ ca parametru în a doua integrală din $\overline{S^*}$, obținem mai întâi ^{b)}:

$$\begin{aligned} S_{0,\delta}^* &= \frac{1}{4\pi(1-\nu)}(-\pi F) + \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \iint_D \frac{\overline{F}}{(\overline{Z} - \overline{\delta})^2} dD, \\ \overline{S^*}_{,\delta} &= -\frac{3-4\nu}{4\pi(1-\nu)}(-\pi F) + \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \iint_D \frac{\overline{F}}{(\overline{Z} - \overline{\delta})^2} dD. \end{aligned} \quad (44)$$

Întrucât avem $S_{0,\delta}^* \neq \overline{S^*}_{,\delta}$ rezultă că — spre deosebire de cazul $F=0$ — nu se poate da aci un analog al formulelor (16) și (18). Totuși, se poate introduce o funcție $K^*(\delta, \overline{\delta})$ în așa fel încît

$$S_0^* = K^*_{,\delta}, \quad \overline{S^*} = K^*_{,\overline{\delta}} + H^*, \quad (45)$$

unde H^* este un termen de corecție. Al doilea termen din ambele derivate (44) intră evident în alcătuirea derivatelor funcției K^* , în timp ce corecția H^* trebuie folosită pentru componentele corespunzătoare celui dintâi termen. Luând

$$K^*(\delta, \overline{\delta}) = -\frac{1}{4\pi(1-\nu)} \iint_D \left\{ \overline{F} \frac{Z - \delta}{\overline{Z} - \overline{\delta}} + F [\ln(Z - \delta) + \ln(\overline{Z} - \overline{\delta})] \right\} dD, \quad (46)$$

căpătăm

$$\begin{aligned} K^*_{,\delta} &= \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \iint_D \left[\frac{\overline{F}}{\overline{Z} - \overline{\delta}} + \frac{F}{Z - \delta} \right] dD, \\ K^*_{,\overline{\delta}} &= -\frac{1}{4\pi(1-\nu)} \iint_D \left[\overline{F} \frac{Z - \delta}{(\overline{Z} - \overline{\delta})^2} - \frac{F}{\overline{Z} - \overline{\delta}} \right] dD, \end{aligned}$$

de unde

$$S_0^* = K^*_{,\delta}, \quad \overline{S^*} = K^*_{,\overline{\delta}} - \frac{1}{\pi} \iint_D \frac{F}{\overline{Z} - \overline{\delta}} dD, \quad (47)$$

și deci

$$\sigma_{n1}^* + i\sigma_{n2}^* = -\frac{1}{2}i K^*_{,\delta} - \frac{1}{2\pi i} \overline{\delta'(s)} \iint_D \frac{F}{\overline{Z} - \overline{\delta}} dD. \quad (48)$$

^{b)} A nu se confunda în asemenea expresii $\overline{S^*}_{,\delta}$ cu $\overline{S^*}_{,\delta}$.

Acesta este deci vectorul corespunzător prezenței forțelor de volum, care trebuie adăugat vectorului din (18). Și condiția (28) poate fi modificată în așa fel încât să ținem seama de efectul acestor forțe: pentru aceasta se introduce în ea expresia (39).

Unele din integralele ce apar în (35), (39), (42) și (48) pot fi calculate ca integrale de tip Cauchy pe \mathcal{L} . Dacă funcția $F(\zeta, \bar{\zeta})$ este analitică și dacă domeniul \mathcal{D} este un disc sau o coroană circulară (sau un domeniu reprezentabil conform pe un astfel de domeniu canonic), aceste calcule sînt uneori destul de simple. Pentru unele cazuri, vezi C. Teodosiu [1]; I. Vekua [1], § 1.4.

Cazul $F \neq 0$ nu prezintă prea mare însemnătate pentru problema plană, dar poate fi de interes esențial în studiul încovoierii plăcilor. Unele formule finale pentru cazul ecuațiilor neomogene sînt date (fără demonstrații) de I. Vekua și N. Mushelişvili [1].

§ 8. REZULTANTA ȘI MOMENTUL REZULTANT AL TENSIUNILOR

Cu ajutorul formulelor (7.19) (eventual și (7.48)) se determină ușor torsorul față de origine al tensiunilor ce apar pe o curbă \mathcal{C} din \mathcal{D} (eventual pe \mathcal{L}). Ca și în problema antiplană, aceasta va servi — printre altele — la calcularea anumitor parametri constanți de care depind φ și ψ .

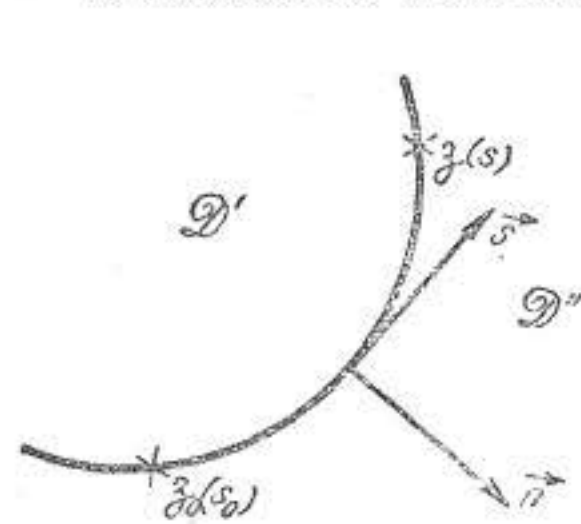


Fig. 6.8.1

Ca și în problema antiplană, avem de calculat o rezultantă $R = \mathcal{R}_1 + i \mathcal{R}_2$ și un moment resultant \mathcal{M}_3 . Deosebirea constă în faptul că aci intervine torsorul tensiunii pe elemente cilindrice, și nu pe secțiuni normale.

Fie pentru început că \mathcal{C} e o curbă simplă deschisă, de capete z_0 și z (z_0 nu este aici un centru de greutate), și fie s abscisa curbilinie definită în așa fel încât curba să fie parcursă prin valori crescătoare ($ds > 0$) de la s_0 pînă la s . Pentru a face uz de (7.19), vom alege normala n orientată spre dreapta în raport cu sensul pozitiv pe \mathcal{C} . Porțiunea din \mathcal{D} înspre care este dirijat n se va nota \mathcal{D}'' , iar cealaltă, cu \mathcal{D}' . Prin urmare, $\sigma_{n1} + i \sigma_{n2}$ este tensiunea ce descrie acțiunea părții \mathcal{D}'' a corpului, asupra părții \mathcal{D}' .

Cu această convenție, găsim

$$R(s) = \mathcal{R}_1(s) + i \mathcal{R}_2(s) = \int_{s_0}^s (\sigma_{n1} + i \sigma_{n2}) ds, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_3(s) &= \int_{s_0}^s (x_1 \sigma_{n2} - x_2 \sigma_{n1}) ds = \operatorname{Re} \int_{s_0}^s i \zeta (\sigma_{n1} - i \sigma_{n2}) ds = \\ &= -\operatorname{Im} \int_{s_0}^s \zeta (\sigma_{n1} - i \sigma_{n2}) ds. \end{aligned} \quad (2)$$

Spre deosebire de $\sigma_{n1} + i \sigma_{n2}$ — care este o funcție de punct și de orientarea normalei — mărimile $R(s)$ și $\mathcal{M}_3(s)$ sînt funcții numai de punct pe \mathcal{C} , întrucît în (1) și (2) direcția normalei este deplin determinată. Dacă — pentru un sens de parcurgere deja ales — calculăm torsorul tensiunilor aplicate în lungul lui \mathcal{C} asupra părții \mathcal{D}' , obținem evident valorile $R(s)$ și $-\mathcal{M}_3(s)$.

a) Problema omogenă

Să ne limităm deocamdată la cazul $F = 0$.

Făcînd uz de formulele (7.19) și de notația (A.4.35), obținem

$$R(s) = -i [\varphi + \bar{z} \bar{\varphi}' + \bar{\psi}]_{s_0}^s. \quad (3)$$

Pentru momentul rezultat avem mai întîi, integrînd prin părți

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_3(s) &= -\operatorname{Re} \int_{s_0}^s z d(\varphi + \bar{z} \varphi' + \psi) = \\ &= -\operatorname{Re} [z \bar{\varphi} + z \bar{z} \varphi' + z \psi]_{s_0}^s + \operatorname{Re} \int_{s_0}^s (\bar{\varphi} + \bar{z} \varphi' + \psi) dz, \end{aligned} \quad (4)$$

unde trebuie să calculăm desigur nu „o integrală” în sensul din §§ 5.8 sau 6.7, ci *integrala definită* în lungul curbei \mathcal{C} :

$$f(z, \bar{z}) = \frac{1}{2} \int_{s_0}^s (\bar{\varphi} + \bar{z} \varphi' + \psi) dz + (\varphi + z \bar{\varphi}' + \bar{\psi}) d\bar{z}. \quad (5)$$

Derivatele acestei funcții se scriu imediat (vezi (A.4.28)):

$$f_{,z} = \frac{1}{2} (\bar{\varphi} + \bar{z} \varphi' + \psi), \quad f_{,\bar{z}} = \frac{1}{2} (\varphi + z \bar{\varphi}' + \bar{\psi}),$$

de unde urmează

$$f(z, \bar{z}) = \frac{1}{2} (z \bar{\varphi} + \bar{z} \varphi + \chi + \bar{\chi}) = \operatorname{Re} (\bar{z} \varphi + \chi), \quad (6)$$

astfel că funcția $f(z, \bar{z})$ coincide cu funcția lui Airy scrisă sub forma complexă în (7.23). Introducînd acum (6) în (4), deducem

$$\mathcal{M}_3(s) = \operatorname{Re} [\chi - z \psi - z \bar{z} \psi']_{s_0}^s. \quad (7)$$

Formulele (3) și (7) dau cantitățile cerute.

Este vizibil că mărimile din (3) și (7) nu depind de drumul parcurs între punctele z_0 și z . Aceasta era de prevăzut: schimbînd drumul, ar trebui să le adăugăm rezultanta și momentul rezultat al tensiunilor ce iau naștere pe o curbă închisă; or, torsorul acestora va fi nul, întrucît forțele de volum acționînd în domeniul mărginit de această curbă sînt nule.

b) Problema neomogenă

Pentru a ține seama de forțele de volum, trebuie să reproducem acum aceleași calcule pentru vectorul-tensiune $\sigma_{n1}^* + i\sigma_{n2}^*$ din (7.48). Ținând seama de (1), vom scrie

$$R^*(s) = -\frac{1}{2}iK^* \Big|_{s_0}^s - \frac{1}{2\pi i} \int_{s_0}^s \left[\iint_{\mathcal{D}} \frac{F}{Z - \zeta} dD \right] d\bar{\zeta}, \quad (8)$$

ceea ce este valabil pentru orice curbă \mathcal{C} din \mathcal{D} . În cazul particular al unei curbe \mathcal{C} simple închise, prima expresie din al doilea membru din (8) trebuie să fie nulă, întrucât K^* din (7.46) este vizibil o funcție uniformă. Integrala curbilinie din (8) are — ținând seama de formula lui Stokes (A.4.29) și de a doua formulă (7.31), transcrisă pentru domeniul \mathcal{A} de frontieră \mathcal{C} — valoarea

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \left[\iint_{\mathcal{A}} \frac{F}{Z - \zeta} dD \right] d\bar{\zeta} &= -\frac{1}{2\pi i} (-2i) \iint_{\mathcal{A}} \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} \left[\iint_{\mathcal{A}} \frac{F}{Z - \zeta} \times \right. \\ &\quad \left. \times dX_1 dX_2 \right] dx_1 dx_2 = - \iint_{\mathcal{A}} F dx_1 dx_2, \end{aligned}$$

astfel că (8) ia forma

$$R^*(s) = - \iint_{\mathcal{A}} F dD. \quad (9)$$

Pentru momentul resultant, deducem pe rînd din (2) și (7.48)

$$\mathcal{M}_3^*(s) = -\frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_{s_0}^s \zeta d\bar{K}^* + \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \int_{s_0}^s \left[\iint_{\mathcal{D}} \frac{\bar{F}}{Z - \zeta} dD \right] \zeta d\bar{\zeta},$$

de unde, integrînd prin părți :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_3^*(s) &= -\frac{1}{4} \left[\zeta \bar{K}^* + \bar{\zeta} K^* \right]_{s_0}^s + \frac{1}{4} \int_{s_0}^s (\bar{K}^* d\zeta + K^* d\bar{\zeta}) + \\ &+ \frac{1}{4\pi} \int_{s_0}^s \left\{ \left[\iint_{\mathcal{D}} \frac{\bar{F}}{Z - \zeta} dD \right] \zeta d\bar{\zeta} + \left[\iint_{\mathcal{D}} \frac{F}{Z - \bar{\zeta}} dD \right] \bar{\zeta} d\zeta \right\}. \end{aligned} \quad (10)$$

Dacă \mathcal{C} este o curbă simplă închisă, ținînd seama că K^* este uniformă, prima paranteză e nulă; înlocuind din nou pe \mathcal{D} prin \mathcal{A} , și ținînd seama de prima relație (7.47) și de faptul că S_0^* este o cantitate reală, constatăm că prima integrală din (10) se anulează de asemenea. Pentru cea de-a doua integrală curbilinie, avem pe rînd

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} 2i \iint_{\mathcal{A}} \left[\zeta \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} \iint_{\mathcal{A}} \frac{\bar{F}}{Z - \zeta} dX_1 dX_2 - \bar{\zeta} \frac{\partial}{\partial \zeta} \iint_{\mathcal{A}} \frac{F}{Z - \bar{\zeta}} dX_1 dX_2 \right] dx_1 dx_2 = \\ = \frac{i}{2\pi} \iint_{\mathcal{A}} [\zeta(-\pi\bar{F}) - \bar{\zeta}(-\pi F)] dx_1 dx_2 = \iint_{\mathcal{A}} \operatorname{Im}(\zeta \bar{F}) dx_1 dx_2, \end{aligned}$$

astfel că (10) devine în definitiv

$$\mathcal{M}_3^*(s) = - \iint_{\mathcal{A}} (x_1 F_2 - x_2 F_1) dD. \quad (11)$$

Integralele (9) și (11) reprezintă desigur torsorul forțelor de volum F din domeniul \mathcal{A} (care are acum rolul domeniului \mathcal{D}), și care fac echilibru tensiunilor de pe \mathcal{C} .

**c) Singularități admisibile
pentru funcțiile lui Kolosov și Mushelișvili**

Formulele de mai sus permit precizarea naturii eventualelor singularități ale funcțiilor φ, ψ în \mathcal{D} . Să presupunem că $F = 0$ și să transcriem formulele (3), (7) pentru cazul unei curbe simple închise \mathcal{C} , parcurse în sens direct :

$$R = -i [\varphi + \bar{\partial}\bar{\varphi}' + \bar{\psi}]_{\mathcal{C}}, \quad \mathcal{M}_3 = \operatorname{Re} [\chi - \bar{\partial}\psi - \bar{\partial}\bar{\partial}\varphi']_{\mathcal{C}}. \quad (12)$$

Mărimile R, \mathcal{M}_3 trebuie să fie evident niște constante.

Să presupunem acum că un punct oarecare din \mathcal{A} este un punct regulat, sau cel mult un punct singular izolat de tip uniform pentru $\varphi(z), \psi(z)$. Alegându-l drept origine, rezultă că în vecinătatea lui avem

$$\varphi(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n, \quad \psi(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n z^n, \quad (13)$$

unde

$$a_n = a'_n + ia''_n, \quad b_n = b'_n + ib''_n, \quad (14)$$

(și unde $a_n = b_n = 0$ pentru $n < 0$ dacă punctul considerat este punct regulat). Integrând termen cu termen seria $\psi(z)$, avem și

$$\chi(z) = b_{-1} \ln z + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{b_n}{n+1} z^{n+1}. \quad (15)$$

Pentru a calcula torsorul tensiunilor pe o curbă \mathcal{C} ce conține în interior originea (și nici un alt punct singular), introducem (13)–(15) în (12). Deducem

$$R = 0, \quad \mathcal{M}_3 = \operatorname{Re} [b_{-1} \ln z]_{\mathcal{C}} = -2\pi b''_{-1}. \quad (16)$$

De aci rezultă mai întâi că torsorul tensiunilor ce apar pe orice curbă care conține în interior numai puncte regulate ale funcțiilor $\varphi(z), \psi(z)$, este nul. În particular, aceasta înseamnă că sarcini concentrate de orice natură pot apare numai în puncte singulare ale funcțiilor φ, ψ .

Mai departe, se vede că funcții Kolosov-Mushelișvili uniforme în vecinătatea unui punct singular izolat, corespund în general unei repartiții de tensiuni auto-echilibrate (de torsor nul). Fac excepție funcțiile

$$\varphi(z) = 0, \quad \psi(z) = -(i\mathcal{M}_3/2\pi)z^{-1},$$

care descriu o repartiție de tensiuni static echivalente cu un cuplu de moment \mathcal{M}_3 . Deformînd continuu curba \mathcal{C} în așa fel încît ea să se reducă la punctul singular, conchidem că funcțiile de mai sus descriu acțiunea unui *moment concentrat*, aplicat în origine. Intensitatea acestuia este desigur $M_3 = -\mathcal{M}_3$, (pentru a asigura împreună cu tensiunile repartizate pe \mathcal{C} echilibrul domeniului de frontieră \mathcal{C}). Funcțiile

$$\varphi(z) = 0, \quad \psi(z) = (iM_3/2\pi)z^{-1}, \quad (17)$$

descriu deci acțiunea asupra planului nemărginit, a unui moment concentrat de intensitate M_3 aplicat în origine.

Să admitem acum existența unor singularități izolate de tip critic algebric. Alegînd din nou originea în punctul singular, și admitînd deci dezvoltări în serie în care termenul general are forma

$$\varphi(z) = a z^{p/q}, \quad \psi(z) = b z^{r/s}, \quad (18)$$

(a, b — constante complexe; p, q, r, s — numere întregi), conchidem din (12) că mărimile R și \mathcal{M}_3 depind în general de numărul de parcurgeri ale curbei, precum și de alegerea punctelor $s_0 \equiv s$ pe această curbă, ceea ce contrazice semnificația mecanică a rezultantei și momentului resultant. Prin urmare, funcțiile $\varphi(z), \psi(z)$ nu pot avea puncte critice algebrice — decît eventual pe componenta exterioară \mathcal{L}_0 a frontierei.

Dimpotrivă, funcțiile considerate pot avea puncte critice de tip logaritmice. Într-adevăr, dacă în alcătuirea lor intră termeni

$$\varphi(z) = a \ln z, \quad \psi(z) = b \ln z, \quad \chi(z) = b z (\ln z - 1), \quad (19)$$

atunci din (12) urmează

$$R = 2\pi(a - \bar{b}), \quad \mathcal{M}_3 = 0. \quad (20)$$

Reducînd curba \mathcal{C} la punctul singular, constatăm că funcțiile (19) descriu o stare de tensiune corespunzătoare acțiunii unei *forțe concentrate*, aplicate în acel punct.

Vom reveni la finele § 10, precum și în § 16, exemplele *d* și *e*, asupra soluțiilor de formă (17) și (19).

Din cele de mai sus se constată că prezența unei forțe sau a unui moment concentrat nu caracterizează starea elastică: coeficienții din (13) rămîn nedeterminați, cu excepția lui $\text{Im } b_{-1}$. Prezența unei forțe sau a unui moment concentrat este deci descrisă de orice funcții $\varphi(z), \psi(z)$ în care apar termeni de formă (17) sau (19) — cu singura condiție ca seriile care eventual le definesc să fie convergente (exceptînd desigur punctul singular).

Înțelegînd însă starea corespunzătoare unei acțiuni mecanice concentrate ca definită printr-un proces de trecere la limită din cea corespunzătoare unei sarcini repartizate pe o porțiune din \mathcal{D} , rezultă că soluția problemei depinde esențial de *modul* în care este efectuată această trecere la limită, singura în măsură să definească coeficienții din (13). În particular, modul curent de a defini forța și momentul concentrat corespunde proceselor descrise în § 16, exemplele *d* și *e* (vezi și Observația din § 16, pag. 456; vezi încă și § 2.1, *b*). Acțiuni concentrate de structură mai complicată pot fi construite în principiu cu ajutorul funcției δ a lui Dirac și al derivatelor sale.

§ 9. GRADUL DE ARBITRAR AL FUNCȚIILOR LUI KOLOSOV ȘI MUSHELIȘVILI. SCHIMBĂRI DE COORDONATE

a) Gradul de arbitrar

Cunoașterea funcțiilor lui Kolosov și Mushelișvili caracterizează pe deplin starea elastică, dar nu și reciproc (compară cu § 5.11, pag. 216). Aceste funcții trebuie deci determinate numai abstracție făcînd de anumiți termeni ce corespund stării elastice nule (tensiuni nule, sau tensiuni și deplasări nule). Vom atribui — numai în același paragraf — indicele „0” funcțiilor ce descriu starea nulă.

Ne vom limita la cazul $F = 0$ (pentru $F \neq 0$, vezi C. Teodosiu [1]).

Fie că în \mathcal{D} e realizată starea de tensiune nulă. Din prima relație (7.8) urmează, ținînd seama de (7.7), că

$$\operatorname{Re} \Phi_0(z) = 0. \quad (1)$$

Notînd $\Phi_0 = P_0 + iQ_0$, deducem din (1) și din ecuațiile Cauchy-Riemann că Q_0 se reduce la o constantă reală C , și deci

$$\Phi_0(z) = iC. \quad (2)$$

Introducînd (2) în a doua ecuație (7.8), deducem

$$\Psi_0(z) = 0, \quad (3)$$

astfel că prin integrare obținem

$$\varphi_0(z) = iCz + \gamma, \quad \psi_0(z) = \gamma', \quad (4)$$

unde γ, γ' sînt constante complexe. Avem deci libertatea de a dispune de 5 constante reale, și funcțiile (4) pot fi adăugate funcțiilor problemei, fără a altera starea de tensiune. Prin urmare, putem alege arbitrar valorile funcțiilor φ, ψ și $\operatorname{Im} \varphi'$ într-un punct oarecare. Dacă \mathcal{D} conține originea, putem alege arbitrar valorile $\varphi(0), \psi(0)$ și $\operatorname{Im} \varphi'(0)$. Așadar, pe de o parte aceste valori nu pot fi *principial* determinate din datele formulate în tensiuni; pe de altă parte cunoașterea lor *nu este necesară*.

Fie acum realizată în \mathcal{D} starea de deplasare nulă. Funcțiile corespunzătoare trebuie căutate printre cele ce realizează starea de tensiune nulă, astfel că ele au forma (4). Din (7.12) obținem acum

$$C(\kappa + 1) i_3 + (\kappa\gamma - \bar{\gamma}') = 0. \quad (5)$$

Or, această condiție este satisfăcută identic dacă și numai dacă avem

$$C = 0, \gamma' = \kappa\bar{\gamma}. \quad (6)$$

Aceasta revine la a stabili trei noi condiții (în real), și arată că mai putem dispune arbitrar numai de două constante reale. Putem deci alege arbitrar pe γ sau γ' , așadar, dacă originea este în \mathcal{D} , valoarea $\varphi(0)$ sau $\psi(0)$. Notînd

$$\gamma = \gamma_1 + i\gamma_2, \quad \gamma' = \gamma'_1 + i\gamma'_2, \quad (7)$$

și introducînd (4) în (7.12), obținem deplasările ce corespund stării de tensiune nulă :

$$\begin{aligned} u_1^0 &= [-(\kappa + 1) Cx_2 + (\kappa\gamma_1 - \gamma'_1)]/2\mu, \\ u_2^0 &= [(\kappa + 1) Cx_1 + (\kappa\gamma_2 + \gamma'_2)]/2\mu. \end{aligned} \quad (8)$$

Aceasta este o roto-translație rigidă, caracterizată de parametrii $C, \kappa\gamma_1 - \gamma'_1, \kappa\gamma_2 + \gamma'_2$. Condițiile (6) echivalează cu cerința de anulare a acestora.

b) Schimbări de axe

Ca și în cazul problemei anti-plane (vezi § 5.11, pct. d) poate fi utilă transcrierea funcțiilor lui Kolosov și Mushelișvili dintr-un sistem de axe în altul. Notînd cu indicele „1” mărimile relative la noul sistem, avem deci în cazul translației

$$\bar{z} = \bar{z}^1 + \bar{z}^0, \quad (9)$$

iar în cel al rotației

$$\bar{z} = [\exp(i\vartheta)] \bar{z}^1. \quad (10)$$

Ca și în (5.11.13), o funcție $F(x_1, x_2)$ se zice invariantă⁶⁾ dacă avem

$$F^1(\bar{z}^1, \bar{\bar{z}}^1) \equiv F(\bar{z}, \bar{\bar{z}}). \quad (11)$$

Semnificația mecanică a componentelor σ_i , arată că funcțiile S, S_0 sînt invariante la o translație (dar nu și la o rotație !) a axelor :

$$S_0^1 = S_0, S^1 = S. \quad (12)$$

⁶⁾ Poziția — inferioară sau superioară — a indicelui „1” este dictată aci (ca și în § 5.11) exclusiv de rațiuni de comoditate a scrierii.

Relația (7.4) dă prin urmare

$$\operatorname{Re}[\Phi(\bar{z}) - \Phi_1(\bar{z} - \bar{z}^0)] = 0,$$

de unde urmează că partea imaginară a acestei funcții de \bar{z} este o constantă, fie ea iC . Prin urmare, avem

$$\Phi(\bar{z}) = \Phi_1(\bar{z} - \bar{z}^0) + iC, \quad (13)$$

unde, după cum urmează din (2), constanta iC poate fi neglijată.

Relația (7.6) conduce la egalitatea

$$\bar{z}\Phi'(\bar{z}) + \Psi(\bar{z}) = (\bar{z} - \bar{z}^0)\Phi'_1(\bar{z} - \bar{z}^0) + \Psi_1(\bar{z} - \bar{z}^0),$$

de unde, ținând seama de (13), deducem

$$\Psi(\bar{z}) = \Psi_1(\bar{z} - \bar{z}^0) - \bar{z}^0\Phi'_1(\bar{z} - \bar{z}^0). \quad (14)$$

Neglijând termenii corespunzători rotației (2) și constantele complexe de integrare (corespunzătoare unei translații), deducem din (13), (14)

$$\varphi(\bar{z}) = \varphi_1(\bar{z}^1), \quad \psi(\bar{z}) = \psi_1(\bar{z}^1) - \bar{z}^0\varphi'_1(\bar{z}^1). \quad (15)$$

Funcția $\varphi(\bar{z})$ este deci invariantă la o translație de axe, în timp ce $\psi(\bar{z})$ se transformă conform celei de a doua relații (15).

Trecînd la cazul rotației axelor, vom aminti că $S_0 = \Theta/(1 + \nu)$, și deci :

$$S_0 = S_0^1. \quad (16)$$

Funcția S nu este însă un invariant. Transcriind a doua ecuație (7.1) în axele \bar{z} și \bar{z}^1 , obținem

$$\partial S / \partial \bar{z} = \partial S_0 / \partial \bar{z}, \quad \partial S^1 / \partial \bar{z}^1 = \partial S_0^1 / \partial \bar{z}^1. \quad (17)$$

Ținînd seama de (16), precum și de faptul că din (10) urmează

$$d\bar{z}/d\bar{z}^1 = \exp(i\vartheta), \quad d/d\bar{z}^1 = [\exp(i\vartheta)] d/d\bar{z}, \quad (18)$$

putem transcrie a doua ecuație (17) sub forma

$$[\exp(-i\vartheta)] \partial S^1 / \partial \bar{z} = [\exp(i\vartheta)] \partial S_0 / \partial \bar{z}. \quad (19)$$

Comparînd-o cu prima ecuație (17), deducem prin integrare

$$S^1 = [\exp(2i\vartheta)] S + f(\bar{z}),$$

unde $f(\bar{z})$ este o funcție necunoscută. Întrucît formulele generale de transformare (2.5.5) sînt omogene, rezultă că trebuie să avem $f(\bar{z}) \equiv 0$, și deci

$$S^1 = [\exp(2i\vartheta)] S. \quad (20)$$

Se înțelege că această relație — asemănătoare cu a doua relație (5.11.16) — putea fi stabilită direct, dar laborios, din (2.5.5).

Ținînd seama de (16), obținem acum din (7.4) — după neglijarea unei constante imaginare — la fel ca în cazul translației

$$\Phi(z) = \Phi_1(z^1). \quad (21)$$

Din (7.6) deducem mai întîi

$$\bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z) = [\exp(-2i\vartheta)] [\bar{z}^1\Phi_1'(z^1) + \Psi_1(z^1)]. \quad (22)$$

Întrucît din (21) și (18) avem evident

$$\Phi'(z) = [\exp(-i\vartheta)] \Phi_1'(z^1),$$

primii termeni din ambii membri din (22) se reduc, și astfel căpătăm

$$\Psi(z) = [\exp(-2i\vartheta)] \Psi_1(z^1). \quad (23)$$

Ținînd seama din nou de (18), obținem din (21) și (23) prin integrare (întrucît unghiul ϑ nu depinde de z):

$$\varphi(z) = [\exp(i\vartheta)] \varphi_1(z^1), \quad \psi(z) = [\exp(-i\vartheta)] \psi_1(z^1). \quad (24)$$

c) Ecuațiile lui Lamé și Maxwell

Formulele precedente permit printre altele să se stabilească ecuațiile elasticității plane sub forma numită *a lui Lamé și Maxwell*. Pentru aceasta, să căutăm să transcriem ecuațiile (7.1) numai prin intermediul tensiunilor principale.

Prima din ele rămîne invariantă, în virtutea relației (16). Dar pentru cea de-a doua, nu putem folosi nici un sistem de coordonate carteziene, întrucît poziția axelor principale variază de la punct la punct. Va trebui deci ca această ecuație să fie transcrisă în coordonate curbilinii ortogonale, definite ca traiectorii ale tensiunilor principale (tangente în fiecare punct la direcțiile principale locale). Aceste traiectorii se numesc *linii izostatice*.

Păstrînd deocamdată notația z, \bar{z} pentru coordonatele carteziene în axe oarecare, introducînd (16) și (20) în a doua ecuație (7.1), și ținînd seama că unghiul ϑ este acum o funcție de z și \bar{z} , căpătăm mai întîi

$$\partial S_0^1 / \partial z - [\exp(-2i\vartheta)] [\partial S^1 / \partial \bar{z} - 2iS^1 \partial \vartheta / \partial \bar{z}] = 0. \quad (25)$$

Această ecuație trebuie să rămîină valabilă la limită, atunci cînd atît axele z , cît și axele z^1 , sînt axele principale, adică pentru $\vartheta = 0$. Notînd cu s_1, s_2 abscisele curbilinii pe liniile izostatice, și considerînd variabila complexă $\bar{s} = s_1 + is_2$, deducem din (25):

$$\partial(\sigma_1 + \sigma_2) / \partial \bar{s} - \partial(\sigma_2 - \sigma_1) / \partial \bar{s} + 2i(\sigma_2 - \sigma_1) (\partial \vartheta / \partial \bar{s})|_{\vartheta=0} = 0,$$

sau încă, făcînd uz de formulele (A.4.5) pentru variabilele \bar{s} , $\bar{\vartheta}$:

$$\left(\frac{\partial}{\partial s_1} - i \frac{\partial}{\partial s_2}\right)(\sigma_1 + \sigma_2) - \left(\frac{\partial}{\partial s_1} + i \frac{\partial}{\partial s_2}\right)(\sigma_2 - \sigma_1) + \\ + 2i(\sigma_2 - \sigma_1) \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial s_1} + i \frac{\partial \vartheta}{\partial s_2}\right) \Big|_{\vartheta=0} = 0. \quad (26)$$

Înlocuind în punctul considerat liniile izostatice prin cercurile osculatoare corespunzătoare, de raze ρ_1 , respectiv ρ_2 , avem evident $ds_1 = \rho_1 d\vartheta$, $ds_2 = \rho_2 d\vartheta$, de unde urmează

$$\partial \vartheta / \partial s_1 = 1/\rho_1, \quad \partial \vartheta / \partial s_2 = 1/\rho_2. \quad (27)$$

Separînd acum în (26) partea reală și cea imaginară, căpătăm în definitiv ecuațiile Lamé și Maxwell:

$$\partial \sigma_1 / \partial s_1 + (\sigma_1 - \sigma_2)/\rho_2 = 0, \quad \partial \sigma_2 / \partial s_2 + (\sigma_1 - \sigma_2)/\rho_1 = 0. \quad (28)$$

Pentru aceste ecuații forma în variabile reale (28) e cu mult mai simplă decît cea în variabile complexe.

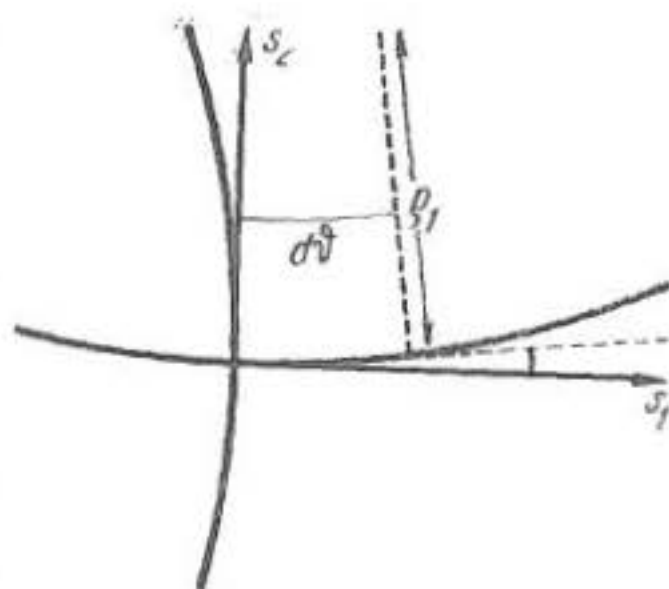


Fig. 6.9.1

§ 10. NATURA FUNCȚIILOR LUI KOLOSOV ȘI MUSHELIȘVILI ÎN DOMENII OARECARE

Proprietățile funcțiilor $\varphi(z)$, $\psi(z)$ trebuie să decurgă din formulele ce le leagă de componentele tensiunii și deplasării, care trebuie evident să fie uniforme și *mărginite* în \mathcal{D} . Ne vom limita la cazul $F = 0$.

OBSERVAȚIA 1. Presupunerea — ciudată la prima vedere — că componentele deplasării pot să nu fie funcții uniforme, conduce la aplicații de importanță capitală în studiul tensiunilor termice și al dislocațiilor. (Vezi A. Love [1], § 156 A; N. Muskhelişvili [5], §§ 45—46; V. Volterra [1]; G. Weingarten [1]; vezi și indicațiile din § 4.1, pag. 125).

Amintim aci relațiile fundamentale (7.8), (7.12) și (7.19):

$$S_0 = 2(\varphi' + \bar{\varphi}'), \quad S = 2(\bar{z}\varphi'' + \psi'); \quad (1)$$

$$2\mu U = \kappa\varphi - \bar{z}\bar{\varphi}' - \bar{\psi}; \quad (2)$$

$$\sigma_{n1} + i\sigma_{n2} = -i(\varphi + \bar{z}\bar{\varphi}' + \bar{\psi})_{,z}. \quad (3)$$

Evident, funcțiile φ , ψ nu pot avea puncte singulare decît pe frontiera lui \mathcal{D} , sau în exteriorul acestui domeniu (de exemplu în \mathcal{D}_i^+).

a) Domenii simplu conexe

O funcție analitică într-un domeniu mărginit și simplu conex este cu necesitate uniformă (teorema monodromiei). Prin urmare, dacă \mathcal{D} este simplu conex și mărginit, funcțiile $\varphi(z)$, $\psi(z)$ sînt olomorfe în \mathcal{D} .

Dacă \mathcal{D} este multiplu conex, ele rămîn uniforme în orice porțiune mărginită și simplu conexă a sa, putînd fi însă în general multiforme.

b) Domenii mărginite și multiplu conexe

Cu notațiile (A.4.35) — (A.4.38), condițiile de uniformitate se scriu ca

$$[S_0]_{\mathcal{C}} = [S]_{\mathcal{C}} = [U]_{\mathcal{C}} = 0 \quad (4)$$

pentru orice curbă închisă \mathcal{C} din \mathcal{D} . Întrucît S_0 are forma din (1), prima relație (4) duce la

$$[\operatorname{Re} \Phi(z)]_{\mathcal{C}} = 0, \quad (5)$$

ceea ce arată că partea reală a funcției $\Phi(z)$ este uniformă în \mathcal{D} . Partea sa imaginară se obține sub forma (A.5.62), așadar a unei integrale curbilinii care pune în evidență o sumă de termeni logaritmici, și o funcție uniformă. Alegînd

$$\Phi(z) = \sum_{j=1}^m A'_j \ln(z - z_j) + \Phi_0(z), \quad z_j \in \mathcal{D}_j^+, \quad (6)$$

— unde A'_j sînt constante reale, iar $\Phi_0(z)$ este uniformă, deci olomorfă în \mathcal{D} — asigurăm verificarea condiției (5).

Pentru a deduce din (6) funcția $\varphi(z)$, avem mai întîi

$$\int \sum_{j=1}^m A'_j \ln(z - z_j) dz = \sum_{j=1}^m A'_j (z - z_j) \ln(z - z_j) - \sum_{j=1}^m A'_j (z - z_j). \quad (7)$$

Pe de altă parte, din (A.5.60) deducem

$$\int \Phi_0(z) dz = \sum_{j=1}^m C_j \ln(z - z_j) + \Phi_{0;0}(z), \quad (8)$$

unde $\Phi_{0;0}(z)$ este olomorfă în \mathcal{D} . Adunînd expresiile (7) și (8) și strîngînd la un loc termenii uniformi, obținem

$$\varphi(z) = \sum_{j=1}^m A'_j z \ln(z - z_j) + \sum_{j=1}^m \gamma_j \ln(z - z_j) + \varphi_0(z), \quad (9)$$

unde $\gamma_j = C_j - A'_j z_j$, iar $\varphi_0(z)$ este o funcție olomorfă în \mathcal{D} .

Pentru a determina aspectul funcției $\psi(z)$, vom face uz de a doua condiție (4), vom ține seama de (1), și de faptul că funcția $\varphi'(z)$ rezultă din (9) a fi olomorfă în \mathcal{D} . Obținem astfel

$$[\Psi(z)]_{\mathcal{E}} = 0, \quad (10)$$

ceea ce corespunde relației (5) pentru $\Phi(z)$. Funcția $\Psi(z)$ este deci olomorfă în \mathcal{D} , iar primitiva ei se calculează ca în (8):

$$\psi(z) = \sum_{j=1}^m \gamma_j' \ln(z - z_j) + \psi_0(z), \quad z_j \in \mathcal{D}_j^+, \quad (11)$$

unde $\psi_0(z)$ este olomorfă.

Expresiile (9), (11) constituie punctul de plecare în studiul tensiunilor termice și al dislocărilor în corpurile plane multiplu conexe.

Să facem acum uz de ultima condiție (4), introducând aci (2); obținem

$$\kappa[\varphi]_{\mathcal{E}} - z[\bar{\varphi}']_{\mathcal{E}} - [\bar{\psi}]_{\mathcal{E}} = 0. \quad (12)$$

Dar din (9) și (11) avem în particular pentru $\mathcal{E} = \mathcal{L}_j$:

$$[\varphi]_{\mathcal{L}_j} = 2\pi i(A_j' z + \gamma_j), \quad [\varphi']_{\mathcal{L}_j} = 2\pi i A_j', \quad [\psi]_{\mathcal{L}_j} = 2\pi i \gamma_j', \quad (13)$$

astfel că din (12) obținem m condiții (necesare și suficiente):

$$2\pi i(\kappa A_j' z + \kappa \gamma_j + A_j' z + \bar{\gamma}_j') = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m,$$

(amintim că A_j' sînt reale), de unde deducem

$$A_j' = 0, \quad \gamma_j' = -\kappa \bar{\gamma}_j. \quad (14)$$

Relațiile (12) rezultă acum verificate pentru orice curbă \mathcal{E} din \mathcal{D} . Introducînd (14) în (9) și (11), obținem

$$\varphi(z) = \sum_{j=1}^m \gamma_j \ln(z - z_j) + \varphi_0(z), \quad (15)$$

$$\psi(z) = -\kappa \sum_{j=1}^m \bar{\gamma}_j \ln(z - z_j) + \psi_0(z),$$

ceea ce asigură uniformitatea tuturor componentelor stării elastice.

Pentru a determina constantele γ_j , să considerăm rezultanta complexă $X^{(j)}$ și momentul resultant $M_3^{(j)}$ al tensiunilor *exterioare* aplicate pe componenta \mathcal{L}_j a frontierei:

$$\begin{aligned} X^{(j)} &= X_1^{(j)} + i X_2^{(j)} = \oint_{\mathcal{L}_j} (\sigma_{n1} + i \sigma_{n2}) ds, \\ M_3^{(j)} &= \oint_{\mathcal{L}_j} (x_1 \sigma_{n2} - x_2 \sigma_{n1}) ds, \end{aligned} \quad (16)$$

pentru $j = 0, 1, 2, \dots, m$. (Curbele \mathcal{L}_j sînt parcurse în sensul direct, iar n este normala exterioară la \mathcal{D} .)

Comparînd (16) cu formulele (8.1), (8.2) scrise pentru o curbă \mathcal{C} închisă, unde n este normala exterioară la domeniul \mathcal{A} mărginit de \mathcal{C} , rezultă imediat că

$$\begin{aligned} R|_{\mathcal{L}_0} &= X^{(0)}, & R|_{\mathcal{L}_j} &= -X^{(j)}, \\ \mathcal{M}_3|_{\mathcal{L}_0} &= M_3^{(0)}, & \mathcal{M}_3|_{\mathcal{L}_j} &= -M_3^{(j)}, \end{aligned} \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad (17)$$

ceea ce se explică prin faptul că sensul normalei din (8.1), (8.2) coincide cu cel din (16) numai pe componenta exterioară a frontierei.

Ținînd seama de (15) în (8.12), avem mai întîi

$$[\varphi + \kappa \bar{\varphi}' + \bar{\psi}]_{\mathcal{C}} = \sum_{j=1}^m \gamma_j [\ln(z - z_j) - \kappa \ln(\bar{z} - \bar{z}_j)]_{\mathcal{C}}. \quad (18)$$

Prin urmare, dacă curba \mathcal{C} conține în interior o componentă \mathcal{L}_j a frontierei (și numai pe ea), prima relație (8.12) dă

$$R = 2\pi(\kappa + 1)\gamma_j, \quad (19)$$

iar dacă domeniul \mathcal{A} mărginit de \mathcal{C} este simplu conex și în întregime conținut în \mathcal{D} , atunci avem

$$R = 0. \quad (20)$$

Scriind (19) pentru \mathcal{L}_j și ținînd seama de (17), găsim deci

$$\gamma_j = -X^{(j)}/2\pi(\kappa + 1), \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad (21)$$

astfel că *forma definitivă* a funcțiilor lui Kolosov și Mushelișvili într-un domeniu mărginit și multiplu conex (pentru $F = 0$) este

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= -[1/2\pi(\kappa + 1)] \sum_{j=1}^m X^{(j)} \ln(z - z_j) + \varphi_0(z), \\ \psi(z) &= [\kappa/2\pi(\kappa + 1)] \sum_{j=1}^m \overline{X^{(j)}} \ln(z - z_j) + \psi_0(z), \end{aligned} \quad (22)$$

unde $\varphi_0(z)$, $\psi_0(z)$ sînt funcții olomorfe în \mathcal{D} . ($\Phi(z)$, $\Psi(z)$ sînt întotdeauna olomorfe.)

Aceste formule permit *separarea* componentelor multiforme și reducerea ulterioară a problemei la determinarea unor funcții uniforme, deci olomorfe în \mathcal{D} . (Vezi mai departe § 11 și § 14, pag. 439; vezi și § 5.11, pag. 217–218.)

Pentru a face uz de (15) în a doua formulă (8.12), vom considera primitiva $\chi(z)$ a funcției $\psi(z)$, care are forma (vezi (11) și raționamentul din (7), (8)) :

$$\chi(z) = \sum_{j=1}^m \gamma_j \ln(z - z_j) + \sum_{j=1}^m \gamma_j'' \ln(z - z_j) + \chi_0(z), \quad (23)$$

unde $\chi_0(z)$ este olomorfă, iar γ_j'' sînt constante complexe. Introducînd (11) și (23) în (8.12), și ținînd seama că $\varphi'(z)$ este olomorfă (vezi (6), cu $A_j' = 0$), obținem

$$\mathcal{M}_3 = \operatorname{Re} \sum_{j=1}^m [\gamma_j'' \ln(z - z_j)]_{\mathcal{C}}. \quad (24)$$

Prin urmare, dacă \mathcal{C} conține în interior o curbă \mathcal{L}_j , (24) devine

$$\mathcal{M}_3 = -2\pi \operatorname{Im} \gamma_j''; \quad (25)$$

dacă domeniul \mathcal{A} mărginit de \mathcal{C} este simplu conex și conținut în \mathcal{D} , atunci

$$\mathcal{M}_3 = 0. \quad (26)$$

Scriînd (25) pe \mathcal{L}_j și ținînd seama de (17), căpătăm

$$\operatorname{Im} \gamma_j'' = M_3^{(j)} / 2\pi. \quad (27)$$

În definitiv, rezultantele complexe $X^{(j)}$ intervin în expresiile funcțiilor $\varphi(z)$ și $\psi(z)$, iar momentele $M_3^{(j)}$ — în expresia funcției $\chi(z)$.

c) Domenii nemărginite și multiplu conexe

Să presupunem în fine că domeniul \mathcal{D} este *nemărginit* — limitîndu-ne la cazul unui domeniu \mathcal{D}^- din figura A.3.2, cu frontiera alcătuită din curbele $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \dots, \mathcal{L}_m$.

Formulele (22) sînt valabile în orice porțiune mărginită a planului. Rămîn de cercetat funcțiile $\varphi(z)$, $\psi(z)$ în *exteriorul* oricărui cerc \mathcal{L}_R de rază R . Alegînd R suficient de mare pentru ca toate curbele \mathcal{L}_j să fie conținute în interiorul lui \mathcal{L}_R , conchidem că pentru orice punct exterior lui \mathcal{L}_R avem $|z| > |z_j|$, și deci

$$\ln(z - z_j) = \ln z + \ln(1 - z_j/z),$$

unde funcția

$$\ln(1 - z_j/z) = -z_j/z - \frac{1}{2}(z_j/z)^2 - \frac{1}{3}(z_j/z)^3 - \dots$$

este olomorfă în exteriorul cercului \mathcal{L}_R , inclusiv în z_∞ . Notînd

$$X_1 = \sum_{j=1}^m X_1^{(j)}, \quad X_2 = \sum_{j=1}^m X_2^{(j)}, \quad X = X_1 + i X_2, \quad (28)$$

obținem din (22) formulele

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= -[X/2\pi(\kappa+1)] \ln z + \varphi_{0:0}(z), \\ \psi(z) &= [\kappa\bar{X}/2\pi(\kappa+1)] \ln z + \psi_{0:0}(z), \end{aligned} \quad (29)$$

unde funcțiile $\varphi_{0:0}$ și $\psi_{0:0}$ sînt olomorfe în exteriorul lui \mathcal{L}_R :

$$\varphi_{0:0}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n, \quad \psi_{0:0}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n z^n. \quad (30)$$

OBSERVAȚIA 2. Dezvoltări de forma (30) sînt valabile în orice punct exterior cercului \mathcal{L}_R — dar nu trebuie să credem că există o singură astfel de dezvoltare în serie valabilă pentru exteriorul lui \mathcal{L} . Coroana circulară este singurul domeniu pentru care cunoașterea unui element Laurent epuizează cunoașterea funcției.

Să folosim acum condiția — evidentă din punct de vedere mecanic — ca tensiunile și deplasările să rămînă mărginite la infinit. Introducînd expresiile (29), (30) în formulele (1), obținem

$$\begin{aligned} S_0 &= 2 \left[-\frac{X}{2\pi(\kappa+1)} \frac{1}{z} - \frac{\bar{X}}{2\pi(\kappa+1)} \frac{1}{\bar{z}} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} n (a_n z^{n-1} + \bar{a}_n \bar{z}^{n-1}) \right], \\ S &= 2 \left[\frac{X}{2\pi(\kappa+1)} \frac{\bar{z}}{z^2} + \frac{\kappa\bar{X}}{2\pi(\kappa+1)} \frac{1}{z} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=-\infty}^{\infty} n(n-1) a_n \bar{z} z^{n-2} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} n b_n z^{n-1} \right]. \end{aligned} \quad (31)$$

Notînd aici $z = R \exp(i\chi)$ deducem că S_0 și $|S|$ rămîn mărginiți pentru $R \rightarrow \infty$, dacă și numai dacă $a_n = b_n = 0$ pentru $n \geq 2$, astfel că formulele (29), (30), se reduc la

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= -[X/2\pi(\kappa+1)] \ln z + a_1 z + \sum_{n=0}^{\infty} a_{-n} z^{-n}, \\ \psi(z) &= [\kappa\bar{X}/2\pi(\kappa+1)] \ln z + b_1 z + \sum_{n=0}^{\infty} b_{-n} z^{-n}. \end{aligned} \quad (32)$$

Funcțiile $\Phi(z)$, $\Psi(z)$ sînt deci olomorfe, cu excepția punctului de la infinit, unde pot avea eventual poli de ordin zero.

Din cele de mai sus rezultă acum că avem

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} S_0 = \operatorname{Re} a_1, \quad \lim_{|z| \rightarrow \infty} S = 2b_1. \quad (33)$$

Notînd

$$a_1 = a'_1 + ia''_1, \quad b_1 = b'_1 + ib''_1, \quad (34)$$

obținem din (33)

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^\infty &= 2a'_1 - b'_1, & \sigma_{22}^\infty &= 2a'_1 + b'_1, & \sigma_{12}^\infty &= b''_1, \\ a'_1 &= \frac{1}{4}(\sigma_{11}^\infty + \sigma_{22}^\infty), & b'_1 &= \frac{1}{2}(\sigma_{22}^\infty - \sigma_{11}^\infty), & b''_1 &= \sigma_{12}^\infty. \end{aligned} \quad (35)$$

După cum se vede, mărimea $\text{Im } a_1 = a''_1$ nu intervine în aceste relații. În cazul problemei lui Neumann putem lua (vezi §9, pag. 403—404)

$$a_0 = b_0 = \text{Im } a_1 = 0, \quad (36)$$

astfel că seriile din (32) reprezintă funcții olomorfe *inclusiv* în punctul de la infinit. În cazul problemei lui Dirichlet, putem lua

$$a_0 = 0, \quad \text{sau} \quad b_0 = 0, \quad (37)$$

și una din cele două serii are un pol de ordin zero la infinit. (Vezi § A.5, pag. 716).

Mai departe, introducînd expresiile (32) în formula (2), căpătăm :

$$\begin{aligned} 2\mu U &= -[\kappa X/2\pi(\kappa+1)] \ln(\zeta\bar{\zeta}) + (\kappa a_1 - \bar{a}_1)\zeta - \bar{b}_1\bar{\zeta} + \\ &+ [\bar{X}/2\pi(\kappa+1)](\zeta/\bar{\zeta}) + \sum_{n=0}^{\infty} (\kappa a_{-n}\zeta^{-n} - n\bar{a}_{-n}\zeta\bar{\zeta}^{-n-1} - \bar{b}_{-n}\bar{\zeta}^{-n}), \end{aligned} \quad (38)$$

care rămîne mărginită la infinit dacă și numai dacă

$$X = a_1 = b_1 = 0, \quad (39)$$

așadar dacă atît rezultanta sarcinii pe \mathcal{L} , cît și tensiunile la infinit, sînt nule. În cazul problemei lui Neumann, deplasările la infinit rezultă atunci chiar nule.

Din formulele (6.22) și (38) obținem acum valoarea rotației

$$\begin{aligned} \omega_{12} &= -\text{Im } U_{,i} = \frac{1}{2\mu} \text{Im} \left[\frac{\kappa X}{2\pi(\kappa+1)} \frac{1}{\zeta} - (\kappa a_1 - \bar{a}_1) - \right. \\ &\left. - \frac{\bar{X}}{2\pi(\kappa+1)} \frac{1}{\bar{\zeta}} + \sum_{n=1}^{\infty} (\kappa n a_{-n} \zeta^{-n-1} + n \bar{a}_{-n} \zeta \bar{\zeta}^{-n-1} - n \bar{b}_{-n} \bar{\zeta}^{-n-1}) \right], \end{aligned} \quad (40)$$

de unde

$$\lim \omega_{12} = -[(\kappa+1)/2\mu] a''_1 \quad \text{pentru } |\zeta| \rightarrow \infty, \quad (41)$$

astfel că a treia relație (36) echivalează cu presupunerea că rotația la infinit este nulă.

Ținând seama de (36) și (39) în expresiile (32), obținem deci

$$\varphi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{-n}, \quad \psi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^{-n}, \quad (42)$$

ceea ce arată că înseși funcțiile φ și ψ sînt *olomorfe la infinit*.

Condiția $X = 0$, esențială în raționamentele ce au condus la (42), are un caracter paradoxal. Într-adevăr, din (38) se vede că dacă $X \neq 0$ (ceea ce, pentru un corp infinit, nu este incompatibil cu starea de echilibru), deplasarea la infinit este infinită, oricît de mic ar fi $|X|$. Asupra acestui paradox vom reveni în § 7.10.

Este ușor de înțeles intuitiv de ce componente *finite* ale tensiunii la infinit corespund unor deplasări *infinite* — așadar lipsite de sens mecanic.

În practică, componente ne-nule ale tensiunii „la infinit” permit totuși să se descrie o stare de tensiune existentă într-un corp de mari dimensiuni, la distanțe mari de zona al cărei studiu ne interesează (de ex., concentrări de tensiuni în jurul unor orificii într-un corp solicitat pe frontieră, la mare distanță de aceste orificii). Calculul deplasărilor „la infinit” e lipsit de sens. Dimpotrivă, calculul tensiunilor (singurul care prezintă interes din punctul de vedere al criteriilor de rezistență) este întotdeauna permis.

În cazul particular al domeniului nemărginit dublu conex \mathcal{D}_1^- , putem lua $z_1 = 0$, și atunci formulele (22) se scriu

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= -[X/2\pi(\kappa + 1)] \ln z + \varphi_0(z), \\ \psi(z) &= [\kappa \bar{X}/2\pi(\kappa + 1)] \ln z + \psi_0(z), \end{aligned} \quad (43)$$

unde funcțiile φ_0 , ψ_0 sînt olomorfe în orice porțiune mărginită a planului, exterioară curbei \mathcal{L}_1 . Dar aceste formule au același aspect cu (32), valabile în exteriorul cercului \mathcal{L}_R . Prin urmare, ele sînt valabile în întreg domeniul \mathcal{D}_1^- , funcțiile φ_0 , ψ_0 fiind olomorfe atît în interiorul, cît și în exteriorul cercului \mathcal{L}_R (eventual exceptînd punctul de la infinit).

d) Sarcini concentrate

Luînd $\varphi_0 = \psi_0 = 0$ în (43), obținem

$$\varphi(z) = -[X/2\pi(\kappa + 1)] \ln z, \quad \psi(z) = [\kappa \bar{X}/2\pi(\kappa + 1)] \ln z. \quad (44)$$

Aceste funcții descriu deci starea planului acționat în origine de forța concentrată X . (Vezi și (8.19).) Amintim tot astfel că funcțiile din (8.17) :

$$\varphi(z) = 0, \quad \psi(z) = (iM_3/2\pi) z^{-1} \quad (45)$$

descriu starea planului acționat în origine de momentul concentrat M_3 .

Pentru o sarcină concentrată ce acționează în punctul z^0 , formulele de mai sus rămîn valabile dacă aducem originea în z^0 . Revenind la axele

inițiale cu ajutorul formulelor (9.15), obținem pentru forța concentrată X aplicată în z^0 :

$$\begin{aligned}\varphi(z) &= -[X/2\pi(\kappa + 1)] \ln(z - z^0), \\ \psi(z) &= [\kappa \bar{X}/2\pi(\kappa + 1)] \ln(z - z^0) + [X/2\pi(\kappa + 1)] \bar{z}^0 (z - z^0)^{-1},\end{aligned}\quad (46)$$

respectiv pentru momentul concentrat M_3 aplicat în z^0 :

$$\varphi(z) = 0, \quad \psi(z) = (iM_3/2\pi)(z - z^0)^{-1}. \quad (47)$$

Introducând (46) și (47) în (2), căpătăm

$$2\mu U = -\frac{\kappa X}{2\pi(\kappa + 1)} \ln[(z - z^0)(\bar{z} - \bar{z}^0)] + \frac{\bar{X}}{2\pi(\kappa + 1)} \frac{z - z^0}{\bar{z} - \bar{z}^0}, \quad (48)$$

respectiv

$$2\mu U = (iM_3/2\pi)(\bar{z} - \bar{z}^0)^{-1}. \quad (49)$$

Ca și mai sus, remarcăm caracterul paradoxal al soluției (44) (sau (46)).

Considerând că în fiecare punct $z^0 \in \mathcal{D}$ este aplicată o forță $X dD_0$, putem construi prin suprapunere, (așadar prin integrarea relațiilor (46)), funcțiile lui Kolosov și Muskhelișvili corespunzătoare acțiunii unor *forțe de volum* de componente $X_k(x_1^0, x_2^0)$ ($k = 1, 2$). Soluțiile astfel obținute dau valori corecte pentru tensiuni — dar nu și pentru deplasări. În felul acesta, dispunem efectiv în cazul plan de aceea soluție particulară a ecuațiilor lui Lamé neomogene, a cărei cunoaștere permite reducerea problemei la studiul cazului $F = 0$. (Vezi și §§ 4.10, 7.9 și 7.10.)

§ 11. PROBLEMELE LA LIMITĂ FUNDAMENTALE ALE ELASTICITĂȚII PLANE

Problemele fundamentale ale elasticității plane se reduc la determinarea funcțiilor $\varphi(z)$ și $\psi(z)$ din anumite condiții la limită, care se obțin transcriind valorile pe frontieră ale deplasărilor, respectiv ale tensiunilor, prin intermediul formulelor (7.12) și (7.19) (compară cu § 5.11).

Amintim (vezi § 4.2, *d*, și finele § 4.10) că se caută numai soluții pentru care expresiile (7.12), (7.19) sînt prelungibile pe \mathcal{L} — cel mult cu discontinuități de prima speță pentru datele în tensiuni. O condiție *suficientă* pentru aceasta este ca funcțiile $\varphi(z)$, $\varphi'(z)$, $\psi(z)$ — despre care am presupus deocamdată că sînt analitice în \mathcal{D} — să fie și continue în $\mathcal{D} + \mathcal{L}$. Aceste soluții se vor numi *soluții regulate*.

Ne rămîne să transcriem în mod corespunzător condițiile la limită (4.6), (4.7) și (4.9). Funcțiile *date* pe frontiera \mathcal{L} pot fi privite ca funcții de afixul $t = z|_{\mathcal{L}}$, sau ca funcții de abscisa curbilinie s . Vom păstra *aceleași simboluri* pentru funcțiile ce apar în datele la limită, fie că le vom scrie ca funcții de z , \bar{z} pe \mathcal{L} , ca funcții de t , sau ca funcții de s .

a) Problema lui Dirichlet

Întrucît pe \mathcal{L} se dau deplasările, așadar o funcție $g(t) = g_1(t) + ig_2(t)$, funcțiile lui Kolosov și Mushelișvili trebuie determinate din condiția la limită ce decurge din (7.12):

$$\kappa\varphi(t) - t\overline{\varphi'(t)} - \overline{\psi(t)} = 2\mu g(t). \quad (1)$$

Întrucît primul membru din (1) este valoarea la limită a unei funcții analitice și uniforme în \mathcal{D} și continue în $\mathcal{D} + \mathcal{L}$, rezultă că și funcțiile $g(t)$ (sau $g(s)$) trebuie să fie continue și uniforme pe \mathcal{L} .

Faptul că dispunem de o singură condiție pentru determinarea a două funcții nu împiedică rezolvarea problemei (vezi § A.9, pag. 757). Împrejurarea că intervin ambele variabile z , \bar{z} va juca din acest punct de vedere un rol esențial.

Putem dispune aici de o singură constantă complexă; dacă originea este situată în \mathcal{D} , putem deci lua arbitrar de exemplu $\varphi(0)=0$, sau $\psi(0)=0$.

Dacă \mathcal{D} e simplu conex, avem $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0$, și problema se reduce la determinarea a două funcții *olomorfe* din condiția (1). Dacă \mathcal{D} este mărginit și multiplu conex, funcțiile din (1) au forma (10.22). După calcule simple, obținem

$$\kappa\varphi_0(t) - t\overline{\varphi'_0(t)} - \overline{\psi_0(t)} = 2\mu g_0(t), \quad (2)$$

unde am notat

$$\begin{aligned} 2\mu g_0(t) = & 2\mu g(t) + [\kappa/2\pi(\kappa+1)] \sum_{j=1}^m X^{(j)} \ln |t - z_j|^2 - \\ & - [1/2\pi(\kappa+1)] \sum_{j=1}^m \overline{X^{(j)}} [t/(\bar{t} - \bar{z}_j)]. \end{aligned} \quad (3)$$

Întrucît avem $z_j \in \mathcal{D}_j^+$, funcția $g_0(t)$ este de asemenea uniformă și continuă pe fiecare din componentele frontierei. Problema se reduce deci din nou la determinarea unor funcții *olomorfe* φ_0 , ψ_0 din condiția (2), analogă cu (1).

Membrul al doilea din (2) depinde de constantele complexe $X^{(j)}$, necunoscute, dar nu arbitrare. Soluția poate fi căutată în funcție de $X^{(j)}$ ca parametri, aceștia fiind determinați ulterior în chiar cursul rezolvării problemei. (Vezi pag. 445, Observația 3). Aceasta este deci analogă problemei lui Dirichlet generalizate (pentru ecuația lui Laplace) din § 5.11, pag. 215.

Cazul domeniului nemărginit se tratează asemănător.

b) Problema lui Neumann

Întrucît acum se dau pe \mathcal{L} valorile vectorului tensiune complex, așa-
dar o funcție $f(t) = f_1(t) + if_2(t)$ (sau — în aceleași notații — o funcție de ab-
scisa s), funcțiile lui Kolosov și Mushelişvili trebuie determinate din condi-
ția ce decurge din (7.19)

$$-i[\varphi(t) + t\overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)}]_{,n} = f(s). \quad (4)$$

(Amintim că în (4), axele n, s sînt orientate la fel ca axele x_1, x_2 .)

Fie deocamdată că domeniul \mathcal{D} este mărginit și simplu conex. Inte-
grînd în (4) în raport cu abscisa curbilinie s , căpătăm evident :

$$\varphi(t) + t\overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)} = i \int_0^s f(s) ds + C_0 \quad \text{pe } \mathcal{L}_0, \quad (5)$$

unde C_0 este o constantă complexă necunoscută, dar nu arbitrară.

Folosind notația (8.1), vom scrie pe viitor

$$h(t) \equiv h(s) = i \int_0^s f(s) ds = iR(s). \quad (6)$$

Ca și în problema lui Dirichlet, $h(s)$ rezultă a fi continuă pe \mathcal{L} pentru
orice funcție integrabilă $f(s)$ — chiar dacă aceasta posedă discontinuități
de prima speță.

Funcțiile $\varphi(\beta), \psi(\beta)$ sînt în acest caz determinate, abstracție făcînd
de termeni de forma (9.4). Prin urmare, primul membru din (5) e dat
abstracție făcînd de o constantă $\gamma + \gamma'$. Dacă determinăm pe deplin
funcțiile căutate, fixînd deci valorile constantelor γ, γ', C , atunci constanta
 C_0 din (5) rezultă determinată. Dacă, dimpotrivă, fixăm pe C_0 (de ex.
 $C_0 = 0$), atunci numai una dintre constantele γ, γ' mai poate fi aleasă
arbitrar.

Să presupunem acum că domeniul \mathcal{D} este mărginit și multiplu conex.
În acest caz, condiția (5) rămîne valabilă pe componenta \mathcal{L}_0 a frontierei.
Pe componentele interioare \mathcal{L}_j , însă, membrul al doilea al condiției la
limită își schimbă semnul, întrucît normala externă la \mathcal{D} și tangenta s
formează un sistem de axe orientat invers sistemului Ox_1x_2 . Prin integrare,
căpătăm deci

$$\varphi(t) + t\overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)} = h^{(j)}(t) + C_j, \quad t \in \mathcal{L}_j, \quad (7)$$

unde

$$h^{(j)}(t) \equiv h^{(j)}(s) = \begin{cases} i \int_0^s f(s) ds, & t \in \mathcal{L}_0, \\ -i \int_0^s f(s) ds, & t \in \mathcal{L}_j, \quad j = 1, 2, \dots, m. \end{cases} \quad (8)$$

După cum se vede, notăm — dacă e cazul să distingem — cu indicele superior „ j ” datele de pe componenta \mathcal{L}_j , și folosim — printr-un abuz ce nu riscă să producă nici un fel de confuzie — aceeași notație h atât pentru funcția de punctul $t \in \mathcal{L}$, cât și pentru funcția de abscisa s corespunzătoare acestui punct. În (8), toate componentele frontierei sînt parcurse în sensul trigonometric. Dacă dorim să conservăm definiția din (6), trebuie ca pe componentele interioare \mathcal{L}_j să adoptăm sensul retrograd.

Chestiunea determinării constantelor complexe C_j — necunoscute, dar nu arbitrare — este similară celei a determinării constantelor $X^{(j)}$ în problema lui Dirichlet.

Ca și în cazul domeniului simplu conex, una din constantele C_j poate fi aleasă arbitrar (de ex. $C_0 = 0$), astfel că numai una dintre constantele γ , γ' mai rămîne la dispoziția noastră. În genere, este totuși preferabil să dispunem liber de constantele γ , γ' , C — constantele C_j (în fond ne-necesare) putînd fi determinate în cursul rezolvării problemei.

Funcția definită în (8) e în general *multiformă*. Într-adevăr, din (10.16), (6) și (8) obținem (sensul de integrare fiind cel trigonometric)

$$[h]_{\mathcal{L}_0} = i \oint_{\mathcal{L}_0} f(s) ds = iX^{(0)}, \quad [h]_{\mathcal{L}_j} = -i \oint_{\mathcal{L}_j} f(s) ds = -iX^{(j)}. \quad (9)$$

Ca și în problema lui Dirichlet, condiția (5) conține funcții necunoscute olomorfe, în timp ce în (7) apar funcții necunoscute multiforme. Dar introducînd expresiile (10.22) în (7), obținem

$$\varphi_0(t) + t \overline{\varphi'_0(t)} + \overline{\psi_0(t)} = h_0(t) + C_j, \quad t \in \mathcal{L}_j, \quad (10)$$

unde am notat

$$\begin{aligned} h_0(t) = h(t) + [1/2\pi(\kappa + 1)] \sum_{j=1}^m X^{(j)} [\ln(t - \delta_j) - \kappa \ln(\bar{t} - \bar{\delta}_j)] + \\ + [1/2\pi(\kappa + 1)] \sum_{j=1}^m \overline{X^{(j)}} [t/(\bar{t} - \bar{\delta}_j)]. \end{aligned} \quad (11)$$

(Indicele de numerotare pentru funcțiile $h(t)$ și $h_0(t)$ a fost aci omis.)

Funcțiile din membrul al doilea din (11) sînt continue, iar $h_0(t)$ rezultă a fi uniformă: într-adevăr, după o parcurgere a conturului \mathcal{L}_j în sens trigonometric (pentru $j \geq 1$, lăsînd domeniul \mathcal{D} în dreapta), termenii în $X^{(j)}$ capătă creșteri egale cu

$$[X^{(j)}/2\pi(\kappa + 1)] [2\pi i - \kappa(-2\pi i)] = iX^{(j)} = -[h(t)]_{\mathcal{L}_j}. \quad (12)$$

Spre deosebire de cazul problemei lui Dirichlet, din datele problemei se pot calcula acum rezultantele $X^{(j)}$. Funcția $h(t)$ trebuie să posede desigur și proprietăți care să asigure echilibrul domeniului \mathcal{D} , așadar decurgînd

din condiția ca sistemul forțelor exterioare să fie echivalent cu zero. Din (10.17) și (9) rezultă mai întâi condiția

$$[h(t)]_{\mathcal{L}_0} - \sum_{j=1}^m [h(t)]_{\mathcal{L}_j} = 0, \quad (13)$$

unde toate componentele frontierei sînt parcurse în sens direct.

Pentru momentul resultant, deducem din (10.17) și (8.2) condiția

$$\mathcal{M}_3 = \mathcal{M}_3 \Big|_{\mathcal{L}_0} - \sum_{j=1}^m \mathcal{M}_3 \Big|_{\mathcal{L}_j} = \operatorname{Re} \oint_{\mathcal{L}} i t(s) \overline{f(s)} ds = 0. \quad (14)$$

Dar, întrucît din (8) urmează

$$dh(s) = \begin{cases} i f(s) ds & \text{pe } \mathcal{L}_0, \\ -i f(s) ds & \text{pe } \mathcal{L}_j, \quad j = 1, 2, \dots, m, \end{cases} \quad (15)$$

deducem că (14) ia forma

$$\mathcal{M}_3 = -\operatorname{Re} \oint_{\mathcal{L}} t(s) d\overline{h(s)} = 0, \quad (16)$$

unde — spre deosebire de (14) — componentele interioare ale frontierei sînt parcurse tot în sens direct.

Funcția $h(s)$ fiind cunoscută pe \mathcal{L} , cantitățile ce intervin în (13) și (16) se calculează ușor.

Integrînd prin părți în (16), obținem și

$$\mathcal{M}_3 = -\operatorname{Re} \left\{ [t \overline{h(t)}]_{\mathcal{L}} - \oint_{\mathcal{L}} \overline{h(t)} dt \right\} = 0. \quad (17)$$

Dacă $h(s)$ este uniformă pe fiecare din componentele frontierei (așadar dacă $X^{(j)} = 0$), primul termen din (17) se anulează pe fiecare \mathcal{L}_j , și ne rămîne

$$\mathcal{M}_3 = \operatorname{Re} \oint_{\mathcal{L}} \overline{h(t)} dt = 0. \quad (18)$$

În particular, formula este valabilă pentru \mathcal{D} simplu conex și mărginit.

c) Problema mixtă

Condiția la limită se obține scriind condițiile (1), respectiv (7), fiecare pe porțiunile corespunzătoare ale frontierei. Dificultățile în rezolvarea ei sînt considerabil mai mari.

d) Exemplu

Reproducem aci un exemplu elementar, util în cele ce urmează: soluția problemei lui Neumann pentru corpul solicitat pe frontieră de o presiune hidrostatică $-p$. Din (3.4.13) avem $\sigma_{ni} = -p n_i$. Ținând seama de (A.3.12) și (A.4.22), căpătăm

$$f(s) = \sigma_{n1} + i\sigma_{n2} = -p [x'_2(s) - ix'_1(s)] = ip l'(s). \quad (19)$$

Păstrind pe toate componentele frontierei sensul ce lasă în stînga interiorul domeniului, deducem deci din (6) sau (8):

$$h(s) = -p l(s). \quad (20)$$

Alegînd

$$\varphi(\zeta) = -\frac{1}{2} p \zeta, \quad \psi(\zeta) = 0, \quad (21)$$

rezultă că (7) este satisfăcută pe oricare componentă a frontierei (cu $C_j = 0$).

e) Concluzii

Cele de mai sus pun în evidență unul din meritele principale ale acestei metode: condițiile la limită (1) și (7) sînt de același tip, așadar *problema lui Dirichlet și cea a lui Neumann se reduc la una și aceeași problemă la limită a teoriei funcțiilor de o variabilă complexă*.

Chestiunea condițiilor de existență a soluției acestei probleme depășește cadrul cărții de față. (Anumite cazuri particulare vor fi examinate în §§ 14 și 21.) Indicăm numai că ea se reduce în ultimă instanță la studiul unor ecuații Fredholm. Pentru rezultatele fundamentale în acest sens, vezi N. Mushelișvili [5], §§ 96—103. Vezi de asemenea mai jos indicațiile din §§ 20 și 23—25. În cele ce urmează, vom presupune întotdeauna că existența și regularitatea soluției sînt asigurate.

În ce privește *natura* soluției, să remarcăm că, *dacă* ecuațiile omogene au soluție de clasă convenabilă, atunci reprezentarea (10.1)—(10.2) este obligatorie, și componentele stării elastice sînt *funcții analitice* de x_1, x_2 . Metoda lui Kolosov și Mushelișvili asigură deci numai găsirea soluțiilor *analitice și regulate*; iar astfel de soluții există, dacă există soluția (analitică și regulată) a problemelor (1) sau (7).

Chestiunea existenței soluțiilor conduce la a ne întreba: ce proprietăți trebuie să posede frontiera \mathcal{L} și funcțiile $g(s)$ sau $f(s)$, pentru ca problema (1) sau (7) să admită soluție (subînțeles: analitică și regulată)? În absența acestor proprietăți, reprezentarea (10.1)—(10.2) nu are sens, și componentele stării elastice pot să nu fie analitice. (Desigur, dacă condițiile suficiente de existență ale soluțiilor problemelor (1) sau (7) nu sînt satisfăcute, aceasta nu înseamnă că ecuațiile elasticității plane nu au soluție, ci, cel mult, că ele nu au soluție *analitică*.)

Pentru găsirea acestor soluții pentru domenii cu curbe frontieră, sau cu date la limită insuficient de regulate, vezi bibliografia indicată de D. Șerman [8]; I. Vekua și N. Mushelișvili [1]. Menționăm aici rezultatele lui S. Belonosov [2] (cap. 2 și 4) și [3], și ale lui L. Magnaradze (citate în bibliografie la N. Mushelișvili [5]).

Importanța practică a soluțiilor ne-analitice pare totuși mai mică decât dificultățile matematice ce stau în calea obținerii lor. În practică, iregularitățile curbelor-frontieră sau ale datelor la limită pot fi adesea privite drept cazuri-limită de variație rapidă, dar totuși regulată, a datelor geometrice sau mecanice; soluțiile pot fi căpătate atunci ca soluții aproximative sau cazuri-limită din soluțiile analitice ale problemei convenabil regularizate. (Vezi de ex. § 16, exemplul **b**).

Pentru o manieră mai abstractă de a formula aceleași probleme la limită (1) sau (7), vezi C. Mathurin [1], [2].

Pentru un procedeu variațional de abordare a lor, vezi J. Radok [3].

Problemele (1) sau (7) constituie formularea matematică a unor probleme de echilibru în corpuri de tipul celor examinate în capitolul 5: în primul rând, cilindri suficient de lungi. Dar spre deosebire de condiția (5.11.1), cu caracter în esență *geometric* (întrucât datele mecanice intervin numai ca parametri), condițiile (1), (7) determină funcțiile lui Kolosov și Mushelișvili din datele atât *geometrice*, cât și *mechanice* pe suprafața laterală a cilindrului considerat.

În problema plană, repartiția reală de forțe nu poate fi înlocuită cu una mai simplă, oarecum echivalentă ei, — pentru că forțele acționează *pe conturul* secțiunii, de dimensiuni liniare comparabile între ele ca ordin de mărime. De aci și obligația de a ține seama de repartiția reală, bidimensională, a datelor mecanice, odată cu forma reală a secțiunii. Asemenea probleme nu pot fi abordate nici măcar aproximativ cu mijloacele rezistenței materialelor.

Simplificările importante la care conduce principiul lui Saint-Venant nu își au echivalentul nemijlocit în problema plană. Într-adevăr, a modifica sarcina chiar pe o porțiune mică a frontierei \mathcal{L} , revine în fapt la a o modifica în lungul întregului cilindru. În aceste condiții, însăși ideea care stă la baza principiului este în defect. (Compară cu §§ 7.1 și 7.10).

Există lucrări recente care analizează anumite soluții ale problemei plane din punctul de vedere al justificării principiului lui Saint-Venant (vezi de ex. S. Belonosov [2], cap. 4), și dau exemple atât în favoarea, cât și în defavoarea posibilității de a-l aplica. Vezi încă și J. Knowles [1].

§ 12. FORMULAREA PROBLEMELOR FUNDAMENTALE ALE TEORIEI ÎNCOVOIERII PLĂCILOR SUBȚIRI

Întreg aparatul teoretic al problemei plane poate fi adaptat la studiul încovoierii plăcilor. Problema a fost cercetată (cu utilizare predominantă de mărimi reale într-o primă fază a raționamentelor) de către G. Savin [1], § 6.1, și (folosindu-se sistematic reprezentarea în complex, și pentru o gamă mai largă de condiții la limită) de A. Green și W. Zerna [1],

capitolul 7. Pentru ecuațiile de ordin superior ale teoriei încovoierii, V. Manea [3], [7] a dat o analiză similară, care conduce — desigur — la condiții la limită mai puțin simple.

Vom examina aci formularea problemelor fundamentale ale teoriei încovoierii, la început pentru ecuațiile de ordin superior, apoi (pentru rațiuni de simplitate și paralelism cu teoria stării plane) pentru ecuațiile clasice. Ne vom limita la cazul ecuațiilor omogene.

a) Reprezentarea soluției prin două funcții complexe și o funcție reală

Pentru a simplifica notațiile, vom scrie

$$W = u'_1 + iu'_2, \quad w = \bar{w}, \quad \Xi = \theta', \quad (1)$$

unde, amintim, \bar{w} era în § 3 *media* pe grosime a deplasării normale. Dimpotrivă, în tot paragraful de față bara dispusă deasupra unei litere va indica *mărimea complex conjugată*.

Cu ajutorul unei tehnici de repetate ori folosite, ecuațiile (3.73) omogene se scriu sub forma complexă

$$\frac{1}{3} h^2 [\mu \Delta W + (\lambda^* + \mu) 2 \Xi_{,i}] - \mu (W + 2w_{,i}) = 0, \quad (2)$$

$$\Delta w + \Xi = 0, \quad (3)$$

iar ecuațiile (3.80), (3.81) devin

$$\Delta \Xi = 0, \quad (4)$$

$$\Delta \Delta w = 0. \quad (5)$$

În conformitate cu teorema lui Goursat (vezi (7.23)), deducem

$$w(x_1, x_2) = \frac{1}{2} [\bar{z} \overline{\varphi(z)} + \bar{z} \varphi(z) + \chi(z) + \overline{\chi(z)}], \quad (6)$$

unde $\varphi(z)$, $\chi(z)$ sînt funcții analitice de o variabilă complexă z în planul median \mathcal{D} al plăcii. Ținînd seama de (6) în (3), deducem

$$\Xi = -2(\varphi' + \overline{\varphi'}); \quad (7)$$

după calculele elementare, ecuația (2) devine (notînd $\chi' = \psi$):

$$\frac{4}{3} h^2 W_{,ii} - W = \frac{4}{3} h^2 [(1 + \nu)/(1 - \nu)] \overline{\varphi''} + \varphi + \bar{z} \overline{\varphi'} + \overline{\psi}. \quad (8)$$

Vom căuta soluția acestei ecuații sub forma

$$W = W_0 - \varphi - \bar{z} \overline{\varphi'} - \overline{\psi}, \quad (9)$$

ceea ce conduce pentru W_0 la ecuația

$$\frac{4}{3} h^2 W_{0,33} - W_0 = \frac{8}{3} h^2 (1 - \nu)^{-1} \bar{\varphi}'' . \quad (10)$$

În fine, soluția acestei ultime ecuații va fi căutată sub forma

$$W_0 = V + \bar{a}(\zeta) , \quad (11)$$

ceea ce conduce imediat la concluzia că

$$a(\zeta) = -\frac{8}{3} h^2 (1 - \nu)^{-1} \varphi''(\zeta) , \quad (12)$$

iar funcția V este soluția ecuației de tip Helmholtz

$$\frac{4}{3} h^2 V_{,33} - V = 0 . \quad (13)$$

Prin urmare, ecuațiile (2), (3) admit o soluție de forma

$$W = V - \varphi - \zeta \bar{\varphi}' - \bar{\psi} - \frac{8}{3} h^2 (1 - \nu)^{-1} \bar{\varphi}'' , \quad w = \frac{1}{2} (\zeta \bar{\varphi} + \bar{\zeta} \varphi + \chi + \bar{\chi}) , \quad (14)$$

așadar o reprezentare prin intermediul a două funcții analitice de o variabilă complexă, și al unei funcții reale, soluție a ecuației (13). Întrucât h este mic, ecuația (13) arată că în general derivatele acestei din urmă funcții *nu sînt neglijabile* în raport cu însăși funcția.

Să trecem acum la transcrierea momentelor și forțelor tăietoare din (3.72) (problema omogenă) prin intermediul mărimilor W, w . În acest scop, prin analogie cu formulele (6.17) și (5.4.5), să introducem cantitățile complexe

$$N_0 = N_{11} + N_{22}, \quad N = N_{22} - N_{11} + 2i N_{12}, \quad S_3 = S_{31} + i S_{32} . \quad (15)$$

Făcînd uz aci de formulele (3.72), (1) și (A.4.13), obținem mai întîi

$$N_0 = \frac{4}{3} h^3 (\lambda^* + \mu) \Xi ,$$

$$N = \frac{2}{3} h^3 [2\mu (u'_{2,2} - u'_{1,1}) + 2i\mu (u'_{1,2} + u'_{2,1})] = -\frac{8}{3} h^3 \mu \bar{W}_{,3} , \quad (16)$$

$$S_3 = 2h\mu(W + 2w_{,3}) ,$$

și mai departe, introducând aci expresiile (14):

$$\begin{aligned} N_0 &= -\frac{8}{3} h^3 (\lambda^* + \mu) (\varphi' + \bar{\varphi}'), \\ N &= \frac{8}{3} h^3 \mu \left[\frac{1}{3} \varphi'' + \psi' + \frac{8}{3} h^2 (1 - \nu)^{-1} \varphi''' - V_{,3} \right], \\ S_3 &= 2h \mu \left[V - \frac{8}{3} h^2 (1 - \nu)^{-1} \bar{\varphi}'' \right]. \end{aligned} \quad (17)$$

Amintind valoarea rigidității la încovoiere din (3.78)

$$D = \frac{2}{3} h^3 (\lambda^* + 2\mu) = \frac{2}{3} h^3 E/(1 - \nu^2) = \frac{4}{3} h^3 \mu (1 - \nu), \quad (18)$$

și ținând seama de relațiile evidente

$$\begin{aligned} \frac{8}{3} h^3 (\lambda^* + \mu) &= \frac{8}{3} h^3 \mu [(1 + \nu)/(1 - \nu)] = 2D(1 + \nu), \\ \frac{8}{3} h^3 \mu &= 2D(1 - \nu), \quad \frac{16}{3} h^3 \mu/(1 - \nu) = 4D, \end{aligned} \quad (19)$$

vom transcrie (17) sub forma definitivă (compară cu (7.8)):

$$\begin{aligned} N_0 &= -2D(1 + \nu) [\varphi' + \bar{\varphi}'], \\ N &= 2D(1 - \nu) \left[\frac{1}{3} \varphi'' + \psi' + \frac{8}{3} h^2 (1 - \nu)^{-1} \varphi''' - V_{,3} \right], \\ S_3 &= -4D \left[\bar{\varphi}'' - \frac{3}{8} (1 - \nu) h^{-2} V \right]. \end{aligned} \quad (20)$$

Cunoașterea valorilor la limită ale deplasării normale w și ale componentelor u'_i — așadar a lui w — permite transcrierea condițiilor de tip Dirichlet din (3.55) sub forma unor condiții la limită pentru φ , ψ și V . Cunoașterea valorilor la limită ale momentului încovoietor, momentului de torsiune, și forței tăietoare, conduce la transcrierea condițiilor de tip Neumann din (3.74) sub forma unor condiții la limită pentru aceleași funcții de mai sus.

b) Varianta clasică: reprezentarea soluției prin două funcții complexe

Ne vom limita în cele ce urmează la cazul particular al teoriei clasice, cînd aceste condiții capătă un aspect analog celor din teoria problemei plane. În acest caz, din (3.87), (1) și (6), avem mai întîi

$$W = -2w_{,3} = -(\varphi + \frac{1}{3} \bar{\varphi}' + \bar{\psi}). \quad (21)$$

Prima formulă (20) — care e independentă de V — rămîne intactă. A doua formulă (20) este înlocuită cu (16), în care se introduce (21) — așa-dar ea se modifică prin dispariția termenilor în φ''' și V . În fine, a treia formulă (20) își pierde sensul, după cum se vede introducînd (21) în a treia formulă (16). Pentru a obține acum forța tăietoare complexă S_3 , putem face uz de (3.91), care devine

$$S_3 = -2D \Delta w_{,\bar{z}}. \quad (22)$$

Ținînd seama și de (6), formulele (20) sînt deci înlocuite prin

$$N_0 = -2D(1 + \nu) (\varphi' + \bar{\varphi}'), \quad N = 2D(1 - \nu) (\bar{z} \varphi'' + \psi'), \quad S_3 = -4D\bar{\varphi}'''. \quad (23)$$

Prin urmare, funcția V dispare cu totul din considerațiile noastre, și componentele stării elastice sînt exprimate prin intermediul celor două funcții de tip Kolosov-Mushelișvili $\varphi(z)$ și $\psi(z)$.

Pentru a transcrie condițiile la limită, trebuie să revenim la datele din (3.93) și (3.95). În acest scop, din (6) și (A.4.26) deducem imediat

$$w_{,s} = \operatorname{Re} [(\bar{\varphi} + \bar{z} \varphi' + \psi) \bar{z}'(s)], \quad (24)$$

$$w_{,n} = \operatorname{Im} [(\bar{\varphi} + \bar{z} \varphi' + \psi) \bar{z}'(s)]. \quad (25)$$

Mai departe, din (3.16) obținem (întrucît $u_i^0 = 0$, și ținînd seama de (1) și (6)) :

$$U = u_1 + iu_2 = -2zw_{,\bar{z}} = -z(\varphi + \bar{z}\bar{\varphi}' + \bar{\psi}), \quad (26)$$

astfel că deplasarea este cunoscută, în aproximația acceptată.

Pentru a scrie condițiile la limită de tip Neumann, vom observa că în cazul unei rotații de axe de un unghi ϑ avem :

$$\bar{z} = [\exp(i\vartheta)] \bar{z}^1; \quad (27)$$

componentele σ_{ik} ale tensiunii ($i, k = 1, 2$) se transformă (chiar dacă nu este vorba de o stare de tensiune plană : amintim că $n_{13} = n_{23} = 0$) conform formulelor ce rezultă din (9.16) și (9.20). Prin înmulțire cu z și integrare în raport cu z , se obțin formulele corespunzătoare pentru momentele N_{ik} , care conduc evident la relațiile

$$N_0^1 = N_0, \quad N^1 = [\exp(2i\vartheta)] N. \quad (28)$$

Forța tăietoare complexă este un vector pentru care deducem din (5.11.14)

$$S_3^1 = [\exp(-i\vartheta)] S_3. \quad (29)$$

Vom examina în cele ce urmează o problemă pe care o vom numi din nou „problema lui Dirichlet” (cu date de tip (3.93)) și o „problemă a lui Neumann” (cu date de tip (3.95)). Pentru alte condiții la limită, vezi mai departe pp. 428—429.

c) Problema lui Dirichlet

Din (24), (25) urmează evident, pe orice curbă \mathcal{C} din $\mathcal{D} + \mathcal{L}$:

$$(\bar{\varphi} + \bar{z} \varphi' + \bar{\psi}) z'(s) = w_{,s} + i w_{,n} \quad (30)$$

Notînd — ca și în (A.3.12) — cu $\hat{\vartheta}$ unghiul format de axele locale (x_1, n) (în sensul de la x_1 la n), putem face uz de formula (A.4.21):

$$z'(s) = i \exp(i\hat{\vartheta}), \quad \exp(i\hat{\vartheta}) = -i z'(s). \quad (31)$$

Introducînd (31) în (30), obținem imediat condiția la limită

$$\varphi(t) + t \overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)} = -i(w_{,n} + i w_{,s}) t'(s), \quad (32)$$

unde membrul al doilea este cunoscut.

d) Problema lui Neumann

A doua condiție (3.95) conține derivata $N_{n,s}$. Este de preferat să integrăm această condiție în raport cu s ; din (3.95) și (3.94) urmează atunci

$$N_{nn} = N_{nn}(s), \quad \int_0^s S_{n3} ds + N_{ns} = \int_0^s N_{n3}(s) ds + C \text{ pe } \mathcal{L}, \quad (33)$$

(C — o constantă reală necunoscută). Aci este evident necesar să trecem mai întîi în fiecare punct de pe \mathcal{L} la axele locale (n, s) , ceea ce se realizează printr-o rotație de un unghi $\hat{\vartheta}$ cunoscut (vezi (31)). Aceasta conduce la a înlocui mărimile din (15) prin

$$N_0^1 = N_{nn} + N_{ss}, \quad N^1 = N_{ss} - N_{nn} + 2i N_{ns}, \quad S_3^1 = S_{n3} + i S_{s3}. \quad (34)$$

Formulele (6.12) dau imediat

$$\begin{aligned} N_{nn} &= \frac{1}{2} N_0^1 - \frac{1}{4} (N^1 + \bar{N}^1), \quad N_{ss} = \frac{1}{2} N_0^1 + \frac{1}{4} (N^1 + \bar{N}^1), \\ N_{ns} &= -\frac{1}{4} i (N^1 - \bar{N}^1). \end{aligned} \quad (35)$$

Tot astfel, din a treia relație (34) avem în axele (n, s)

$$S_{n3} = \operatorname{Re} S_3^1, \quad S_{s3} = \operatorname{Im} S_3^1. \quad (36)$$

Introducînd în prima relație (36) egalitatea (29) și făcînd uz de reprezentarea (23) și de (31), căpătăm pe rînd

$$\begin{aligned} S_{n3} &= \operatorname{Re} [\exp(-i\hat{\vartheta}) S_3] = -4D \operatorname{Re} [\exp(-i\hat{\vartheta}) \overline{\varphi''}] = \\ &= 2i D [\varphi'' z'(s) - \overline{\varphi''} \overline{z'(s)}], \end{aligned} \quad (37)$$

astfel că termenul integral din (33) devine

$$\int_0^s S_{n3} ds = 2iD(\varphi' - \bar{\varphi}'). \quad (38)$$

În ce privește componentele momentului, să înlocuim mai întâi primele două formule (23) în (28), ceea ce dă

$$\begin{aligned} N_0^1 = N_0 &= -2D(1 + \nu)(\varphi' + \bar{\varphi}'), \\ N^1 = \exp(2i\hat{\vartheta}) N &= 2D(1 - \nu) \exp(2i\hat{\vartheta})(\bar{\xi}\varphi'' + \psi'). \end{aligned} \quad (39)$$

Din (35) și (38) obținem acum

$$\begin{aligned} N_{nn} &= -D(1 + \nu)(\varphi' + \bar{\varphi}') - \frac{1}{2}D(1 - \nu) [\exp(2i\hat{\vartheta})(\bar{\xi}\varphi'' + \psi') + \\ &\quad + \exp(-2i\hat{\vartheta})(\bar{\xi}\bar{\varphi}'' + \bar{\psi}')], \end{aligned} \quad (40)$$

$$\begin{aligned} \int_0^s S_{n3} ds + N_{ns} &= 2iD(\varphi' - \bar{\varphi}') - \frac{1}{2}D(1 - \nu) [i \exp(2i\hat{\vartheta})(\bar{\xi}\varphi'' + \psi') - \\ &\quad - i \exp(-2i\hat{\vartheta})(\bar{\xi}\bar{\varphi}'' + \bar{\psi}')]. \end{aligned}$$

Aspectul membrului al doilea din formulele (40) sugerează să le simplificăm, înmulțind-o pe cea de-a doua cu i și adunând-o la cea dintâi. Căpătăm astfel

$$\begin{aligned} N_{nn} + i \left[N_{ns} + \int_0^s S_{n3} ds \right] &= -D[(3 + \nu)\varphi' - (1 - \nu)\bar{\varphi}'] - \\ &\quad - D(1 - \nu) \exp(-2i\hat{\vartheta})(\bar{\xi}\bar{\varphi}'' + \bar{\psi}'). \end{aligned} \quad (41)$$

Ținând încă seama de (31), să înmulțim această egalitate cu $\exp(i\hat{\vartheta}) ds = -i d\bar{\xi}$ și să integrăm în raport cu arcul s . Obținem atunci

$$\begin{aligned} \int_0^s \left[N_{nn} + i \left(N_{ns} + \int_0^s S_{n3} ds \right) \right] \exp(i\hat{\vartheta}) ds &= \\ = iD \left[(3 + \nu) \int \varphi' d\bar{\xi} - (1 - \nu) \int \bar{\varphi}' d\bar{\xi} \right] - iD(1 - \nu) \int (\bar{\xi}\bar{\varphi}'' + \bar{\psi}') d\bar{\xi}, \end{aligned} \quad (42)$$

unde pe orice drum de integrare avem evident

$$\int \bar{\varphi}' d\zeta + (\zeta \bar{\varphi}'' + \bar{\psi}') d\bar{\zeta} = \int d(\zeta \bar{\varphi}' + \bar{\psi}) = \zeta \bar{\varphi}' + \bar{\psi}. \quad (43)$$

Introducînd acum (42) și (43) în condiția la limită (33) scrisă și ea sub forma complexă ce rezultă din raționamentele de mai sus (vezi trecerea de la (40) la (42)), și integrînd pe frontieră, căpătăm

$$\begin{aligned} -i \int_0^s \left[N_{nn}(s) + i \int_0^s N_{n3}(s) ds \right] dt + Ct + \gamma = \\ = iD [(3 + \nu) \varphi - (1 - \nu) (t\bar{\varphi}' + \bar{\psi})]; \end{aligned} \quad (44)$$

notînd (vezi (7.13))

$$\kappa = (3 + \nu)/(1 - \nu), \quad (45)$$

deducem în definitiv condiția la limită sub forma

$$\begin{aligned} \kappa \varphi(t) - t\bar{\varphi}'(t) - \bar{\psi}(t) = - \frac{1}{D(1 - \nu)} \left\{ \int_0^s \left[N_{nn}(s) + \right. \right. \\ \left. \left. + i \int_0^s N_{n3}(s) ds \right] dt + i(Ct + \gamma) \right\}, \end{aligned} \quad (46)$$

unde $dt = dt(s)$, și membrul al doilea este cunoscut, abstracție făcînd de C și γ .

e) Concluzii

Condiția (32) privitoare la deplasări este de același tip cu condiția (11.5) pentru cazul datelor lui Neumann, în timp ce condiția (46) referitoare la tensiuni este de același tip cu condiția (11.1) pentru cazul datelor lui Dirichlet.

Orice soluție a unei probleme plane poate fi deci nemijlocit transpusă în studiul problemei încovoierii, cu unele deosebiri de detaliu legate de apariția constantelor necunoscute și de gradul de arbitrar al funcțiilor lui Kolosov și Mushelișvili. Acest fapt constituie încă unul din avantajele metodei bazate pe utilizarea potențialilor complecși.

Ca și în cazul problemei plane, dificultățile devin considerabile cînd se trece la studiul problemei mixte. Mai mult încă, în teoria încovoierii plăcilor, practica impune condiții la limită de o mare diversitate, și adesea mult mai complicate decît cele ce rezultă din (3.93), (3.95), sau din problema mixtă fundamentală definită prin intermediul lor.

Astfel, de pildă, dacă placa este rezemată pe \mathcal{L} , deplasarea w și momentul N_{nn} trebuie să se anuleze la limită. (A doua condiție arată că marginea plăcii se rotește liber pe reazimul ei.) Dacă placa este încastrată, atunci deplasarea w și derivata ei normală $w_{,n}$ se anulează

la limită. (A doua condiție arată că planul tangent la suprafața mediană își păstrează pe \mathcal{L} poziția sa inițială.) Dacă pe o porțiune din \mathcal{L} marginea este liberă, atunci atât momentul $N_{\alpha\alpha}$ cât și forța tăietoare generalizată $N_{\alpha\beta}$ sînt aici nule (întrucît nu se exercită nici un fel de acțiune mecanică).

Unele din aceste condiții au caracter static, altele au caracter geometric, iar condiția de rezemare are un caracter mixt, de un tip similar celui din a patra problemă fundamentală.

În afară de aceasta, în practică este frecvent cazul plăcilor supuse la condiții diferite pe diferite porțiuni ale frontierei — de exemplu, rezemate pe o parte a acesteia și încastrate în rest, sau încastrate pe o parte și libere în rest etc.

Asupra teoriei încovoierii plăcilor există o extrem de vastă literatură. Printre articolele de analiză de consultat, vezi G. Djanelidze [1]; J. Geckeler [1], capitolul 7; J. Goodier [4], § 7; B. Korenev [2]; Iu. Rabotnov [1]; D. Șerman [8], § 3.3.

Pentru teoria clasică a problemei, precum și pentru numeroase soluții efective, vezi lucrările lui B. Galerkin [2], volumul 2, și S. Timoshenko [1]; vezi de asemenea monografiile lui R. L'Hermite [1], capitolul 8; P. Oghibalov [1]; S. Timoshenko și S. Woinowski-Krieger [1].

Metodele teoriei funcțiilor de o variabilă complexă cîștigă necontenit teren în studiul încovoierii plăcilor. O prezentare modernă a subiectului, în strînsă legătură cu metodele elasticității plane, este dată de A. Green și W. Zerna [1], capitolul 7 (unde sînt considerate și ecuațiile lui Reissner). Plăcile anizotrope sînt studiate de S. Lehnitzki [1]; vezi încă și J. Brilla [1]. Concentrarea tensiunilor în vecinătatea orificiilor în plăci este examinată de G. Savin [1], capitolele 6 și 7.

Printre numeroasele articole dedicate studiului încovoierii plăcilor cu ajutorul acestor metode, menționăm cîteva: L. Deverall [1]; C. Stănescu [2]; V. Perehvatov [1]; V. Pisacane și L. Malvern [1]; A. Winslow [1]. Ultimele trei sînt semnificative pentru utilizarea cu succes a funcțiilor de o variabilă complexă și a reprezentării conforme într-o problemă ca cea a plăcii dreptunghiulare — adesea considerată drept obiect de preferință pentru metoda separării variabilelor în domeniul real.

Pentru aplicațiile teoriei funcțiilor Bessel în unele probleme speciale (vibrații; plăci pe fundație elastică) vezi B. Korenev [3].

Pentru utilizarea metodelor teoriei distribuțiilor, conducînd la rezultate numerice efective, vezi J. Leray [1] și J. C. Leray [1].

Pentru plăcile groase, vezi A. Lurie [4], capitolele 3 și 4 (cu aplicarea unei metode simbolice foarte eficace; la limită, de aci decurge o teorie a stării elastice plane și o teorie a încovoierii plăcilor subțiri; a se revedea de asemenea § 3, pag. 353). Vezi încă V. Manea [6]; M. Mișicu [3].

§ 13. ANALOGIA OPTICĂ ÎN STUDIUL PROBLEMEI PLANE (FOTOELASTICIMETRIA)

Faptul că problema plană și problema încovoierii plăcilor depind de aceeași ecuație sugerează încercarea de a folosi pentru studiul celei dintîi, rezultatele ce se pot obține prin măsurare directă a deplasării normale în cea de-a doua. Acest punct de vedere — propus de K. Wieghardt [1] — nu are însă utilitate practică.

În schimb, problema plană beneficiază de cu totul alt tip de metodă de studiu, care pune în valoare proprietățile optice ale anumitor materiale în stare de tensiune.

Înainte de a prezenta această metodă, mai menționăm *metoda moiré-urilor*, și *metoda lacurilor casante*. Prima (vezi P. Theocaris [1]) este bazată pe modificarea condițiilor de reflectare a luminii pe suprafața lucioasă (de exemplu argintată) a unui model pe care s-a trasat o rețea deasă de linii, care se deformează odată cu modelul. Cea de-a doua (M. Hetenyi [2]) se bazează pe faptul că, odată cu deformarea modelului acoperit cu un strat de lac, acest lac crapă în lungul liniilor izostatice (vezi § 9, pag. 406; § 4.3, pag. 132). Pentru anumite metode electro-analogice, vezi Th. Higgins [6]; A. Medovikov [1]; R. Mc Neal [1].

Vom considera pe scurt *fotoelasticimetria*, o metodă experimentală de determinare a stării de tensiune în modele executate din materiale transparente ce manifestă proprietatea de birefrință artificială (accidentală) sub acțiunea deformației elastice.

a) Birefrința accidentală

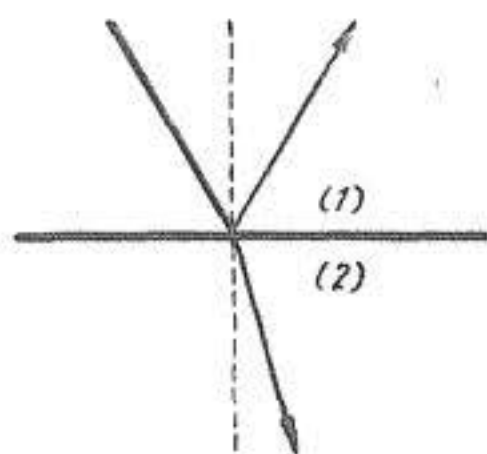
Se știe că o sursă de lumină albă emite unde luminoase transversale, de lungimi de undă diferite, și avînd orientare diferită, haotic dispusă, în spațiu.

Pentru o sursă luminoasă *monocromatică* (emițînd unde cu o lungime de undă determinată), să considerăm vectorul oscilant

$$S = a \sin \omega t, \quad (1)$$

de amplitudine a și de pulsație ω . O oscilație completă se efectuează în $2\pi/\omega$ secunde; produsul dintre această durată și viteza propagării luminii în vid c este lungimea de undă

$$\lambda = 2\pi(c/\omega). \quad (2)$$



6.13.1

Raza de lumină pentru care toți vectorii (1) sînt situați în același plan se numește *plan-polarizată*.

Lumina poate fi polarizată într-un plan, prin reflectare, sau prin refracție printr-un sistem de plăci subțiri de sticlă.

Într-adevăr, într-un asemenea proces, are loc o anumită selectare: raza reflectată „reține” în special oscilațiile perpendiculare pe planul de incidență, în timp ce cea refractată reține oscilații ce se efectuează în chiar acest plan. Repetînd de 8—10 ori același proces, se obține o rază refractată de intensitate egală cu aproximativ o jumătate din cea inițială, și caracterizată de oscilații dispuse în planul de incidență. Sistemul de plăci folosit pentru a realiza această selectare se numește *polarizor*. Un al doilea polarizor paralel cu cel dintîi va lăsa să treacă intactă toată lumina astfel polarizată; dimpotrivă, un polarizor așezat față de cel dintîi în așa fel încît planele de incidență să fie perpendiculare, o va „stinge”.

Există materiale (de ex., cristalele de spat de Islanda) în care orice rază luminoasă se descompune în două raze, ambele plan-polarizate, cu plane de polarizare perpendiculare, și propagându-se cu viteze diferite. Aceste materiale se numesc *birefringente*.

Notînd cu v_j viteza luminii în mediul (j), și cu n_j indicele de refracție absolut (față de vid), legea lui Snellius se scrie

$$\sin \gamma_1 / \sin \gamma_2 = v_1 / v_2. \quad (3)$$

Pe de altă parte avem

$$n_j = c / v_j, \quad (4)$$

și (3) devine

$$\sin \gamma_1 / \sin \gamma_2 = v_1 / v_2 = n_2 / n_1. \quad (5)$$

Descompunerea razei incidente în două raze refractate e deci datorată tocmai existenței a două viteze distincte de propagare.

Direcțiile pentru care aceste viteze sînt egale poartă numele de *axe optice*. O rază ce cade perpendicular pe o față paralelă cu o axă optică va fi descompusă în două raze; după traversarea cristalului, ele vor ajunge în același punct, dar cu viteze diferite; fenomenul de birefrință va face deci posibilă *interferența* celor două raze.

Să considerăm o undă monocromatică și *polarizată*, așadar caracterizată de un vector (1) de direcție p fixă. La intrarea într-un corp birefringent C, acest vector se va descompune după cele două direcții perpendiculare de polarizare din punctul considerat:

$$S_1 = a \sin \omega t \cos \varphi, \quad S_2 = a \sin \omega t \sin \varphi, \quad (6)$$

unde φ este unghiul dintre prima direcție de polarizare, și direcția p .

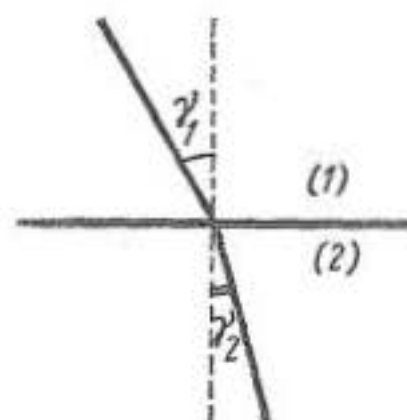


Fig. 6.13.2

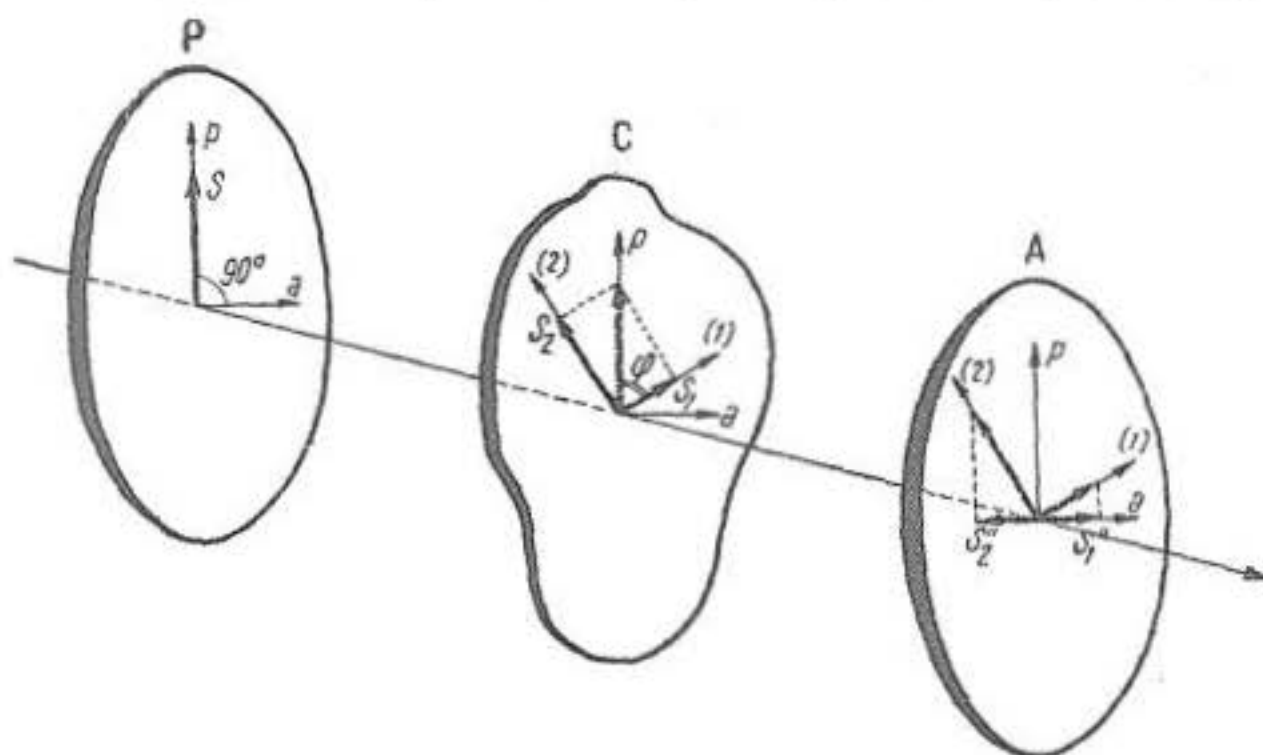


Fig. 6.13.3

Străbătînd corpul de grosime d cu vitezele $v_1 \neq v_2$, între cele două vibrații va apare o diferență de fază $\alpha = \omega \delta t$, unde δt este întîrzierea uneia din vibrații față de cealaltă. Din (4) rezultă

$$\delta t = d/v_1 - d/v_2 = (d/c) (n_1 - n_2),$$

de unde, ținînd seama și de (2), deducem

$$\alpha = \omega \delta t = 2\pi (d/\lambda) (n_1 - n_2). \quad (7)$$

La ieșirea din corpul birefringent, vom obține deci două vibrații

$$S'_1 = a \sin \omega t \cos \varphi, \quad S'_2 = a \sin (\omega t - \alpha) \sin \varphi. \quad (8)$$

Să filtrăm aceste raze luminoase printr-un al doilea polarizor A, cu axele perpendiculare față de cel dintîi. Acesta nu va lăsa să treacă decît acele componente din (8) care corespund propriei sale direcții de polarizare, definită de unghiul $\pi/2 - \varphi$; pentru aceasta, el se va numi *analizor*. Din (8) căpătăm acum

$$S''_1 = a \sin \omega t \cos \varphi \sin \varphi, \quad S''_2 = a \sin (\omega t - \alpha) \sin \varphi \cos \varphi, \quad (9)$$

de unde prin suprapunere

$$S_a = a \sin 2\varphi \sin \left(\frac{1}{2} \alpha \right) \cos \left(\omega t - \frac{1}{2} \alpha \right). \quad (10)$$

Amplitudinea $A = a \sin 2\varphi \sin (\alpha/2)$ a vibrației luminoase la ieșirea din analizor se anulează deci numai în două cazuri:

- 1° pentru $\varphi = k\pi/2$, k întreg;
- 2° pentru $\alpha = 2h\pi$, h întreg.

Prin urmare, din suprapunerea celor două raze refractate se obține *extincție* completă (întuneric) în punctele în care:

- 1° direcțiile polarizorilor coincid cu direcțiile de polarizare din cristal;
- 2° diferența de fază dintre cele două raze refractate este un multiplu de 2π .

b) Legile lui Neumann. Izocline și izocromate

Cele de mai sus își dovedesc utilitatea în studiul stării de tensiune plană generalizată a plăcilor subțiri realizate din anumite materiale amorfe (celuloid, gelatină, diferite rășini și materiale plastice). Sub acțiunea sarcinii aceste materiale manifestă fenomenul de birefrință artificială,

descoperit de D. Brewster [1] și studiat sistematic de F. Neumann [1]. La baza utilizării sale pentru scopurile teoriei elasticității stau cele două legi ale lui Neumann :

I. Direcțiile de polarizare în fiecare punct coincid cu direcțiile principale ale deformației în acel punct.

II. Diferența vitezelor de propagare a celor două raze este proporțională cu diferența deformațiilor principale în punctul considerat.

Pentru un corp izotrop în stare de deformare elastică, a doua din aceste legi se scrie sub forma (vezi (4)) :

$$n_1 - n_2 = C (\sigma_1 - \sigma_2), \quad (11)$$

unde C depinde de natura corpului și de lungimea de undă a radiației.

Să considerăm acum un model al corpului (plan) ce ne interesează, executat la o scară convenabilă dintr-un material optic activ, și supus solicitării. Așezînd modelul între polarizor și analizor, se vor putea ușor cerceta punctele de extincție.

Toate punctele în care direcțiile date ale polarizorilor coincid cu direcțiile de polarizare din model sînt — în virtutea primei legi a lui Neumann — puncte în care axele principale ale tensiunii sînt înclinate după un unghi determinat. Locul geometric al acestor puncte — care apar pe analizor ca formînd o linie întunecată — se numește *izoclină*. Fiecare din izocline are deci proprietatea că în fiecare punct al ei, direcțiile principale ale tensiunii rămîn neschimbate, și formează un unghi dat (caracteristic izoclinei considerate) cu o direcție fixă. Rotînd polarizorii, se trasează vizual (sau se fotografiază) izoclinele corespunzătoare unghiurilor de 0° , 5° , 10° etc. În punctele în care $\sigma_1 = \sigma_2 \neq 0$, toate direcțiile sînt principale; prin astfel de puncte (numite *puncte izotrope*) trec deci toate izoclinele.

Pentru a stabili ecuația ce caracterizează rețeaua de izocline, putem relua raționamentele din § 1.7, în particular formula (1.7.18) scrisă pentru componentele tensiunii și cu indicii convenabil schimbați. De aci rezultă că o izoclină este locul geometric al punctelor în care

$$\operatorname{tg} 2\vartheta = 2\sigma_{12}/(\sigma_{11} - \sigma_{22}) = \text{const.} \quad (12)$$

În lungul oricărei curbe caracterizate de o relație $f = \text{const.}$ avem $df = 0$, de unde $dx_2/dx_1 = -f_1/f_2$; este suficient să luăm $f = (1/2) \operatorname{arc} \operatorname{tg} [2\sigma_{12}/(\sigma_{11} - \sigma_{22})]$ pentru a căpăta ecuația (de aspect destul de greoi) căutată.

Pe de altă parte, introducînd a doua lege a lui Neumann (11) în expresia (7), conchidem că pe model vom avea extincție și în punctele în care

$$\sigma_1 - \sigma_2 = h (\lambda/d C), \quad h = 0, 1, 2, \dots \quad (13)$$

Dacă modelul este examinat în lumină albă, extincția va apare numai pentru o anumită lungime de undă și deci punctele respective vor apare colo-

rate în culoarea complementară celei în extincție. Curbele pe care se situează aceste puncte sînt denumite *izocromate*. Evident, acestea sînt locul geometric al punctelor cu aceeași tensiune tangențială maximală. Relația (13) se poate deci scrie și sub forma

$$T_{\max} = h T_0. \quad (14)$$

Constanta T_0 (funcție de material, de grosimea modelului, și de λ) se numește *valoarea benzii*. Valoarea T_{\max} este proporțională cu T_0 și cu numărul h de benzi (izocromate), pornind de la izocromata zero. Valoarea T_0 se determină prin etalonare.

Pentru a se observa în mod *independent* izoclinele (care nu depind de intensitatea sarcinii), se folosesc modele de plexiglas, material pentru care constanta T_0 este mare. Este suficient atunci să se încarce modelul cu o sarcină proporțională celei care ne interesează, și destul de mică pentru ca să avem peste tot $\sigma_1 - \sigma_2 < 2T_0$; în acest caz, izocromatele nu vor apare.

Dimpotrivă, pentru a se face să *dispară* izoclinele, se folosește lumină polarizată circular (extremitatea vectorului luminos se rotește pe un cerc, cu frecvență extrem de mare). Din (10) urmează că în acest caz izoclinele (care depind de φ) mătură cu foarte mare viteză imaginea, și deci nu mai sînt vizibile, în timp ce izocromatele (care depind de α) rămîn nemodificate. Polarizarea circulară a luminii se realizează la trecerea prin foi de celofan de anumită grosime, aleasă în așa fel încît între cele două raze polarizate să apară o diferență de fază de $\lambda/2$ („lame sfert de undă”).

Metoda expusă furnizează deci efectiv orientarea axelor principale și valoarea tensiunii tangențiale maxime în fiecare punct.

Cunoscînd axele principale, se pot trasa liniile *izostatice* (vezi § 9, pag. 406).

Pentru determinarea tensiunilor principale, se pot folosi izocromatele și *izopahcele* (liniile de egală sumă a tensiunilor principale). Acestea din urmă pot fi determinate măsurînd în fiecare punct variația grosimii modelului, și făcînd uz de relația (2.3) pentru $i = 3$, $j = 1$, $k = 2$, și de faptul că $\sigma_{33} = 0$, astfel că :

$$\epsilon_{33} = -(\nu/E)(\sigma_{11} + \sigma_{22}) = -(\nu/E)(\sigma_1 + \sigma_2). \quad (15)$$

Metoda este laborioasă. Dar se poate aminti că $S_0 = \sigma_1 + \sigma_2$ verifică ecuația lui Laplace (vezi (6.8) pentru $F = 0$). Aceasta permite determinarea ei cu ajutorul analogiei cu o membrană, întinsă pe un contur identic cu cel al modelului, cu fețele libere, și cu cotele pe frontieră date de valorile la limită ale sumei S_0 — la o scară convenabilă — (vezi de ex. H. Supper [1], capitolul 3).

Totuși, pentru determinarea tensiunilor principale ne putem dispensa de aceste măsurători suplimentare. Într-adevăr, înlocuind ecuațiile lui Lamé și Maxwell (9.28) prin ecuații cu diferențe finite, determinarea lui σ_1, σ_2 se reduce la calcularea (grafică sau numerică) a unor integrale definite. E drept că în aceste expresii intervin razele de curbura ρ_1, ρ_2 care în genere

nu pot fi prea precis calculate. Dar un procedeu datorat lui L. Filon permite transformarea ecuațiilor, în așa fel încît să nu mai intervină decît cantități ce se pot ușor determina grafic.

Chestiunilor de foto-elasticimetrie le este consacrată o literatură imensă. Indicăm mai întâi lucrările clasice ale lui E. Coker și L. Filon [1], și M. Frocht [1]. Vezi de asemenea N. Iosipescu [1]. De asemenea se pot consulta capitolele consacrate acestei metode în tratatele lui C. Biezeno și R. Grammel [1], § 3.8; P. Papkovici [4], cap. 13, partea 2; S. Timoshenko și J. Goodier [1], cap. 5; și în monografiile lui A. Durelli et al. [1], și M. Hetenyi [1] (capitolul scris de T. Dolan et al. [1]). Amănunțite treceri în revistă aparțin lui H. Jessop [1] și M. Hetenyi [4]. Menționăm încă — pentru importanța sa istorică — lucrarea lui A. Mesnager [2].

Metodele foto-elasticimetrice s-au extins asupra problemelor tridimensionale (vezi de ex. H. Aben [1]; A. Durelli și I. Daniel [1]; M. Frocht și R. Guernsey [1]; M. Frocht și L. Srinath [1]); asupra problemelor dinamice (vezi de ex. M. Frocht și P. Flynn [1]), și asupra studiului deformației plastice (vezi bibliografie și indicații în M. Hetenyi [4]; de asemenea vezi partea finală din T. Dolan et al. [1]). Menționăm încă articolele lui J. Lewis și H. Pollack [1] și H. Poritsky și R. Jerrard [1].

c) Cazul domeniilor multiplu conexe

Chestiunea posibilității de a transpune asupra corpului ce ne interesează, rezultatele măsurărilor foto-elastice efectuate pe model, necesită atenție aparte (vezi M. Levy [2] și J. Michell [1]).

În acest scop, să amintim că relațiile (7.8) care dau componentele, tensiunii, precum și condiția la limită (11.7) pentru problema lui Neumann, nu depind de constantele elastice.

Să presupunem că am rezolvat problema lui Neumann pentru un domeniu dat, o sarcină dată, și valori date λ, μ, κ — și să căutăm să determinăm corpurile care, avînd aceeași formă și fiind supuse aceleiași sollicitări, se găsesc în aceeași stare elastică.

Din (10.22) se vede că, dacă \mathcal{D} este simplu conex, termenii multi-formi (dependenți de κ) dispar, și funcțiile $\varphi(z), \psi(z)$ rezultă independente de proprietățile materialului. Prin urmare, starea de tensiune a unui corp plan mărginit și simplu conex depinde exclusiv de forma și de forțele superficiale și nu de constantele sale elastice.

Fie acum că \mathcal{D} este multiplu conex, și fie λ', μ', κ' constantele elastice corespunzătoare unui al doilea material. Dacă funcțiile găsite pentru primul corp rezolvă problema lui Neumann și pentru cel de-al doilea, ele vor avea pentru ambele corpuri aceeași formă (10.22), și vor satisface pentru ambele corpuri condițiile la limită în tensiuni. Totodată, ele trebuie să satisfacă și pentru al doilea corp condițiile (10.14), care se vor scrie sub forma

$$\kappa [\overline{X^{(j)}}/2\pi(\kappa+1)] = -\kappa' [-\overline{X^{(j)}}/2\pi(\kappa+1)],$$

de unde

$$(\kappa - \kappa') X^{(j)} = 0. \quad (16)$$

Ele sînt deci funcțiile căutate pentru al doilea corp, dacă

$$\kappa = \kappa', \quad \text{adică } \nu = \nu';$$

sau dacă

$$X^{(j)} = 0 \quad \text{pentru } j = 1, 2, \dots, m.$$

Pentru a putea rezolva prin metoda foto-elastică problema lui Neumann pentru un corp multiplu conex, trebuie deci ca materialul modelului să posede același coeficient Poisson ca și corpul dat. Această condiție nu este necesară dacă forțele superficiale au rezultanta nulă pe fiecare din componentele \mathcal{L} , în parte. Dacă totuși $X^{(j)} \neq 0$, este necesară utilizarea a trei modele, cu valori diferite ale coeficientului lui Poisson (vezi V. Mossakovski [5]; vezi de asemenea S. Kliačko [1] — cu studiul separat al stărilor de tensiune și deformare plană).

§ 14. PROBLEMA LUI NEUMANN PENTRU COROANA CIRCULARĂ. METODA SERIILOR

Dată fiind deplina analogie dintre problema lui Neumann și problema lui Dirichlet, ne vom limita la a prezenta soluția celei dintîi. (Vezi N. Mushelişvili [5], § 59, dar cu utilizarea unei alte condiții la limită. Pentru problema lui Dirichlet, vezi și A. Pîrvu [1].)

Să presupunem deci că domeniul \mathcal{D} este o coroană circulară cu centrul în originea axelor Ox_1x_2 , și de raze $R_1 < R_0$. Cînd va fi necesar, vom atribui indicii $j = 0$ sau 1 diferitelor mărimi scrise pe componentele lui \mathcal{L} . În cazul particular $R_1 = 0$ vom căpăta de aci soluția aceleiași probleme pentru discul circular cu sau fără un orificiu punctual central. În cazul $R_0 \rightarrow \infty$, vom căpăta soluția problemei lui Neumann pentru planul cu un orificiu circular.

a) Metoda seriilor

Metoda seriilor poate fi aplicată cu ușurință, întrucît funcțiile $\varphi_0(z)$, $\psi_0(z)$ sînt reprezentabile fiecare prin *cîte un singur* element Laurent. Amintim notațiile (vezi (5.17.6)) :

$$\zeta|_r = \sigma = \exp(i\chi), \quad \bar{\sigma} = \sigma^{-1}, \quad d\sigma = i\sigma d\chi, \quad (1)$$

și

$$z = R \exp(i\chi), \quad t = z|_{\mathcal{L}}, \quad t|_{\mathcal{L}_j} = R_j \sigma, \quad s|_{\mathcal{L}_j} = R_j \chi. \quad (2)$$

Determinarea funcțiilor $\varphi(\beta)$, $\psi(\beta)$ sub forma (10.22) din condiția la limită (11.7) rezolvă problema. Vom păstra același simbol f pentru datele la limită privite ca funcții de χ , de σ , de t sau de s .

Din (11.8) deducem pentru orice funcție $f(s)$ integrabilă pe \mathcal{L} :

$$h(s) = \begin{cases} i \int_0^s f(s) ds & \text{pe } \mathcal{L}_0, \\ -i \int_0^s f(s) ds & \text{pe } \mathcal{L}_1, \end{cases} \quad (3)$$

unde ambele cercuri sînt parcurse în sens direct (vezi (2)). Pentru $h(s)$ păstrăm aceeași convenție de notație ca pentru $f(s)$.

Dacă $f(s)$ este integrabilă, $h(s)$ este continuă. În punctele în care $f(s)$ este continuă, avem $h'(s) = f(s)$. Dacă $f(s)$ este continuă pe porțiuni, $h(s)$ este netedă pe porțiuni.

Notăm însă că putem întîlni funcții $f(s)$ care nu sînt integrabile (nici chiar în sensul lui Lebesgue) — dar pentru care nu numai că soluția există, ci poate chiar fi obținută prin metoda seriilor. (Vezi § 16, b.)

Prin ipoteză, $f(s)$ este uniformă; $f(\chi)$ este deci periodică, de perioadă 2π . Dimpotrivă, $h(s)$ este în general neuniformă. Într-adevăr, din (3) avem

$$[h]_{\mathcal{L}_0} = iX^{(0)}, \quad [h]_{\mathcal{L}_1} = -iX^{(1)}.$$

Întrucît \mathcal{D} este în echilibru sub acțiunea forțelor superficiale, trebuie să avem

$$X^{(0)} + X^{(1)} = 0, \quad (4)$$

(vezi (11.13)) astfel că în definitiv

$$[h]_{\mathcal{L}_0} = [h]_{\mathcal{L}_1} = -iX^{(1)}. \quad (5)$$

Prin urmare, pentru funcția $h(\chi)$ deducem

$$h(\chi + 2\pi) = h(\chi) - iX^{(1)}. \quad (6)$$

Să presupunem că $f(\chi) \in V$; prin urmare, f este desfășurabilă în serie Fourier convergentă. Este ușor să ameliorăm convergența sa; într-adevăr, din (5) urmează

$$[h(\chi) + (X^{(1)}/2\pi) i \chi]_{\mathcal{L}_j} = 0, \quad j = 0, 1. \quad (7)$$

Coeficienții Fourier ai acestei funcții verifică deci inegalitățile (A.9.19). Amintind că $\sigma = \exp(i\chi)$, putem scrie

$$h(\sigma) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n^j \sigma^n - (X^{(1)}/2\pi) \ln \sigma \quad \text{pe } \mathcal{L}_j, \quad j = 0, 1, \quad (8)$$

unde h_n^0 și h_n^1 sînt constante complexe cunoscute, și anume coeficienții Fourier ai funcțiilor $h(\sigma) + (X^{(1)}/2\pi) \ln \sigma$ pe cele două cercuri-frontieră, adică de exemplu (vezi (A. 9.25)) :

$$\begin{aligned} h_n^0 &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} [h(\sigma) + (X^{(1)}/2\pi) \ln \sigma] \sigma^{-n-1} d\sigma = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [h(\chi) + (X^{(1)}/2\pi) i\chi] \exp(-in\chi) d\chi. \end{aligned} \quad (9)$$

(Din cauza prezenței termenului logaritmice, notația nu este cu totul consecventă.) Din (1), (2) urmează desigur

$$d/ds = R_j^{-1} d/d\chi \text{ pe } \mathcal{L}_j, \quad d/d\chi = i\sigma d/d\sigma. \quad (10)$$

Derivînd în raport cu s — adică în fond în raport cu χ — în ambii membri ai egalităților (3) și ținînd seama de (8), deducem

$$h'(s) = (-1)^j i f(s) = R_j^{-1} i \sigma \frac{d}{d\sigma} \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n^j \sigma^n - R_j^{-1} (X^{(1)}/2\pi) i$$

pe \mathcal{L}_j , $j = 0, 1$, de unde

$$f(\sigma) = (-1)^j R_j^{-1} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} n h_n^j \sigma^n - (X^{(1)}/2\pi) \right] \text{ pe } \mathcal{L}_j, \quad j = 0, 1. \quad (11)$$

Funcția $h(\sigma)$ trebuie să posede proprietăți ce rezultă din condiția de echilibru a lui \mathcal{D} ca solid rigid. Condiția ca rezultanta forțelor exterioare să fie nulă este exprimată de (4). Momentul resultant al acestor forțe în raport cu originea se scrie (vezi 11.14))

$$\mathcal{M}_3 = -\operatorname{Im} \oint_{\mathcal{L}} t(s) \overline{f(s)} ds. \quad (12)$$

Introducînd aci (11), ținînd seama că \mathcal{L}_0 și \mathcal{L}_1 sînt parcurse în sens direct și că curbele de integrare sînt înlocuite, în virtutea relațiilor (2), cu cercul unitate γ , obținem cu ajutorul teoremei rezidurilor (sau din (A.9.23))

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_3 &= -\operatorname{Im} \oint_{\gamma} R_0 \sigma \left\{ R_0^{-1} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} n \bar{h}_n^0 \sigma^{-n} - (\overline{X^{(1)}}/2\pi) \right] \right\} R_0 (-i \sigma^{-1} d\sigma) - \\ &- \operatorname{Im} \oint_{\gamma} R_1 \sigma \left\{ (-R_1^{-1}) \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} n \bar{h}_n^1 \sigma^{-n} - (\overline{X^{(1)}}/2\pi) \right] \right\} R_1 (-i \sigma^{-1} d\sigma) = \\ &= \operatorname{Im} \oint_{\gamma} i (\bar{h}_1^0 R_0 - \bar{h}_1^1 R_1) \sigma^{-1} d\sigma = 2\pi \operatorname{Im} (R_1 \bar{h}_1^1 - R_0 \bar{h}_1^0), \end{aligned} \quad (13)$$

astfel încît condiția de anulare a momentului rezultat ia în definitiv forma

$$\operatorname{Im} (R_0 h_1^0 - R_1 h_1^1) = 0. \quad (14)$$

Să stabilim acum aspectul funcțiilor $\varphi(z)$, $\psi(z)$. Relațiile (10.22) arată că ele conțin cîte un singur termen logaritmice fiecare, în care vom alege $z_1 = 0$. Întrucît funcțiile $\varphi_0(z)$ și $\psi_0(z)$ sînt olomorfe în \mathcal{D} , ele pot fi căutate sub forma unor serii Laurent. (Aceasta arată importanța practică a celor spuse la pag. 410.) Ținînd seama de (10.15) vom avea deci

$$\varphi(z) = \gamma_1 \ln z + \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n, \quad \psi(z) = -\kappa \bar{\gamma}_1 \ln z + \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n z^n, \quad (15)$$

unde constanta γ_1 este cunoscută și are valoarea (vezi (10.21))

$$\gamma_1 = -[X^{(1)}/2\pi(\kappa + 1)]. \quad (16)$$

Funcțiile $\varphi_0(z)$, $\psi_0(z)$ sînt soluțiile problemei (11.10), (11.11):

$$\varphi_0(t) + t \overline{\varphi_0'(t)} + \overline{\psi_0(t)} = h^{(j)}(t) + C_j - \gamma_1 (\ln t - \kappa \ln \bar{t}) - \bar{\gamma}_1 (t/\bar{t}) \text{ pe } \mathcal{L}_j. \quad (17)$$

Membrul al doilea din (17) trebuie să fie uniform; în fapt, termenul său logaritmice se scrie

$$[X^{(1)}/2\pi(\kappa + 1)] [(1 - \kappa) \ln |t| + (1 + \kappa) i\chi],$$

și partea sa multiformă este egală și de semn opus termenului în $i\chi$ din (8).

Introducînd acum (8) în (17), căpătăm *pentru al doilea membru* din (17):

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n^j \sigma^n - \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \frac{X^{(1)}}{2\pi} \ln |t| + \frac{\bar{X}^{(1)}}{2\pi(\kappa + 1)} \frac{t}{\bar{t}} + C_j \text{ pe } \mathcal{L}_j, j=0,1. \quad (18)$$

Constantele C_0 , C_1 rămîn deocamdată nedeterminate. Aceasta permite (vezi § 11, pag. 417) să luăm în (15):

$$a_0 = b_0 = \operatorname{Im} a_1 = 0. \quad (19)$$

Pentru a introduce expresiile (15) în condițiile la limită, vom ține seama și de (1), (2); de unde avem *pentru primul membru* din (17):

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n R_j^n \sigma^n + R_j \sigma \sum_{n=-\infty}^{\infty} n \bar{a}_n R_j^{n-1} \sigma^{-(n-1)} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{b}_n R_j^n \sigma^{-n} \text{ pe } \mathcal{L}_j, j=0,1. \quad (20)$$

Înlocuind în a doua sumă din (20) indicele n prin $-n+2$, strângând la un loc termenii corespunzători acelorași puteri σ^n , și ținând seama de (18), obținem

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} [a_n R_j^n - (n-2) \bar{a}_{-n+2} R_j^{-n+2} + \bar{b}_{-n} R_j^{-n}] \sigma^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n^j \sigma^n - \\ - [(\kappa-1)/(\kappa+1)] [X^{(1)}/2\pi] \ln R_j + [\overline{X^{(1)}}/2\pi(\kappa+1)] \sigma^2 + C_j, \quad j=0,1, \quad (21)$$

așadar două condiții de egalitate a două serii complexe Fourier.

Conform celor spuse în § A.9, pag. 759, de aci rezultă *egalitatea coeficienților corespunzători*, astfel că (21) conduce la un sistem de ecuații algebrice liniare. Anume, ținând seama și de primele două relații (19), avem pe rînd pe cercul \mathcal{L}_0 , pentru

$$n=0: \quad 2\bar{a}_2 R_0^2 = h_0^0 - [(\kappa-1)/(\kappa-1)] [X^{(1)}/2\pi] \ln R_0 + C_0, \quad (22)$$

$$n=1: \quad a_1 R_0 + \bar{a}_1 R_0 + \bar{b}_{-1} R_0^{-1} = h_1^0, \quad (23)$$

$$n=2: \quad a_2 R_0^2 + \bar{b}_{-2} R_0^{-2} = h_2^0 + [\overline{X^{(1)}}/2\pi(\kappa+1)], \quad (24)$$

$$n \geq 3, \quad n \leq -1: \quad a_n R_0^n - (n-2) \bar{a}_{-n+2} R_0^{-n+2} + \bar{b}_{-n} R_0^{-n} = h_n^0. \quad (25)$$

Pe cercul \mathcal{L}_1 obținem evident un sistem de relații analoge, în care R_0, h_n^0, C_0 sînt înlocuiți cu R_1, h_n^1, C_1 .

Relația (23) și relația analogă obținută pe \mathcal{L}_1 se scriu

$$2R_0^2 \operatorname{Re} a_1 + \bar{b}_{-1} = R_0 h_1^0, \quad 2R_1^2 \operatorname{Re} a_1 + \bar{b}_{-1} = R_1 h_1^1. \quad (26)$$

Scăzînd membru cu membru aceste relații, obținem

$$\operatorname{Re} a_1 = \frac{1}{2} (R_0 h_1^0 - R_1 h_1^1) / (R_0^2 - R_1^2); \quad (27)$$

aceasta este desigur cu putință numai dacă numărătorul din (27) este real, ceea ce e automat verificat (vezi (14)). Ținînd seama de a treia relație (19), putem scrie deci

$$a_1 = \bar{a}_1 = \frac{1}{2} (R_0 h_1^0 - R_1 h_1^1) / (R_0^2 - R_1^2). \quad (28)$$

Introducînd această valoare în oricare din ecuațiile (26), determinăm coeficientul b_{-1} .

Mai departe, relația (24) și cea analogă ei de pe \mathcal{L}_1 dau sistemul care slujește la determinarea coeficienților a_2 și b_{-2} :

$$a_2 R_0^2 + \bar{b}_{-2} R_0^{-2} = h_2^0 + [\overline{X^{(1)}}/2\pi(\kappa+1)], \\ a_2 R_1^2 + \bar{b}_{-2} R_1^{-2} = h_2^1 + [X^{(1)}/2\pi(\kappa+1)]. \quad (29)$$

Ecuația (22) și ecuația analogă de pe \mathcal{L}_1 permit acum să găsim constantele C_0, C_1 , care nu intervin de altfel în calcule.

Scriind în fine relațiile (25) și analogele lor, obținem sistemul

$$\begin{aligned} a_n R_0^n - (n-2) \bar{a}_{-n+2} R_0^{-n+2} + \bar{b}_{-n} R_0^{-n} &= h_n^0, \\ a_n R_1^n - (n-2) \bar{a}_{-n+2} R_1^{-n+2} + \bar{b}_{-n} R_1^{-n} &= h_n^1, \end{aligned} \quad (30)$$

valabil pentru $n = -1, -2, \pm 3, \dots$. Înmulțind prima din aceste ecuații cu R_0^n , pe cea de a doua cu R_1^n , scăzându-le termen cu termen, și notînd

$$l_n = R_0^n h_n^0 - R_1^n h_n^1, \quad (31)$$

obținem mai întîi

$$a_n (R_0^{2n} - R_1^{2n}) - (n-2) \bar{a}_{-n+2} (R_0^2 - R_1^2) = l_n.$$

Înlocuind aci n prin $-n+2$ și trecînd la cantitățile complex conjugate, căpătăm în definitiv sistemul

$$\begin{aligned} (R_0^{2n} - R_1^{2n}) a_n - (n-2) (R_0^2 - R_1^2) \bar{a}_{-n+2} &= l_n, \\ n (R_0^2 - R_1^2) a_n + (R_0^{-2n+4} - R_1^{-2n+4}) \bar{a}_{-n+2} &= \bar{l}_{-n+2}, \end{aligned} \quad (32)$$

de unde se găsesc coeficienții a_n , dacă determinantul sistemului nu este nul.

Pentru acest determinant se obține ușor expresia

$$\Delta_n = R_1^4 [n(n-2) (K-1)^2 + (K^n-1) (K^{-n+2}-1)], \quad K = R_0^2/R_1^2, \quad (33)$$

(în notația din (5.15.93), avem $K = k^{-2}$). Să considerăm funcția

$$f_n(K) = f_{-n+2}(K) = n(n-2) (K-1)^2 + K^2 - K^{-n+2} - K^n + 1. \quad (34)$$

Derivînd în raport cu K , și ținînd seama că sistemul (32) este scris pentru toate valorile $n \neq 0, 1, 2$, din cele de mai sus urmează

$$f'_n(1) = f''_n(1) = f'''_n(1) = 0, \quad f_n^{IV}(K) < 0 \quad (35)$$

pentru $K > 1$. Obținem atunci pe rînd

$$\begin{aligned} f_n^{IV}(K) < 0, \quad f''_n(K) < 0, \quad f'_n(K) < 0, \quad f_n(K) < 0 \text{ pentru } K > 1, \\ \Delta_n < 0 \text{ pentru } R_0 > R_1 \text{ și } n \geq 3. \end{aligned} \quad (36)$$

În consecință, sistemul (32) are soluție unică pentru $n \geq 3$. Același rezultat rămîne valabil și pentru $n < 0$ — dar nu este necesar să ne ocupăm de acest caz dat fiind că este mai simplu să înlocuim în (32) (și deci și în expresiile deduse pentru a_n) indicii $n \geq 3$ prin $-n+2$, ceea ce conduce la șirul de indici negativi $-1, -2, -3, \dots, -n, \dots$

Din sistemul (32) deducem acum pentru $n \geq 3$

$$a_n = [(R_0^{-2n+4} - R_1^{-2n+4}) l_n + (n-2) (R_0^2 - R_1^2) \bar{l}_{-n+2}] : \Delta_n. \quad (37)$$

Coeficienții funcției $\varphi_0(z)$ sînt astfel deplin determinați: a_0 este dat de (19), a_1 este dat de (28), a_2 se deduce din (29), a_n (pentru $n \geq 3$) este scris în (37), iar a_n (pentru $n < 0$) se obține din (37) dacă înlocuim n prin $-n + 2$.

Coeficienții funcției $\psi_0(z)$ sînt și ei cunoscuți: b_0 este dat de (19), b_{-1} rezultă din (26), iar b_{-2} — din (29). Pentru a obține b_{-n} pentru $n \geq 3$, putem face uz de una (oricare) din ecuațiile (30), în care introducem valorile a_n și a_{-n+2} deja găsite. În fine, pentru a căpăta coeficienții b_n pentru $n \geq 1$, folosim una din ecuațiile (30), în care am înlocuit pe n prin $-n + 2$.

Cu aceasta, funcțiile lui Kolosov și Mushelișvili au fost determinate sub forma (15). Toate aceste operații reprezintă analogul celei care pune în corespondență datelor la limită $f(\sigma)$ din (A.9.33), funcția de o variabilă complexă $f(\zeta)$ din (A.9.32), și constituie tocmai realizarea operației de rezolvare a ecuațiilor (A.9.5) în cazul particular în care $F(z, \bar{z}) \equiv \varphi_0(z) + \bar{z} \varphi'_0(z) + \psi_0(z)$.

b) Convergența soluției

După cum se arată în § A.9, o asemenea construcție nu garantează de fel — în cazul unei funcții de o variabilă complexă — convergența seriei (A.9.32) în interiorul coroanei, așadar *existența* funcției olomorfe considerate. Dimpotrivă însă, se poate demonstra că cele două funcții $\varphi_0(z)$, $\psi_0(z)$ sînt efectiv determinate de datele la limită, întrucît seriile ce le definesc sînt convergente în interiorul coroanei (și chiar pe frontieră). Totodată, acest fapt arată că — spre deosebire de cazul unei singure funcții olomorfe (§ A.9, pag. 767) datele la limită de pe ambele componente ale lui \mathcal{L} sînt necesare și — într-o largă măsură — pot fi date arbitrar. Aceasta este ușor de înțeles, întrucît în cazul de față sîntem conduși la determinarea a două funcții dintr-o singură condiție la limită.

Pentru a demonstra că seriile (15) sînt convergente, este suficient să demonstrăm că părțile lor regulate sînt convergente în \mathcal{D}_0^+ , iar părțile lor principale, în \mathcal{D}_1^- . Dar în loc să facem uz de formulele (A.5.19) și (A.5.24), este mai ușor să demonstrăm direct că seriile modulelor sînt convergente pentru $|z| \leq R_0$, respectiv pentru $|z| \geq R_1$. Convergența seriilor

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n R_0^n|, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |b_n R_0^n|, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |a_{-n} R_1^{-n}|, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |b_{-n} R_1^{-n}|$$

asigură, în virtutea teoremei a doua a lui Abel, și posibilitatea de a prelungi prin continuitate funcțiile considerate în $\mathcal{D} + \mathcal{L}$ (vezi (A.9.37)), și garantează regularitatea soluției obținute.

Ținînd seama de definiția cantităților l_n și K , putem scrie

$$l_n = h_n^0 R_0^n - h_n^1 R_1^n = R_1^n (h_n^0 K^{n/2} - h_n^1), \quad (38)$$

astfel că (37) devine

$$a_n = \frac{R_1^n (h_n^0 K^{n/2} - h_n^1) R_1^{-2n+4} (K^{-n+2} - 1) + (n-2) R_1^{-n+2} (\bar{h}_{-n+2}^0 K^{-n/2+1} - \bar{h}_{-n+2}^1) R_1^2 (K-1)}{R_1^4 [n(n-2) (K-1)^2 + (K^n - 1) (K^{-n+2} - 1)]},$$

de unde, ținând seama de (34), deducem :

$$a_n R_0^n = \left(\frac{R_0}{R_1} \right)^n \frac{(h_n^0 K^{n/2} - h_n^1) (K^{-n+2} - 1) + (n-2) (\bar{h}_{-n+2}^0 K^{-n/2+1} - \bar{h}_{-n+2}^1) (K-1)}{f_n(K)}, \quad (39)$$

precum și relația analogă ce se obține dacă înmulțim pe a_n cu R_1^n în loc de R_0^n , și înlocuim pe n cu $-n+2$:

$$a_{-n+2} R_1^{-n+2} = \frac{(h_{-n+2}^0 K^{-n/2+1} - h_{-n+2}^1) (K^n - 1) - n (\bar{h}_n^0 K^{n/2} - \bar{h}_n^1) (K-1)}{f_n(K)}. \quad (40)$$

Aceste rapoarte depind evident de comportarea coeficienților Fourier h_n^0, h_n^1 . Să presupunem acum că derivata a doua a funcției periodice $[h(\chi) + (X^{(1)}/2\pi)i\chi]$, așadar derivata $f'(\chi)$ a funcției (evident periodice) $[f(\chi) + (X^{(1)}/2\pi R_0)]$ (vezi (11)) este cu variație mărginită (în particular : satisface condițiile lui Dirichlet) sau este de clasă C_μ^0 . În acest caz, din (A.9.20), (A.9.21) rezultă că

$$|h_n^0|, |h_n^1| \leq C |n|^{-2-\mu}, \quad 0 < \mu \leq 1, \quad (41)$$

unde $\mu = 1$ dacă $f'(\chi) \in V$. Din (39) urmează acum

$$|a_n R_0^n| \leq K^{n/2} \{ (K^{n/2} + 1 + K^{-n/2+2} + K^{-n+2}) C' |n|^{-2-\mu} + \\ + (n-2) (K + 1 + K^{-n/2+2} + K^{-n/2+1}) C'' |n-2|^{-2-\mu} \} : |f_n(K)|,$$

sau încă, reținând la numărător numai termenii de gradul cel mai înalt în K (întrucât $K > 1$) și înlocuind constantele C', C'' cu o constantă C''' convenabilă :

$$|a_n R_0^n| \leq C''' \{ K^n |n|^{-2-\mu} + K^{n/2+1} |n-2|^{-1-\mu} \} : |f_n(K)|. \quad (42)$$

Numitorul $f_n(K)$ este de grad n în K ; introducând o nouă constantă C , obținem deci pentru n suficient de mare :

$$|a_n R_0^n| \leq C |n|^{-2-\mu}, \quad (43)$$

de unde rezultă evident convergența seriei de termen general $|a_n R_0^n|$.

Din (40) obținem în mod analog

$$|a_{-n+2} R_1^{-n+2}| \leq C |n-2|^{-2-\mu}, \quad (44)$$

astfel că seria de termen general $|a_{-n+2} R_1^{-n+2}|$ este de asemenea convergentă.

Prin urmare, seria $\varphi_0(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ este absolut și uniform convergentă nu numai în orice compact conținut în \mathcal{D} , ci și pe \mathcal{L} .

Mai departe, din a doua ecuație (30) urmează

$$b_{-n} R_1^{-n} = \bar{h}_n^1 + (n-2) a_{-n+2} R_1^{-n+2} - \bar{a}_n R_1^n, \quad (45)$$

de unde, ținând seama și de evaluările (41), (44) și (43) (care rămâne desigur valabilă dacă înlocuim R_0 cu cantitatea mai mică R_1), obținem

$$|b_{-n} R_1^{-n}| \leq C' |n|^{-2-\mu} + C'' |n-2|^{-1-\mu} + C''' |n|^{-2-\mu},$$

sau încă, introducând o nouă constantă C convenabil aleasă :

$$|b_{-n} R_1^{-n}| \leq C |n|^{-1-\mu}. \quad (46)$$

Înlocuind în prima ecuație (30) indicele $-n$ prin $n-2$, obținem

$$b_{n-2} R_0^{n-2} = \bar{h}_{-n+2}^0 - n a_n R_0^n - \bar{a}_{-n+2} R_0^{-n+2}, \quad (47)$$

de unde în același fel conchidem că

$$|b_{n-2} R_0^{n-2}| \leq C |n|^{-1-\mu}. \quad (48)$$

Prin urmare, seria $\psi_0(\zeta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \zeta^n$ este de asemenea uniform și absolut convergentă în \mathcal{D} , și chiar pe \mathcal{L} . Convergența acestei serii este mai lentă decât cea a seriei $\varphi_0(\zeta)$.

(Pentru aceasta din urmă, ar fi fost suficient să formulăm condițiile de la pag. 443 relativ la funcția $f(\chi)$ însăși.)

Din convergența seriei $\varphi_0(\zeta)$ în \mathcal{D} rezultă că $\varphi_0'(\zeta)$ se poate căpăta prin derivare termen cu termen, iar domeniul de convergență al seriei astfel obținute este tot \mathcal{D} . Mai mult încă, din (43), (44) rezultă și

$$|n a_n R_0^n| \leq C |n|^{-1-\mu}, \quad |(n-2) a_{-n+2} R_1^{-n+2}| \leq C |n-2|^{-1-\mu}, \quad (49)$$

de unde urmează că seria $\varphi_0'(\zeta)$ este absolut convergentă și pe \mathcal{L} .

Funcțiile lui Kolosov și Mushelișvili sînt astfel construite.

Raționamentul de mai sus constituie totodată demonstrarea *teoremei de existență* a soluției problemei lui Neumann pentru coroana circulară, dacă datele la limită satisfac condițiile impuse mai sus funcției $f(s)$.

Întrucît seriile (15) sînt convergente, putem privi drept soluție *aproximativă* a aceleiași probleme funcțiile ce se obțin dacă reținem aci numai un număr *finit* de termeni. Cu cît acest număr este mai mare, și cu cît datele la limită sînt mai regulate (cu un număr mai mare de derivate succesive periodice), cu atît această soluție este mai apropiată de cea exactă. (Compară mai departe cu § 8.3, pag. 573.)

OBSERVAȚIA 1. Condițiile impuse funcției $f(s)$ sînt destul de severe. Ele conduc — după un lanț lung de evaluări — la concluzii dintre care unele rămîn încă mai tari decât cele necesare. Dar acestea sînt numai condiții *suficiente* de existență, și metoda rămîne utilizabilă chiar și în unele împrejurări în care ele nu sînt îndeplinite (vezi § 16, **b**).

OBSERVAȚIA 2. Soluția problemei lui Dirichlet se obține cu totul similar. (Acesta este avantajul utilizării condiției (11.7).) Întrucât însă funcția $g(s)$ este analogul funcției $h(s)$ — și nu al funcției $f(s)$ — convergența seriilor obținute va fi asigurată dacă datele la limită verifică condiții mai severe: $g''(\chi) \in V$ sau $g''(\chi) \in C_\mu^0$.

OBSERVAȚIA 3. În cazul problemei lui Dirichlet, γ_1 e necunoscută, dar o ecuație analogă cu (22) — din care C_0 lipsește acum — permite să se determine $X^{(1)}$. (Vezi pag. 416.)

c) Exemplu. Problema lui Lamé

Fie dat un tub cilindric circular lung, supus la presiune uniformă interioară și exterioară. Problema conduce la considerarea unei coroane circulare, supuse la sarcini normale constante pe frontieră. Avem evident

$$f(\chi) = \begin{cases} -p_0 \exp(i\chi) & \text{pe } \mathcal{L}_0, \\ p_1 \exp(i\chi) & \text{pe } \mathcal{L}_1, \end{cases} \quad (50)$$

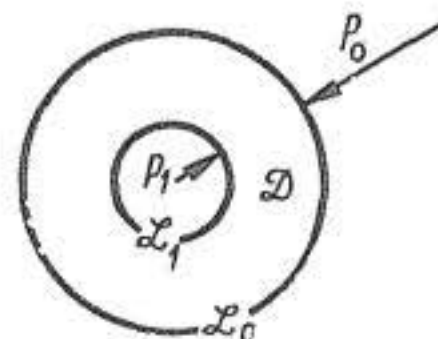


Fig. 6.14.1

unde $p_0, p_1 > 0$. (Valori $p_0, p_1 < 0$ ar corespunde unei întinderi uniforme.)

Din (3) urmează acum, abstracție făcând de o constantă,

$$h(\chi) = \begin{cases} i \int_0^\chi -p_0 \exp(i\chi) R_0 d\chi = -p_0 R_0 \exp(i\chi) & \text{pe } \mathcal{L}_0, \\ -i \int_0^\chi p_1 \exp(i\chi) R_1 d\chi = -p_1 R_1 \exp(i\chi) & \text{pe } \mathcal{L}_1. \end{cases} \quad (51)$$

Comparind cu expresiile (8), deducem

$$X^{(0)} = X^{(1)} = 0, \quad h_1^0 = -R_0 p_0, \quad h_1^1 = -R_1 p_1, \quad (52)$$

ceilalți coeficienți fiind nuli. Condiția (14) este verificată. Obținem pe rînd:

$$\text{din (16):} \quad \gamma_1 = 0; \quad (53)$$

$$\text{din (28):} \quad a_1 = (R_1^2 p_1 - R_0^2 p_0) / 2(R_0^2 - R_1^2); \quad (54)$$

$$\text{din (26):} \quad b_{-1} = [R_0^2 R_1^2 / (R_0^2 - R_1^2)] (p_0 - p_1); \quad (55)$$

$$\text{din (29):} \quad a_2 = b_{-2} = 0. \quad (56)$$

Sistemul (30) este aci omogen, și ceilalți coeficienți a_n, b_n sînt deci nuli. În fine, din (22) urmează $C_0 = 0$, și analog și $C_1 = 0$.

Funcțiile căutate sînt deci

$$\varphi(\delta) = \frac{1}{2} \frac{R_1^2 p_1 - R_0^2 p_0}{R_0^2 - R_1^2} \delta, \quad \psi(\delta) = \frac{R_0^2 R_1^2 (p_0 - p_1)}{R_0^2 - R_1^2} \delta^{-1}. \quad (57)$$

Făcînd uz de (7.28), conchidem că zonele periclitate sînt cele în care avem

$$|S| = 2|\delta \varphi'' + \psi'| = 2[R_0^2 R_1^2 / (R_0^2 - R_1^2)] |p_0 - p_1| R^{-2} > \sigma_s \quad (58)$$

(sau $> 1,16 \sigma_s$; vezi finele § 6). Pentru R_0, R_1 dați, $|S|$ este cu atât mai mare cu cât diferența de presiune $p_0 - p_1$ este mai mare, și cu cât R este mai mic. Prin urmare, deformarea plastică începe pe cercul *interior*.

În cazul particular $R_1 \rightarrow 0$ (disc circular cu o fisură punctuală centrală) avem aci

$$\lim |S|_{\mathcal{L}_1} = 2|p_0 - p_1| \quad \text{pentru } R_1 \rightarrow 0. \quad (59)$$

O repartitie de sarcini diferită de cea din (50) ar conduce la calcule mai laborioase, dar principial cu nimic deosebite de cele de aci.

§ 15. PROBLEMA LUI NEUMANN PENTRU DISCUL CIRCULAR ȘI PENTRU PLANUL CU UN ORIFICIU CIRCULAR

a) Disc circular

Soluția se obține din cea din § 14, dacă luăm $R_1 = 0$ și ținem seama că funcțiile $\varphi(\beta), \psi(\beta)$ trebuie să fie olomorfe în domeniul \mathcal{D}_0^+ la care se reduce \mathcal{D} . Această din urmă condiție obligă să avem

$$\gamma_1 = 0, \quad a_{-n} = b_{-n} = 0 \quad \text{pentru } n = 1, 2, 3, \dots \quad (1)$$

Vom renunța la indicele „0” relativ la mărimile definite pe cercul exterior, păstrînd numai notația R_0 pentru raza acestuia.

Condiția de echilibru se scrie acum (vezi (14.4), (14.14)) :

$$X^{(0)} = \operatorname{Im} h_1 = 0. \quad (2)$$

Ecuatiile (14.22) — (14.25) devin (înlocuind $-n$ prin n pentru $n > 0$ în (14.25)) :

$$\begin{aligned} 2\bar{a}_2 R_0^2 &= h_0 + C_0; \quad (a_1 + \bar{a}_1) R_0 = h_1; \\ a_n R_0^n &= h_n, \quad n \geq 2; \quad (n+2) a_{n+2} R_0^{n+2} + b_n R_0^n = \bar{h}_{-n}, \quad n > 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Ținînd seama și de (14.19), deducem de aci

$$\begin{aligned} a_0 &= 0; \quad a_1 = \frac{1}{2} h_1 R_0^{-1}; \quad a_n = h_n R_0^{-n}, \quad n \geq 2; \\ b_0 &= 0; \quad b_n = [\bar{h}_{-n} - (n+2) h_{n+2}] R_0^{-n}, \quad n \geq 1. \end{aligned} \quad (4)$$

Din prima relație (3) obținem și constanta (inutilă de altfel) $C_0 = 2\bar{h}_2 - h_0$.

Introducând acum (1) și (4) în (14.15), obținem

$$\begin{aligned}\varphi(\delta) &= \frac{1}{2} h_1(\delta/R_0) + \sum_{n=2}^{\infty} h_n(\delta/R_0)^n, \\ \psi(\delta) &= \sum_{n=1}^{\infty} [\bar{h}_{-n} - (n+2) h_{n+2}] (\delta/R_0)^n.\end{aligned}\quad (5)$$

(Pentru modul de a nota coeficienții, vezi și § A.9, pag. 763.) Convergența seriilor din (5) se demonstrează ușor (vezi finele § 14).

b) Metoda lui C. Iacob [7]

Este vorba de o metodă care permite să se rezolve aproape fără nici un calcul *problema biarmonică fundamentală*

$$\Delta\Delta A = 0, \quad A|_{\mathcal{L}_0} = F_1, \quad A_{,n}|_{\mathcal{L}_0} = F_2, \quad (6)$$

(unde \mathcal{L}_0 este frontiera discului circular \mathcal{D} de rază R_0), pentru date la limită

$$F_j(x_1, x_2) = R_j(x_1, x_2) \operatorname{Re} \{H_j(\delta)\}|_{\mathcal{L}_0}, \quad j = 1, 2, \quad (7)$$

R_j fiind funcții *raționale* și fără singularități pe \mathcal{L}_0 , în timp ce H_j sînt olo-morfe în \mathcal{D} și continue în $\mathcal{D} + \mathcal{L}_0$.

Soluția se caută sub forma reprezentării lui Almansi

$$A = A_1 + (R_0^2 - R^2)A_2, \quad \Delta A_1 = \Delta A_2 = 0, \quad (8)$$

iar funcțiile A_1, A_2 rezultă efectiv determinate prin intermediul funcțiilor H_j și al părților principale în \mathcal{D} ale unor anumite funcții care nu depind decît de R_j și H_j . Pentru $H_j \equiv 1$, se obține cazul particular important al datelor la limită raționale. Dacă F_j sînt polinoame, rezultă că $A(x_1, x_2)$ este de asemenea un polinom. (Vezi încă și § 5.17.)

Ținînd seama de indicațiile din §§ 4 și 7, acest rezultat poate fi direct adaptat la cerințele teoriei elasticității, privind nu determinarea funcției lui Airy, ci pe cea a funcțiilor lui Kolosov și Mushelișvili.

c) Disc circular cu o fisură punctuală centrală. Concentrarea tensiunilor

Cazul discului diferă esențial de cel al coroanei circulare cu $R_1 \rightarrow 0$, din cauza concentrării tensiunilor — fenomen deja întîlnit în studiul problemei antiplane. Pentru a-l pune în evidență, să comparăm tensiunile în origine pentru disc (care se obțin utilizînd (5)), cu tensiunile pe cercul

de rază R_1 în cazul coroanei circulare, pentru $R_1 \rightarrow 0$. Vom presupune că cercul interior \mathcal{L}_1 este liber — așa cum se petrec în general lucrurile pe frontiera unei fisuri.

Pentru disc, din (7.8) și (5) găsim în origine

$$\begin{aligned} S_0(0, 0) &= 4 \operatorname{Re} \varphi'(0) = 4 a_1 = 2 h_1 R_0^{-1}, \\ S(0, 0) &= 2 \psi'(0) = 2 b_1 = 2 (\bar{h}_{-1} - 3 h_3) R_0^{-1}. \end{aligned} \quad (9)$$

Pentru coroana circulară, obținem mai întâi (vezi și (14.3)) :

$$X^{(1)} = h_n^1 = \operatorname{Im} h_1^0 = 0, \quad l_n = h_n^0 R_0^n, \quad (10)$$

astfel că formulele (14.15) devin

$$\varphi(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n, \quad \psi(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n z^n. \quad (11)$$

Pe cercul \mathcal{L}_1 avem $z = R_1 \sigma$, $\bar{z} = R_1 \sigma^{-1}$, și deci

$$S_0|_{\mathcal{L}_1} = 4 \operatorname{Re} \sum_{n=-\infty}^{\infty} n a_n R_1^{n-1} \sigma^{n-1}, \quad (12)$$

$$S|_{\mathcal{L}_1} = 2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} [n(n-1) a_n R_1^{n-1} \sigma^{n-3} + n b_n R_1^{n-1} \sigma^{n-1}].$$

Or, din formulele din § 14 obținem mai întâi

$$a_0 = 0, \quad a_1 = \frac{1}{2} h_1^0 R_0 / (R_0^2 - R_1^2), \quad a_2 = h_2^0 R_0^2 / (R_0^4 - R_1^4), \quad (13)$$

$$b_0 = 0, \quad b_{-1} = -h_1^0 R_0 R_1^2 / (R_0^2 - R_1^2), \quad b_{-2} = -\bar{h}_2^0 R_0^2 R_1^4 / (R_0^4 - R_1^4).$$

Pentru $n \geq 3$ găsim

$$a_n = \{[(R_1/R_0)^{2n-4} - 1] R_0^n h_n^0 + (n-2)(R_0^2 - R_1^2) R_1^{2n-4} R_0^{-n+2} \bar{h}_{-n+2}^0\} : D_n,$$

$$a_{-n+2} = \{[(R_0^{2n} - R_1^{2n}) R_0^{-n+2} h_{-n+2}^0 - n(R_0^2 - R_1^2) R_0^n \bar{h}_n^0] R_1^{2n-4}\} : D_n, \quad (14)$$

$$D_n = n(n-2) R_1^{2n-4} (R_0^2 - R_1^2)^2 + (R_0^{2n} - R_1^{2n}) [(R_1/R_0)^{2n-4} - 1],$$

și respectiv

$$b_{n-2} = -\bar{a}_{-n+2} R_1^{-2n+4} - n a_n R_1^2, \quad b_{-n} = -\bar{a}_n R_1^{2n} + (n-2) a_{-n+2} R_1^2. \quad (15)$$

Trecînd la limită pentru $R_1 \rightarrow 0$, obținem

$$\begin{aligned} a_0 &= 0; \quad a_1 = \frac{1}{2} h_1^0 R_0^{-1}; \quad a_n = h_n^0 R_0^{-n}, \quad n \geq 2; \quad a_{-n} = 0, \quad n \geq 1; \\ b_{-n} &= 0, \quad n \geq 0; \quad b_n = [\bar{h}_{-n}^0 - (n+2) h_{n+2}^0] R_0^{-n}, \quad n \geq 1. \end{aligned} \quad (16)$$

Aceste valori coincid cu valorile (4) obținute pentru disc. Dar este evident că, pentru a calcula tensiunile, trebuie să folosim nu înseși funcțiile-limită $\varphi(\beta)$, $\psi(\beta)$ pentru $R_1 \rightarrow 0$, ci *derivatele* lor, așadar să ținem seama de limitele pentru $R_1 \rightarrow 0$ ale produselor $a_n R_1^{n-1}$ și $b_n R_1^{n-1}$, ce apar în (12). Subînțelegînd peste tot limita luată pentru $R_1 \rightarrow 0$, găsim

$$\lim a_1 = \frac{1}{2} h_1^0 R_0^{-1}; \quad \lim a_n R_1^{n-1} = 0 \quad \text{pentru } n \geq 1; \quad (17)$$

$$\lim a_{-n+2} R_1^{-n+1} = [-h_{-n+2}^0 + n \bar{h}_n^0] R_1^{-3} R_0^{-n+2} \quad \text{pentru } n \geq 3,$$

de unde, separat,

$$\lim a_{-1} R_1^{-2} = [-h_{-1}^0 + 3 \bar{h}_3^0] R_0^{-1}, \quad \lim a_{-n+2} R_1^{-n+1} = 0 \quad \text{pentru } n > 3. \quad (18)$$

Mai departe, din (13) obținem

$$\lim b_{-1} R_1^{-2} = -h_1^0 R_0^{-1}, \quad \lim b_{-2} R_1^{-3} = 0, \quad (19)$$

iar din (15) — unde $n \geq 3$ — căpătăm mai întîi

$$\begin{aligned} b_{-n} R_1^{-n-1} &= -\bar{a}_n R_1^{n-1} + (n-2) a_{-n+2} R_1^{-n+1}, \\ b_{n-2} R_1^{n-3} &= -\bar{a}_{-n+2} R_1^{-n+1} - n a_n R_1^{n-1}, \end{aligned}$$

ceea ce, ținînd seama de (17) și (18), dă în definitiv

$$\lim b_{-3} R_1^{-4} = [-h_{-1}^0 + 3 \bar{h}_3^0] R_0^{-1}, \quad \lim b_1 = [\bar{h}_{-1}^0 - 3 h_3^0] R_0^{-1}, \quad (20)$$

termenii corespunzători celorlalte valori ale indicelui n avînd limita zero.

După cum se vede, deși coeficienții a_{-1} , b_{-1} , b_{-3} din (16) au limita zero, componentele tensiunii conțin termeni (polari) care corespund acestor coeficienți. Obținem acum din (12)

$$\begin{aligned} \lim S_0|_{\mathcal{L}_1} &= 4 \lim \operatorname{Re} (a_1 - a_{-1} R_1^{-2} \sigma^{-2}), \\ \lim S|_{\mathcal{L}_1} &= 2 \lim (2 a_{-1} R_1^{-2} \sigma^{-4} + b_1 - b_{-1} R_1^{-2} \sigma^{-2} - 3 b_{-3} R_1^{-4} \sigma^{-4}), \end{aligned}$$

ceea ce permite să calculăm tensiunile-limită în origine

$$\begin{aligned} S_0(0, 0) &= 2 [h_1^0 + (h_{-1}^0 - 3 \bar{h}_3^0) \sigma^2 + (\bar{h}_{-1}^0 - 3 h_3^0) \sigma^{-2}] R_0^{-1}, \\ S(0, 0) &= 2 [\bar{h}_{-1}^0 - 3 h_3^0 + h_1^0 \sigma^{-2} + (h_{-1}^0 - 3 \bar{h}_3^0) \sigma^{-4}] R_0^{-1}. \end{aligned} \quad (21)$$

După cum era de așteptat, spre deosebire de cazul torsiunii și încovoierii — unde fenomenul concentrării tensiunilor e funcție exclusiv de configurația geometrică — aci termenii suplimentari în raport cu (9) depind în mod esențial de sarcina pe \mathcal{L}_0 .

Limitându-ne la cazul discului supus la presiune uniformă de intensitate $-p_0$, din (14.52) urmează $h_1^0 = -R_0 p_0$, ceilalți coeficienți fiind nuli. Considerînd aceeași problemă și pentru coroana circulară cu $R_1 \rightarrow 0$, obținem din (9) și (21):

$$\begin{cases} \text{pentru disc:} & S_0(0, 0) = -2p_0, \quad S(0, 0) = 0, \\ \text{pentru coroană:} & S_0(0, 0) = -2p_0, \quad S(0, 0) = -2p_0 \sigma^{-2}, \end{cases} \quad (22)$$

sau încă

$$\begin{cases} \text{pentru disc:} & \sigma_{11} = -p_0, \quad \sigma_{22} = -p_0, \quad \sigma_{12} = 0, \\ \text{pentru coroană:} & \sigma_{11} = -p_0(1 - \cos 2\chi), \\ & \sigma_{22} = -p_0(1 + \cos 2\chi), \quad \sigma_{12} = p_0 \sin 2\chi. \end{cases} \quad (23)$$

Prin urmare, nu numai repartiția locală de tensiuni este cu totul diferită, ci și condițiile de rezistență se deosebesc calitativ. Anume, întrucît în cazul discului avem $S = 0$, din (6.28) sau (6.29) rezultă că, pentru presiuni oricît de mari, corpul rămîne în starea elastică. Dimpotrivă, o fisură centrală oricît de mică obligă la considerarea condiției ce rezultă din (14.58) pentru $p_1 = 0$, $R_1 \rightarrow 0$. Ținînd seama de (14.59), deducem că trebuie să avem $2p_0 < 1,16 \sigma_e$, ceea ce limitează presiunea externă compatibilă cu starea de deformare elastică.

Pentru deplasări, introducînd (5) în (7.12) căpătăm în origine

$$2\mu U(0, 0) = \kappa \varphi(0) - \overline{\psi(0)} = 0. \quad (24)$$

Pe de altă parte, introducînd (11) în (7.12), deducem

$$2\mu U|_{\mathcal{L}_1} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [\kappa a_n R_1^n \sigma^n - n \bar{a}_n \sigma^{-n+2} - \bar{b}_n R_1^n \sigma^{-n}], \quad (25)$$

astfel că în expresia $\lim U|_{\mathcal{L}_1}$ (pentru $R_1 \rightarrow 0$) intervin valorile $\lim a_n R_1^n$ și $\lim b_n R_1^n$. Toate aceste limite sînt nule pentru termenii polari, astfel că deplasările nu se modifică în urma apariției unei fisuri punctuale centrale.

Caracterul local al fenomenului este evident: termenii suplimentari din (21) sînt termenii polari, cu atît mai importanți, cu cît $|z|$ este mai mic. (Vezi și § 5.15, pag. 247—248 și 259; § 5.20, pag. 312 și 326.)

Acest exemplu arată importanța proprietății de olomorfie: simplul fapt că coeficienții termenilor polari pot fi făcuți oricît de mici vrem, încă nu garantează împotriva apariției de tensiuni locale considerabile în vecinătatea unor fisuri, fie ele chiar microscopice.

d) Plan cu un orificiu circular

Raționînd ca și pentru cazul discului, vom lua acum $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1^-$, iar funcțiile lui Kolosov și Mushelișvili vor avea forma din (10.32). Renunțînd la indicele "1" relativ la mărimile de pe \mathcal{L}_1 , vom păstra numai notația R_1 . Prin urmare, avem mai întîi

$$a_n = b_n = 0, \quad n = 0, 2, 3, \dots, \quad (26)$$

iar ecuațiile (14.22)–(14.25), ținînd seama și de (10.36), devin

$$\begin{aligned} h_0 - [(\kappa - 1)/(\kappa + 1)] (X^{(1)}/2\pi) \ln R_1 + C_1 &= 0, \\ 2a_1 R_1^2 + \bar{b}_{-1} &= h_1 R_1, \\ \bar{b}_{-2} &= [h_2 + \overline{X^{(1)}/2\pi} (\kappa + 1)] R_1^2, \\ -(n - 2) \bar{a}_{-n+2} R_1^{-n+2} + \bar{b}_{-n} R_1^{-n} &= h_n, \quad n \geq 3, \end{aligned} \quad (27)$$

și încă, înlocuind în (14.25) pe n prin $-n$ (pentru $n \geq 1$):

$$\begin{aligned} a_{-1} R_1^{-1} + \bar{b}_1 R_1 &= h_{-1}, \\ a_{-n} R_1^{-n} &= h_{-n}, \quad n \geq 2. \end{aligned} \quad (28)$$

Întrucît \mathcal{D} nu este mărginit, torsorul forțelor superficiale nu este cu necesitate nul (vezi (14.4), (14.14)). În schimb, coeficienții a_1 , b_1 se pot determina numai cunoscînd valorile la infinit ale tensiunii (vezi (10.33), (10.35)). Prima relație (27) este evident superfluă. Mai departe, obținem pe rînd (constantele a'_1 , b'_1 și b''_1 fiind date în (10.35))

$$a_0 = 0; \quad a_1 = a'_1; \quad a_n = 0, \quad n \geq 2; \quad (29)$$

$$a_{-1} = h_{-1} R_1 - (b'_1 - i b''_1) R_1^2; \quad a_{-n} = h_{-n} R_1^n, \quad n \geq 2;$$

și încă

$$\begin{aligned} b_0 &= 0; \quad b_1 = b'_1 + i b''_1; \quad b_n = 0, \quad n \geq 2; \\ b_{-1} &= \bar{h}_1 R_1 - 2a'_1 R_1^2; \quad b_{-2} = [\bar{h}_2 + X^{(1)}/2\pi (\kappa + 1)] R_1^2; \\ b_{-3} &= [\bar{h}_3 + h_{-1} - (b'_1 - i b''_1) R_1] R_1^3; \\ b_{-n} &= [\bar{h}_n + (n - 2) h_{-n+2}] R_1^n, \quad n \geq 4. \end{aligned} \quad (30)$$

Introducând aceste valori în (10.32), avem deci

$$\begin{aligned}\varphi(z) &= -[X^{(1)}/2\pi(\kappa+1)] \ln z + a'_1 z - (b'_1 - i b''_1)(R_1^2/z) + \sum_{n=1}^{\infty} h_{-n}(R_1/z)^n, \\ \psi(z) &= [\kappa \overline{X^{(1)}}/2\pi(\kappa+1)] \ln z + (b'_1 + i b''_1) z - 2a'_1 R_1(R_1/z) + \\ &+ [X^{(1)}/2\pi(\kappa+1)] (R_1/z)^2 - (b'_1 - i b''_1) R_1(R_1/z)^3 + h_1(R_1/z) + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} [\bar{h}_n + (n-2) h_{-n+2}](R_1/z)^n.\end{aligned}\quad (31)$$

§ 16. PROBLEMA LUI NEUMANN. METODA SERIILOR. EXEMPLE

Vom examina aici unele cazuri simple de solicitare a unor domenii mărginite de o singură frontieră circulară, cazuri ușor de studiat prin metoda seriilor.

a) Disc supus la presiune uniformă pe frontieră

Acesta este un caz particular al problemei lui Lamé. În notațiile din § 14, avem $f(\chi) = -p \exp(i\chi)$ pe \mathcal{L}_0 , de unde $h_1 = -R_0 p$, ceilalți coeficienți fiind nuli. Din (15.4) urmează — ca și în (11.21) —

$$\varphi(z) = -\frac{1}{2} p z, \quad \psi(z) = 0, \quad (1)$$

astfel că formulele (7.8), (7.12) dau imediat

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = -p, \quad \sigma_{12} = 0, \quad u_1 + i u_2 = -[(\kappa-1)/4\mu] p (x_1 + i x_2). \quad (2)$$

Pentru $p < 0$, presiunea este înlocuită cu o întindere uniformă.

b) Discul lui Hertz

Fie că în două puncte oarecare de pe frontiera unui disc acționează două forțe concentrate. Alegând drept axă Ox_1 , bisectoarea unghiului la centru definit de cele două puncte, rezultă că forțele trebuie să fie egale, opuse, și paralele cu Ox_2 . Funcția $f(s)$ de considerat aici nu este integrabilă. Pentru a determina $h(s)$, vom privi forța aplicată în z_0 drept caz-limită al unei sarcini de moment nul față de z_0 , repartizate pe o porțiune mică a frontierei, și în așa fel încât rezultanta acestei sarcini să rămână constantă când facem ca lungimea arcului-frontieră solicitat să tindă la zero.

În acest caz, funcția $h(s) = i \int_0^s f(s) ds$ definită în (11.6) poate fi privită ca fiind constantă pe porțiunile libere ale frontierei, și discontinuă în δ , $\bar{\delta}_0$, saltul ei fiind dat de intensitatea sarcinii concentrate. Obținem astfel

$$h(\chi) = \begin{cases} 0 & \text{pentru } 0 \leq \chi < \chi_0, \\ P & \text{pentru } \chi_0 < \chi < 2\pi - \chi_0, \\ 0 & \text{pentru } 2\pi - \chi_0 < \chi \leq 2\pi. \end{cases} \quad (3)$$

OBSERVAȚIA 1. Modul de a raționa de mai sus este identic cu cel folosit pentru introducerea funcției δ a lui Dirac. (Vezi § A.2, pag. 689). Sarcina nu numai că nu posedă aci proprietățile de regularitate pretinse în § 14, pag. 437 și 444, dar nici măcar nu este reprezentabilă printr-o funcție, ci numai printr-o distribuție. Raționamentul ce urmează poate fi transcris — totuși fără simplificări esențiale — cu ajutorul funcției δ și al funcției lui Heaviside. Acestea sînt larg utilizate în problema — mai complicată — a coroanei circulare supuse acțiunii unor sarcini concentrate (vezi M. Narodețki [1]; I. Ustinov [1]; D. Vainberg [1]).

Întrucît rezultanta $X^{(0)}$ este evident nulă, deducem din (14.8)

$$h(\chi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n \exp(in\chi), \quad (4)$$

unde

$$h_n = \begin{cases} (P/\pi)(\pi - \chi_0) & \text{pentru } n = 0, \\ (iP/2\pi n) [\exp(in\chi_0) - \exp(-in\chi_0)] & \text{pentru } n \neq 0. \end{cases} \quad (5)$$

Introducînd (5) în (15.8), obținem mai întîi

$$\begin{aligned} \varphi(\delta) &= \frac{iP}{2\pi} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp(in\chi_0) - \exp(-in\chi_0)}{n} \left(\frac{\delta}{R_0}\right)^n - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} [\exp(i\chi_0) - \exp(-i\chi_0)] \frac{\delta}{R_0} \right\}, \\ \psi(\delta) &= \frac{iP}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{\exp(in\chi_0) - \exp(-in\chi_0)}{n} - [\exp(i(n+2)\chi_0) - \right. \\ &\quad \left. - \exp(-i(n+2)\chi_0)] \right\} \left(\frac{\delta}{R_0}\right)^n, \end{aligned} \quad (6)$$

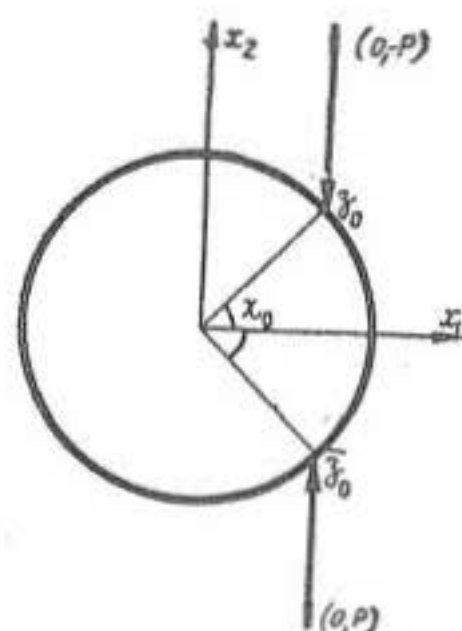


Fig. 6.16.1

unde evident avem $|\delta/R_0| < 1$ în \mathcal{D} . Întrucît pentru $|x| < 1$ avem

$$\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} x^n, \quad (1-x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad (7)$$

putem scrie pe rînd

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left[\frac{\delta \exp(i\chi_0)}{R_0} \right]^n = -\ln \left[1 - \frac{\delta \exp(i\chi_0)}{R_0} \right] = -\ln \frac{\bar{\delta}_0 - \delta}{\bar{\delta}_0}, \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} [\exp i(n+2)\chi_0] \left(\frac{\delta}{R_0} \right)^n &= \exp(2i\chi_0) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\delta \exp(i\chi_0)}{R_0} \right)^n = \\ &= \exp(2i\chi_0) \left\{ \left[1 - \frac{\delta \exp(i\chi_0)}{R_0} \right]^{-1} - 1 \right\} = \frac{\bar{\delta}_0}{\bar{\delta}_0 - \delta} - \exp(2i\chi_0), \end{aligned} \quad (9)$$

astfel că (6) devine

$$\varphi(\delta) = \frac{iP}{2\pi} \left[\ln \frac{\bar{\delta}_0 - \delta}{\bar{\delta}_0 - \delta} - \frac{\bar{\delta}_0 - \bar{\delta}_0}{2R_0} \frac{\delta}{R_0} \right] + \frac{P\chi_0}{\pi}, \quad (10)$$

$$\psi(\delta) = \frac{iP}{2\pi} \left[\ln \frac{\bar{\delta}_0 - \delta}{\bar{\delta}_0 - \delta} + \frac{\bar{\delta}_0}{\bar{\delta}_0 - \delta} - \frac{\bar{\delta}_0}{\bar{\delta}_0 - \delta} \right] + \frac{P\chi_0}{\pi} - \frac{P \sin 2\chi_0}{\pi}.$$

Componentele tensiunii și deplasării se calculează ușor — după care se poate constata că soluția satisface efectiv condițiile la limită considerate.

Cazul mai multor forțe concentrate va fi expus în § 22, exemplul *b*.

c) Plan cu un orificiu circular solicitat de o presiune uniformă

Acesta este de asemenea un caz particular al problemei lui Lamé. Din (14.50) avem $f = p \exp(i\chi)$, și deci din (11.8) urmează (abstracție făcînd de o constantă)

$$h(\chi) = -i \int_0^{\chi} f(s) ds = -ip R_1 \int_0^{\chi} \exp(is) ds = -p R_1 \exp(i\chi). \quad (11)$$

Comparînd (11) cu (14.8), deducem

$$X^{(1)} = 0, \quad h_1 = -p R_1, \quad h_n = 0 \text{ pentru } n \neq 1. \quad (12)$$

Presupunînd tensiunile nule la infinit, obținem acum din (15.29) — (15.31):

$$\varphi(\delta) = 0, \quad \psi(\delta) = -p R_1^2 \delta^{-1}. \quad (13)$$

După cum se vede, soluția este de natură cu totul diferită de cea din (1).

d) Forță concentrată aplicată în origine

Să considerăm problema planului cu un orificiu circular de frontieră $|\zeta| = R_1$, solicitat de o sarcină $f(s) = f = \text{const.}$ (A nu se confunda cu presiunea normală constantă!) Din (11.8) avem deci

$$h(\chi) = -i \int_0^\chi f ds = -if R_1 \chi, \quad (14)$$

iar din (10.16) urmează

$$X^{(1)} = \oint_{\mathcal{L}_1} f ds = 2\pi f R_1, \quad (15)$$

și deci

$$f(\chi) = X^{(1)}/2\pi R_1, \quad h(\chi) = -(X^{(1)}/2\pi)i\chi. \quad (16)$$

Prin comparație cu (14.8) deducem că toți coeficienții h_n sînt nuli. Dacă tensiunile sînt nule la infinit, deducem din (15.31)

$$\varphi(\zeta) = -\frac{X^{(1)}}{2\pi(\kappa+1)} \ln \zeta, \quad \psi(\zeta) = \frac{\kappa X^{(1)}}{2\pi(\kappa+1)} \ln \zeta + \frac{X^{(1)}}{2\pi(\kappa+1)} \frac{R_1^2}{\zeta^2}. \quad (17)$$

Ținînd seama de (8.12), obținem pe orice curbă închisă care conține în interior cercul $|\zeta| = R_1$, independent de raza acestuia :

$$R = -X^{(1)}, \quad \mathcal{M}_3 = 0, \quad (18)$$

așadar un sistem de tensiuni ce echilibrează o forță $X^{(1)}$ aplicată în origine. Pentru $R_1 \rightarrow 0$, căpătăm deci de aci soluția problemei planului elastic solicitat de o forță concentrată $X^{(1)}$ aplicată în origine.

Soluția (17) pentru $R_1 \rightarrow 0$ coincide cu (10.44), în afară de vecinătatea imediată a frontierei $|\zeta| = R_1$, unde al doilea termen din $\psi(\zeta)$ dat de (17) nu este neglijabil. Întrucît acesta corespunde însă unei sarcini auto-echilibrate, urmează că ambele soluții corespund acțiunii aceleiași forțe concentrate $X^{(1)}$. Cele două soluții sînt distincte, și totuși în egală măsură îndreptățite : amîndouă își pierd sensul pentru $|\zeta| \rightarrow 0$, și coincid pentru $R_1/|\zeta|$ neglijabil.

e) Moment concentrat aplicat în origine

Să considerăm frontiera circulară $|\zeta| = R_1$ solicitată de o sarcină tangențială de intensitate constantă, așadar avînd forma $f = ic\zeta$ (c — constantă reală). Din (11.8) avem deci — abstracție făcînd de o constantă neglijabilă —

$$h(\chi) = -i \int_0^\chi f R_1 d\chi = c R_1^2 \int_0^\chi \exp(i\chi) d\chi = -ic R_1^2 \exp(i\chi), \quad (19)$$

astfel că, comparînd cu (14.8), deducem

$$X^{(1)} = 0, \quad h_1 = -icR_1^2, \quad h_n = 0 \text{ pentru } n \neq 1. \quad (20)$$

Presupunînd că tensiunile la infinit sînt nule, din (15.31) căpătăm :

$$\varphi(z) = 0, \quad \psi(z) = icR_1^3 z^{-1}, \quad \chi(z) = icR_1^3 \ln z. \quad (21)$$

Ținînd seama de (8.12), obținem pe orice curbă închisă care conține în interior cercul $|z| = R_1$, independent de raza acestuia :

$$R = 0, \quad \mathcal{M}_3 = -2\pi cR_1^3, \quad (22)$$

astfel că (21) corespunde unui sistem de tensiuni ce echilibrează un cuplu de moment $2\pi cR_1^3$ aplicat în origine. Notînd cu $M_3^{(1)}$ momentul acestui din urmă cuplu, egal cu $-\mathcal{M}_3$, obținem $c = M_3^{(1)}/2\pi R_1^3$, astfel că (21) se reduce la (10.45) :

$$\varphi(z) = 0, \quad \psi(z) = (iM_3^{(1)}/2\pi)z^{-1}. \quad (23)$$

OBSERVAȚIA 2. În aceste două exemple, soluția problemei pentru sarcini concentrate rezultă deplin determinată (compară cu § 8, pct. c), datorită faptului că a fost ales un anumit mod de trecere la limită. Dar se poate alege cu totul altă structură a sarcinilor decît cea din (14), respectiv (19), păstrînd totuși intacte relația (15) și prima relație (20); se va ajunge atunci la cu totul alte funcții $\varphi(z)$, $\psi(z)$. Ținînd seama de (15.31) în (7.19), se vede că termenii ce corespund coeficienților h_n tind spre zero odată cu $R_1/|z|$; toate aceste soluții posibile sînt deci distincte, dar deosebirea între ele scade odată cu creșterea distanței la punctul singular.

Determinarea efectului unei sarcini concentrate se poate preciza și dacă dispunem de informații asupra comportării corpului la oarecare distanță de punctul singular (de ex., dacă cunoaștem vectorul tensiune pe un cerc cu centrul în acest punct). Aceasta revine la a se adopta o schemă mai exactă a fenomenului, decît cea redusă la simpla informație privitoare la punctul singular.

Pentru chestiunea sarcinilor concentrate, vezi și L. Milne-Thomson [2], § 4.11; N. Muskhelişvili [5], §§ 43 și 57.

f) Plan cu un orificiu circular liber. Concentrarea tensiunilor

În cazul de față avem $h(\chi) = 0$, $X^{(1)} = h_n = 0$, și starea elastică depinde de repartiția tensiunilor la infinit. Formulele (15.31) se reduc la

$$\varphi(z) = a'_1 z - (b'_1 - ib''_1) R_1^2 z^{-1}, \quad (24)$$

$$\psi(z) = (b'_1 + ib''_1) z - 2a'_1 R_1^2 z^{-1} - (b'_1 - ib''_1) R_1^4 z^{-3}.$$

Pentru o întindere la infinit după direcția Ox_1 ($\sigma_{11}^\infty = P_1$, $\sigma_{22}^\infty = \sigma_{12}^\infty = 0$), obținem (compară și cu (22.39))

$$\varphi(\zeta) = \frac{1}{2} P_1 \left(\frac{1}{2} \zeta + R_1^2 \zeta^{-1} \right), \quad \psi(\zeta) = -\frac{1}{2} P_1 (\zeta + R_1^2 \zeta^{-1} - R_1^4 \zeta^{-3}). \quad (25)$$

În cazul unei întinderi la infinit după direcția Ox_2 , se găsește

$$\varphi(\zeta) = \frac{1}{2} P_2 \left(\frac{1}{2} \zeta - R_1^2 \zeta^{-1} \right), \quad \psi(\zeta) = \frac{1}{2} P_2 (\zeta - R_1^2 \zeta^{-1} - R_1^4 \zeta^{-3}). \quad (26)$$

În fine, în cazul unei tensiuni de alunecare T la infinit, avem

$$\varphi(\zeta) = iT R_1^2 \zeta^{-1}, \quad \psi(\zeta) = iT (\zeta + R_1^4 \zeta^{-3}). \quad (27)$$

În particular, pentru $P_1 = P_2 = P$, obținem prin suprapunere din (25) și (26) soluția pentru întindere uniformă la infinit

$$\varphi(\zeta) = \frac{1}{2} P \zeta, \quad \psi(\zeta) = -P R_1^2 \zeta^{-1}, \quad (28)$$

iar dacă $P_1 = -P_2 = P$, atunci căpătăm

$$\varphi(\zeta) = P R_1^2 \zeta^{-1}, \quad \psi(\zeta) = -P (\zeta - R_1^4 \zeta^{-3}). \quad (29)$$

Formulele (27) și (29) trebuie să descrie aceeași stare (alunecare pură la infinit) în axe rotite unele față de celelalte de 45° (vezi § 3.4, pag. 91). Aceasta se verifică cu ajutorul formulelor (9.10) și (9.24), care devin

$$\zeta = [\exp(i\pi/4)] \zeta^1, \quad \varphi(\zeta) = [\exp(i\pi/4)] \varphi_1(\zeta^1), \quad \psi(\zeta) = [\exp(-i\pi/4)] \psi_1(\zeta^1). \quad (30)$$

Din (27) obținem mai întâi

$$\varphi_1(\zeta^1) = iT R_1^2 / \zeta^1 = iT \frac{R_1^2}{[\exp(-i\pi/4)] \zeta}, \quad (31)$$

$$\psi_1(\zeta^1) = iT \left\{ [\exp(-i\pi/4)] \zeta + \frac{R_1^4}{[\exp(-3i\pi/4)] \zeta^3} \right\},$$

de unde soluția, care coincide cu (29) pentru $P = -T$:

$$[\exp(i\pi/4)] \varphi_1(\zeta^1) = -T R_1^2 \zeta^{-1}, \quad [\exp(-i\pi/4)] \psi_1(\zeta^1) = T (\zeta - R_1^4 \zeta^{-3}). \quad (32)$$

Formulele (24)–(32) rezolvă problema concentrării de tensiuni în vecinătatea unui orificiu circular liber, într-un corp de dimensiuni suficient de mari față de cele ale orificiului.

Limitându-ne pentru exemplificare la cazul planului cu un orificiu circular liber, supus la infinit la o întindere $\sigma_{11}^\infty = P_1 > 0$, să determinăm mărimea $|S|$, ale cărei valori maxime caracterizează punctele cele mai solicitate.

Vom atribui în general un indice (i) (stare *inițială*) soluției corespunzătoare corpului *fără* orificiu, supus aceleiași sarcini, și un indice (p) termenilor *perturbatori* datorăți prezenței orificiului; soluția problemei cercetate, așadar suma termenilor (i) și (p) , se va scrie fără vre-un indice suplimentar.

În cazul planului fără orificiu, din (10.32) urmează (întrucât funcțiile lui Kolosov și Muskhelișvili sînt acum olomorfe inclusiv în origine) că avem $\varphi^{(i)}(z) = a_1 z$, $\psi^{(i)}(z) = b_1 z$, unde, ținînd seama de (10.35), (10.36), trebuie să punem $a_1 = P_1/4$, $b_1 = -P_1/2$.

Funcțiile lui Kolosov și Muskhelișvili se scriu deci

$$\varphi^{(i)}(z) = \frac{1}{4} P_1 z, \quad \psi^{(i)}(z) = -\frac{1}{2} P_1 z, \quad (33)$$

iar criteriul de plasticitate (7.28) conduce la valoarea constantă

$$|S^{(i)}| = P_1. \quad (34)$$

Pe de altă parte, introducînd (25) în (7.28), obținem

$$|S| = P_1 |1 - [1 + 2(\bar{z}/z) - 3(R_1^2/z^2)](R_1^2/z^2)|. \quad (35)$$

Se poate demonstra că punctele cele mai solicitate sînt situate pe \mathcal{L} . De altfel, din formula (35) se vede că pe măsură ce $|z|$ crește, $|S|$ tinde către valoarea sa din planul solicitat la infinit, *fără* orificiu. Termenul perturbator scade proporțional cu *pătratul* raportului $R_1/|z|$. Toate acestea subliniază caracterul *local* al fenomenului, care e din nou un fenomen de concentrare a tensiunilor.

Să determinăm maximul funcției (35) în puncte $z = R_1 \exp(i\chi)$. Obținem mai întîi

$$|S|_{\mathcal{L}_1} = P_1 |1 - \exp(-2i\chi) + \exp(-4i\chi)| = |P_1| |1 - 2\cos 2\chi|. \quad (36)$$

Maximul acestei funcții este atins pentru $\chi = \pm \pi/2$, așadar în punctele $z = \pm i R_1$. Punctele de maximă solicitare sînt deci situate la capetele aceluiași diametru al frontierei orificiului, care este perpendicular pe direcția sarcinii la infinit. În aceste puncte avem

$$|S|_{\mathcal{L}_1}^{\max} = 3 P_1, \quad (37)$$

ceea ce reprezintă o valoare de trei ori mai mare decît cea din (34).

Ținînd încă seama în (7.27) de expresiile (33) și (25), obținem pentru componenta normală a tensiunii pe direcția de acțiune a sarcinii la infinit

$$\sigma_{11}^{(i)} = P_1, \quad \sigma_{11} = P_1 \operatorname{Re} \left[1 - \frac{3}{2} (R_1^2/z^2) - R_1^2 (\bar{z}/z^3) + \frac{3}{2} (R_1^4/z^4) \right]. \quad (38)$$

Calculind valoarea σ_{11} în lungul axei Ox_2 (care trece prin punctele de maximă solici-tare), căpătăm în diferite puncte valorile din tabel:

$ z /R_1$	1,0	1,5	2,0	3,0
σ_{11}/P_1	3	1,52	1,22	1,07

Faptul că datorită prezenței orificiului atât $|S|$ cât și σ_{11} cresc tot de trei ori în $z = \pm iR_1$ nu este aci întâmplător; pe \mathcal{L} , în aceste puncte avem $\sigma_{22} = \sigma_{12} = 0$. În general însă, coeficientul de concentrare rezultă diferit, după cum se calculează tensiunea normală maximă (importantă în special la corpurile casante), sau valoarea $|S|$ (al cărei maxim ne interesează mai ales în cazul unui corp elasto-plastic). (Compară de ex. cu § 14, pag. 445 — 446. Vezi și mai departe § 8.6, pag. 587.)

§ 17. PROBLEMA LUI NEUMANN PENTRU COROANA CIRCULARĂ. METODA INTEGRALELOR DE TIP CAUCHY (METODA LUI MILNE-THOMSON)

După cum am văzut în studiul problemei anti-plane, utilizarea integralelor de tip Cauchy este adesea susceptibilă de a simplifica considerabil calculele. Vom expune aci soluția dată de L. Milne-Thomson [2], § 5.5 (vezi și Corrigenda), pentru domeniul \mathcal{D} mărginit de două cercuri concentrice $\mathcal{L}_0, \mathcal{L}_1$.

a) Domeniu cu frontieră circulară

Să considerăm deocamdată domeniul (mărginit sau nu) ce are drept frontieră cercul \mathcal{L}_0 . Trecerea la coordonate polare se efectuează cu ajutorul formulelor (9.16), (9.20), unde unghiul ϑ coincide cu χ , iar componentele tensiunii se notează acum cu $\widehat{RR}, \widehat{R\chi}, \widehat{\chi\chi}$ (vezi § 4.1, pag. 121).

Scăzînd termen cu termen relațiile menționate, avem mai întîi

$$2(\widehat{RR} - i\widehat{R\chi}) = S_0 - S \exp(2i\chi). \quad (1)$$

Trecînd la cantități complex conjugate, ținînd seama de (7.7), (7.8) și de faptul că pe orice cerc avem $\exp(2i\chi) = z/\bar{z}$, vom scrie (1) sub forma

$$\widehat{RR} + i\widehat{R\chi} = \Phi(z) + \overline{\Phi(\bar{z})} - \bar{z}\overline{\Phi'(z)} - (\bar{z}/z)\overline{\Psi(\bar{z})}. \quad (2)$$

Să introducem notația

$$\bar{F}(z) \equiv \overline{F(\bar{z})}. \quad (3)$$

Aceasta înseamnă că, dacă $F(z) = \sum F_n z^n$, atunci $\overline{F}(z) = \sum \overline{F_n} z^n$. Din (3) urmează evident și $\overline{F(\bar{z})} = \overline{F}(z)$. Cu aceasta, (2) va lua forma

$$\widehat{RR} + i\widehat{R\chi} = \Phi(z) + \overline{\Phi}(\bar{z}) - \bar{z}\overline{\Phi}'(\bar{z}) - (\bar{z}/z)\overline{\Psi}(\bar{z}). \quad (4)$$

Să asociem acum punctului z , punctul $Z = R_0^2/\bar{z} = (R_0^2/R) \exp(i\chi)$, simetric lui față de cercul \mathcal{L}_0 (compară cu § A.11, pag. 781, unde $R_0=1$). În mod evident, dacă $z \in \mathcal{D}_0^+$, atunci $Z \in \mathcal{D}_0^-$ și reciproc; iar dacă $z \rightarrow t \in \mathcal{L}_0$, atunci avem și $Z \rightarrow t$.

Să considerăm acum funcția ce se obține din membrul al doilea al relației (4), dacă înlocuim pe z prin Z (lăsând însă pe \bar{z} intact), și dacă egalăm această expresie cu zero. După această operație *strict formală*, căpătăm mai întâi

$$\Phi(Z) + \overline{\Phi}(\bar{z}) - \bar{z}\overline{\Phi}'(\bar{z}) - (\bar{z}/Z)\overline{\Psi}(\bar{z}) = 0, \quad (5)$$

ceea ce se va scrie sub forma

$$\begin{aligned} \Phi(Z) &= -\overline{\Phi}(\bar{z}) + \bar{z}\overline{\Phi}'(\bar{z}) + (\bar{z}^2/R_0^2)\overline{\Psi}(\bar{z}) \\ \text{pentru } \begin{cases} z \in \mathcal{D}_0^+, Z = R_0^2/\bar{z} \in \mathcal{D}_0^-, \\ \text{sau} \\ z \in \mathcal{D}_0^-, Z = R_0^2/\bar{z} \in \mathcal{D}_0^+. \end{cases} \end{aligned} \quad (6)$$

Această relație *definește* funcția Φ (inițial dată numai în \mathcal{D}_0^+ sau în \mathcal{D}_0^-) în tot planul cu o tăietură în lungul cercului \mathcal{L}_0 .

Să amintim acum că din (10.22) și (10.32) urmează că funcțiile $\Phi(z)$, $\Psi(z)$ sînt olomorfe în domeniul (mărginit sau nu) ocupat de corpul elastic, exceptînd cel mult poli de ordin zero la infinit.

Prin urmare, dacă acest domeniu este cercul \mathcal{D}_0^+ , relația (6) arată că $\Phi(Z)$ este olomorfă pentru $Z \in \mathcal{D}_0^-$, cu excepția punctului de la infinit, unde ea are eventual un pol de ordin zero (provenit din termenul $-\overline{\Phi}(\bar{z})$). Dimpotrivă, dacă corpul ocupă domeniul \mathcal{D}_0^- , atunci funcțiile $\overline{\Phi}(\bar{z})$ și $\overline{\Psi}(\bar{z})$ au forma unor dezvoltări în serii după puterile negative ale lui \bar{z} (așadar, după puterile pozitive ale lui Z), și funcția $\Phi(Z)$ este olomorfă în \mathcal{D}_0^+ , cu excepția originii, unde ea poate avea un pol de ordin cel mult 2.

Să scădem acum termen cu termen relațiile (2) și (5), ceea ce dă

$$\widehat{RR} + i\widehat{R\chi} = \Phi(z) - \Phi(Z) - \bar{z}(z^{-1} - Z^{-1})\overline{\Psi}(\bar{z}). \quad (7)$$

Luînd aci $z \rightarrow t \in \mathcal{L}_0$, avem totodată și $Z \rightarrow t$, și deci

$$\widehat{RR} + i\widehat{R\chi}|_{\mathcal{L}_0} = \Phi_+(t) - \Phi_-(t) \quad (8)$$

(dacă, de ex., domeniul ocupat de corp este \mathcal{D}_0^+).

Prin urmare, funcția $\Phi(z)$ trebuie determinată din condiția ca ea să fie olomorfă pe porțiuni în tot planul (exceptînd eventual origina și

punctul de la infinit), iar la traversarea lui \mathcal{L}_0 , valoarea saltului să fie egală în fiecare punct cu tensiunea complexă. (Se vede că porțiunile libere ale frontierei sînt porțiuni prin care funcția se prelungește prin continuitate din \mathcal{D}_0^+ în \mathcal{D}_0^- ; compară cu § A.11, pag. 782.)

Or, din prima formulă (A.11.9) rezultă că funcția $\tilde{\Phi}$, olomorfă pe porțiuni în tot planul, nulă la infinit, și care verifică relația (8), este chiar integrala de tip Cauchy (A.11.1):

$$\tilde{\Phi}(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{L}_0} \frac{\overline{R}R + i\overline{R}\chi}{t - z} dt. \quad (9)$$

Prin urmare, soluția problemei considerate și care posedă singularitățile menționate, este funcția

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{L}_0} \frac{\overline{R}R + i\overline{R}\chi}{t - z} dt + A_0 + A_{-1}z^{-1} + A_{-2}z^{-2}, \quad (10)$$

unde $A_0 = \overline{A}_0$ (vezi (10.36)); dacă corpul elastic ocupă domeniul \mathcal{D}_0^+ , atunci avem și $A_{-1} = A_{-2} = 0$. Menționăm că sensul de integrare este întotdeauna cel direct; în cazul domeniului \mathcal{D}_0^- , trebuie schimbat sensul normalei.

După ce funcția $\Phi(z)$ a fost găsită, din relația (6) obținem

$$\Psi(z) = (R_0^2/z^2) [\overline{\Phi}(R_0^2/z) + \Phi(z) - z\Phi'(z)]. \quad (11)$$

Desigur, funcția $\Phi(z)$ are expresii analitice diferite în \mathcal{D}_0^+ și \mathcal{D}_0^- , fapt care trebuie ținut în seamă cînd se utilizează formula (11).

De asemenea, se vede ușor că dacă înlocuim Z prin z , va trebui să înlocuim și $\bar{z} = R_0^2/Z$ prin R_0^2/z , și atunci formula (6) va deveni

$$\Phi(z) = -\overline{\Phi}(R_0^2/z) + (R_0^2/z)\overline{\Phi}'(R_0^2/z) + (R_0^2/z^2)\overline{\Psi}(R_0^2/z). \quad (12)$$

b) Problema coroanei circulare

Să facem uz acum de formulele (11) și (12) atît relativ la cercul frontieră exterior \mathcal{L}_0 , cît și la cel interior \mathcal{L}_1 al coroanei considerate \mathcal{D} . Din (12) obținem

$$\Phi(z) = -\overline{\Phi}(R_0^2/z) + (R_0^2/z)\overline{\Phi}'(R_0^2/z) + (R_0^2/z^2)\overline{\Psi}(R_0^2/z), \text{ pentru } R_0^2/z \in \mathcal{D}, \quad (13)$$

$$\Phi(z) = -\overline{\Phi}(R_1^2/z) + (R_1^2/z)\overline{\Phi}'(R_1^2/z) + (R_1^2/z^2)\overline{\Psi}(R_1^2/z), \text{ pentru } R_1^2/z \in \mathcal{D},$$

unde am scos în evidență faptul că argumentul funcțiilor din membrul al doilea trebuie să fie situat în domeniul în care aceste funcții sînt olo-

morfe. De aci rezultă că prima relație (13) este valabilă pentru $(R_0^2/R_1) > R > R_0$, iar cea de-a doua este valabilă pentru $R_1 > R > (R_1^2/R_0)$. În ce privește relația (11), ea capătă formele

$$\begin{aligned}\Psi(z) &= (R_0^2/z^2) [\bar{\Phi}(R_0^2/z) + \Phi(z) - z\Phi'(z)] \quad \text{pentru } z \in \mathcal{D}, \\ \Psi(z) &= (R_1^2/z^2) [\bar{\Phi}(R_1^2/z) + \Phi(z) - z\Phi'(z)] \quad \text{pentru } z \in \mathcal{D},\end{aligned}\quad (14)$$

simultan valabile în coroana \mathcal{D} . De aci rezultă identitatea lui Milne-Thomson

$$(R_0^2 - R_1^2) [\Phi(z) - z\Phi'(z)] = R_1^2 \bar{\Phi}(R_1^2/z) - R_0^2 \bar{\Phi}(R_0^2/z) \quad \text{pentru } z \in \mathcal{D}. \quad (15)$$

Fie acum date valorile la limită ale tensiunii complexe $\widehat{RR} + i\widehat{R\chi}$ pe \mathcal{L}_0 și \mathcal{L}_1 . Condiția la limită a problemei se va scrie (vezi (8)):

$$\begin{aligned}\Phi_{\mathcal{D}}(t) - \Phi_{\infty}(t) &= \widehat{RR} + i\widehat{R\chi} \quad \text{pe } \mathcal{L}_0, \\ \Phi_{\mathcal{D}}(t) - \Phi_0(t) &= \widehat{RR} + i\widehat{R\chi} \quad \text{pe } \mathcal{L}_1,\end{aligned}\quad (16)$$

unde am atribuit indicii 0, \mathcal{D} și ∞ valorilor la limită dinspre \mathcal{D}_1^+ (care conține originea), dinspre \mathcal{D} , respectiv dinspre \mathcal{D}_0^- (a cărei frontieră conține punctul de la infinit).

Să construim funcția $\Phi(z)$ definită pe porțiuni precum urmează:

$$\Phi_{\infty}(z) = A(z) \quad \text{pentru } z \in \mathcal{D}_0^-, \quad (17)$$

$$\Phi_{\mathcal{D}}(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{L}_0} \frac{\widehat{RR} + i\widehat{R\chi}}{t - z} dt + A(z) \quad \text{pentru } z \in \mathcal{D}, \quad (18)$$

$$\begin{aligned}\Phi_0(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{L}_0} \frac{\widehat{RR} + i\widehat{R\chi}}{t - z} dt + \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{L}_1} \frac{\widehat{RR} + i\widehat{R\chi}}{t - z} dt + A(z) \\ &\quad \text{pentru } z \in \mathcal{D}_1^+, \quad (19)\end{aligned}$$

unde în integranți apar tensiunile *exterioare* aplicate pe frontieră, iar $A(z)$ este continuă în coroana de raze R_0^2/R_1 și R_1^2/R_0 . Dat fiind că integralele de pe \mathcal{L}_0 (respectiv \mathcal{L}_1) sînt continue la traversarea curbei \mathcal{L}_1 (respectiv \mathcal{L}_0), urmează că funcția definită în (17)–(19) verifică condițiile (16). În ce privește funcția $A(z)$ ea trebuie determinată cu ajutorul identității (15). Întrucît pentru $z \in \mathcal{D}$ avem $R_1^2/z \in \mathcal{D}_1^+$ și $R_0^2/z \in \mathcal{D}_0^-$, urmează că în primul membru din (15) trebuie să utilizăm formula (18), iar în cel de-al doilea, formulele (19) și (17).

c) Exemplu. Problema lui Lamé

Ne mărginim la a exemplifica această tehnică pe o problemă deja cercetată (vezi § 14, pag. 445). Prin ipoteză avem

$$\widehat{RR} + i \widehat{R\chi} = \begin{cases} -p_0 & \text{pe } \mathcal{L}_0, \\ p_1 & \text{pe } \mathcal{L}_1. \end{cases} \quad (20)$$

Ținând seama și de (A.10.14), obținem din (17)–(19) expresiile

$$\Phi_\infty(\zeta) = A(\zeta) \quad \text{pentru } \zeta \in \mathcal{D}_0^-, \quad (21)$$

$$\Phi_{\mathcal{D}}(\zeta) = -p_0 + A(\zeta) \quad \text{pentru } \zeta \in \mathcal{D}, \quad (22)$$

$$\Phi_0(\zeta) = -p_0 + p_1 + A(\zeta) \quad \text{pentru } \zeta \in \mathcal{D}_1^+. \quad (23)$$

Introducând aceste expresii în identitatea (15), căpătăm

$$A(\zeta) = A_0 = \frac{1}{2} p_0 - \frac{1}{2} R_1^2(p_0 - p_1)/(R_0^2 - R_1^2), \quad (24)$$

astfel că din (22) urmează

$$\Phi(\zeta) = \frac{1}{2} (R_1^2 p_1 - R_0^2 p_0)/(R_0^2 - R_1^2), \quad \zeta \in \mathcal{D}. \quad (25)$$

Pentru a găsi pe $\Psi(\zeta)$, putem face uz de oricare din relațiile (14), de pildă de prima. Pentru aceasta, din (21) deducem mai întâi

$$\Phi_\infty(\zeta) = A_0, \quad \zeta \in \mathcal{D}_0^-. \quad (26)$$

Introducând acum (22) și (24)–(26) în (14), căpătăm

$$\Psi(\zeta) = -\frac{1}{2} [R_0^2 R_1^2 (p_0 - p_1)/(R_0^2 - R_1^2)] \zeta^{-2}, \quad \zeta \in \mathcal{D}. \quad (27)$$

Comparind (25) și (27) cu (14.57), constatăm că rezultatele coincid.

d) Concluzii

Metoda integralelor de tip Cauchy își manifestă superioritatea atunci când dezvoltarea în serie Fourier a datelor la limită conține mulți, eventual o infinitate de termeni. Totuși, determinarea funcției $A(\zeta)$ obligă întotdeauna la scrierea primilor termeni din aceste dezvoltări. Mai mult chiar: dacă sarcina prezintă singularități în \mathcal{D} , pot apare cazuri în care funcția $A(\zeta)$ să trebuiască aleasă sub forma unei serii Laurent—și atunci avantajele metodei integralelor de tip Cauchy sînt în fapt reduse la zero. (Un astfel de exemplu este prezentat de T. Mitchell și W. Warren [1].)

În legătură cu această metodă, vezi încă V. Buchwald [1], [2], și V. Buchwald și G. Davies [1].

§ 18. TRANSFORMAREA RELAȚIILOR ELASTICITĂȚII PLANE PRIN INTERMEDIUL REPREZENTĂRII CONFORME

Studiul problemelor din §§ 14—17 prezintă în sine un interes relativ redus. Importanța sa deosebită stă însă în faptul că el permite rezolvarea aceluiași probleme pentru *orice* domenii ce pot fi reprezentate conform pe o coroană circulară (sau pe un disc). Cazul domeniilor mărginite de o singură curbă este cel mai simplu; în schimb, dificultățile devin considerabile pentru domenii de ordin de conexiune superior lui 2.

Ca și în cazul problemei anti-plane (vezi §§ 5.17 și 5.21), începem prin a transcrie în coordonate naturale relațiile necesare. Fie deci

$$z = \omega(\zeta) \quad (1)$$

funcția ce reprezintă conform discul unitate, o coroană circulară, sau discul unitate cu un număr de orificii circulare din planul ζ , — pe domeniul considerat \mathcal{D} din planul z . Inversa acestei funcții este

$$\zeta = \omega^{-1}(z). \quad (2)$$

Ca și în (A.7.4), vom scrie

$$\varphi_{(1)}(z) = \varphi(\zeta), \quad \psi_{(1)}(z) = \psi(\zeta), \quad (3)$$

$$\varphi'_{(1)}(z) = \varphi'(\zeta)/\omega'(\zeta), \quad \psi'_{(1)}(z) = \psi'(\zeta)/\omega'(\zeta). \quad (4)$$

Folosind notațiile (7.7) avem deci în planul ζ relațiile

$$\Phi_{(1)}(z) = \Phi(\zeta) = \varphi'(\zeta)/\omega'(\zeta), \quad \Psi_{(1)}(z) = \Psi(\zeta) = \psi'(\zeta)/\omega'(\zeta), \quad (5)$$

diferite de cele analoge din planul z .

Formulele fundamentale (7.8) și (7.12) devin acum

$$S_0 = 4 \operatorname{Re}[\varphi'(\zeta)/\omega'(\zeta)], \quad S = 2 \{ [\overline{\omega(\zeta)}/\omega'(\zeta)] \Phi'(\zeta) + \psi'(\zeta)/\omega'(\zeta) \}, \quad (6)$$

$$2\mu U = \kappa \varphi(\zeta) - [\omega(\zeta)/\overline{\omega'(\zeta)}] \overline{\varphi'(\zeta)} - \overline{\psi(\zeta)}.$$

Evident, acestea sînt componente în *coordonate carteziane*, transcrise cu ajutorul funcțiilor lui Kolosov și Mushelișvili exprimate în coordonate naturale. Pentru a obține deplasările și tensiunile în coordonate naturale, este suficient să facem uz de formulele (A.7.7), (A.7.8) și (9.21)—(9.24).

Dacă funcția (2) poate fi scrisă explicit, din (6) obținem efectiv componentele tensiunii și deplasării în planul z . În caz contrar, relațiile (6) și (1) dau soluția problemei sub formă parametrică. Cu aceasta, problema este redusă la cea a determinării funcțiilor $\varphi(\zeta)$, $\psi(\zeta)$ din condițiile (11.1) sau (11.7), transcrise în coordonate naturale.

Desigur, datele la limită trebuie și ele convenabil transcrise în prealabil. Astfel de exemplu, vom avea

$$g_{(1)}(s) = g_{(1)}(\bar{t}, \bar{\bar{t}}) = g_{(1)}[\omega(\zeta), \overline{\omega(\zeta)}]_{|L} = g(\zeta, \bar{\zeta})_{|L}, \quad (7)$$

și o relație analogă pentru $h_{(1)}(s)$. Dacă \mathcal{D} e reprezentabil conform pe un disc, frontiera J este desigur γ , iar funcția $g(\zeta, \bar{\zeta})|_J$ se poate scrie $g(\sigma)$.

Întrucît în cazul problemei lui Neumann este dată numai funcția $f_{(1)}(s)$, va trebui fie să scriem mai întîi pe $h_{(1)}(s)$ și apoi să raționăm ca în (7), fie să explicităm $f(\zeta, \bar{\zeta})|_J$ și apoi să integrăm în raport cu ds , ținînd seama de (A.7.14) și de valoarea la limită din (1). (Dacă \mathcal{D} este dublu conex, este ușor de găsit relația care înlocuiește pe (A.7.14).)

În felul acesta, obținem pentru problema lui Dirichlet

$$\kappa\varphi(\zeta) - [\omega(\zeta)/\overline{\omega'(\zeta)}] \overline{\varphi'(\zeta)} - \overline{\psi(\zeta)} = 2\mu g(\zeta, \bar{\zeta}) \text{ pe } J, \quad (8)$$

respectiv pentru problema lui Neumann

$$\varphi(\zeta) + [\omega(\zeta)/\overline{\omega'(\zeta)}] \overline{\varphi'(\zeta)} + \overline{\psi(\zeta)} = h(\zeta, \bar{\zeta}) + \text{const. pe } J. \quad (9)$$

Ambele condiții la limită pot fi grupate sub forma

$$H\varphi(\zeta) + [\omega(\zeta)/\overline{\omega'(\zeta)}] \overline{\varphi'(\zeta)} + \overline{\psi(\zeta)} = H(\zeta, \bar{\zeta}) \text{ pe } J, \quad (10)$$

unde va trebui să luăm

$$\text{pentru problema lui Dirichlet : } H = -\kappa, \quad H(\zeta, \bar{\zeta}) = 2\mu g(\zeta, \bar{\zeta}) \text{ pe } J, \quad (11)$$

$$\text{pentru problema lui Neumann : } H = 1, \quad H(\zeta, \bar{\zeta}) = h(\zeta, \bar{\zeta}) + \text{const pe } J.$$

Să ne limităm acum la cazul unui domeniu *mărginit* și *dublu conex* reprezentabil conform pe o coroană. Părțile olomorfe ce intră în structura funcțiilor φ, ψ vor fi căutate sub forma ⁷⁾

$$\varphi_0(\zeta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \zeta^n, \quad \psi_0(\zeta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \zeta^n. \quad (12)$$

Întrucît în acest caz avem și

$$\omega(\zeta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \omega_n \zeta^n, \quad (13)$$

și întrucît $\omega'(\zeta) \neq 0$ atît în coroană *cît și pe frontiera ei* (în cadrul ipotezei admise în (A.6.5), așadar cu siguranță pentru frontiere \mathcal{L} de clasă C^2), este evident că valorile la limită ale expresiei $\omega(\zeta)/\overline{\omega'(\zeta)}$ pe cercurile frontieră J_0, J_1 , unde avem desigur

$$\zeta|_{J_0} = \rho_0 \sigma, \quad \zeta|_{J_1} = \rho_1 \sigma, \quad (14)$$

pot fi puse sub forma unor dezvoltări în serii după puterile lui $\sigma = \exp(i\theta)$.

Procedînd în același mod cu valorile la limită ale funcțiilor (12) și dezvoltînd și datele la limită $H_0(\zeta, \bar{\zeta})$ (modificate așa cum rezultă din (11.3))

⁷⁾ Subliniem că pentru coeficienții funcțiilor $\varphi_{(1)}(\beta), \psi_{(1)}(\beta)$ și $\varphi(\zeta), \psi(\zeta)$ păstrăm aceleași notații a_n, b_n ca în (14)-(15)—deși pentru cei ai funcțiilor transformate în planul ζ ar fi poate mai potrivită notația α_n, β_n sau φ_n, ψ_n .

sau (11.11)) pe \mathcal{J} în serii Fourier, sîntem conduși la un proces de identificare a coeficienților, asemănător celui din § 14. Prezența produsului a două serii $\{[\omega(\zeta)/\omega'(\zeta)]\overline{\varphi'(\zeta)}\}_{\mathcal{J}}$ face însă ca coeficienții fiecărei puteri σ^n să conțină în general o *infinitate* de coeficienți a_n . Astfel, în locul unui șir de sisteme separate de ecuații cu un număr finit de necunoscute fiecare (de ex. cîte două în cazul coroanei circulare), obținem un *sistem infinit* de ecuații algebrice liniare cu o infinitate de necunoscute (vezi de exemplu I. Sokolnikoff [2], § 76).

Există cazuri în care acest sistem se descompune într-un șir de sisteme finite. Așa se petrec lucrurile dacă raportul $\omega(\zeta)/\omega'(\zeta)$ pe \mathcal{J} este un polinom în σ , sau dacă $\omega(\zeta)$ este un polinom sau chiar o funcție rațională. În toate aceste cazuri, raportul în chestiune se scrie ca un cît de polinoame $P_1(\sigma)/P_2(\sigma)$. Înmulțind ambii membri din (10) cu $P_2(\sigma)$, obținem pentru fiecare termen în σ^n , un coeficient în care intervin numai un număr finit de coeficienți a_n, b_n . Uneori însă ecuațiile astfel obținute nu permit determinarea univocă a soluției, și condiții suplimentare (de pildă, condiția de convergență a seriilor Taylor sau Laurent corespunzătoare) duc în ultimă instanță din nou la necesitatea de a considera totuși sisteme infinite de ecuații. (Vezi cele două exemple din § 19, distincte din acest punct de vedere.)

Problema domeniilor simplu conexe reprezentabile conform prin funcții polinomiale va fi examinată amănunțit — pe altă cale — în § 21.

Dacă $\omega(\zeta)$ nu este rațională, atunci fie se poate face uz de o reprezentare conformă aproximativă corespunzător aleasă (vezi finele § A.6), fie sistemul infinit de ecuații la care se ajunge trebuie studiat ca atare.

Desigur, nu toate constantele a_n, b_n pot și trebuie să fie determinate. Ținînd seama de (9.4), rezultă de pildă că în cazul problemei lui Neumann putem adăuga funcțiilor $\varphi(\zeta), \psi(\zeta)$, o funcție de forma $iC\omega(\zeta) + \gamma$, respectiv γ' , (γ, γ' — constante complexe; C — constantă reală).

Raționamentele din §§ 14—17 arată că primele două probleme fundamentale se rezolvă relativ elementar pentru discul și coroana circulară; singurele operații de integrare cerute sînt cele necesare pentru calcularea coeficienților Fourier ai datelor la limită.

Raționamentele din paragraful de față arată atunci că, *dacă* reprezentarea conformă a domeniului \mathcal{D} pe discul unitate sau pe o coroană circulară este cunoscută, atunci problemele lui Dirichlet și Neumann se rezolvă aproape tot atît de simplu. Prin urmare, dificultatea nu rezidă în rezolvarea problemei plane (sau a ecuației *biarmonice*) pentru un domeniu dat — ci în găsirea reprezentării conforme a acelui domeniu pe un domeniu canonic adecvat (așadar, în principiu, la rezolvarea ecuației *armonice* pentru același domeniu).

Metoda lui Kolosov-Mushelișvili dă deci o soluție completă pentru ceea ce ține propriu-zis de teoria elasticității în aceste probleme.

Subliniem (vezi § A.7, pag. 735) că problemele la limită (10) *nu au* semnificația de probleme la limită ale teoriei elasticității pentru domeniul circular din planul ζ . Lucrurile se petrec deci cu totul altfel decît în problema plană a mecanicii fluidelor, cînd reprezentarea conformă conduce tot la o anumită scurgere hidrodinamică în jurul obstacolului transformat. Această dificultate suplimentară (legată de caracterul *biarmonic* al problemei) arată redusă

utilitate a considerării în elasticitatea plană a unui analog al liniilor de curent. Dimpotrivă, se poate însă folosi analogia dintre starea elastică plană și mișcarea unui fluid *viscos* (vezi de ex. D. Ionescu [1]; C. Stănescu [1]).

În practică, rezolvarea problemelor fundamentale pentru un domeniu dublu conex — și cu atât mai mult pentru un domeniu de ordin mai mare de conexiune — se lovește de dificultăți considerabile, legate de necesitatea construirii efective a funcției de reprezentare. Unele indicații în legătură cu astfel de probleme vor fi date în §§ 23–25.

§ 19. PROBLEMA LUI NEUMANN. EXEMPLE. (METODA REPREZENTĂRII CONFORME)

Vom considera trei exemple, dintre care două pentru domenii simplu conexe, și unul pentru un domeniu dublu conex.

a) *Cardioida*

Să considerăm funcția de reprezentare (vezi § A.8, exemplul c)

$$\zeta = a(1 + \sigma)^2; \quad (1)$$

de aci deducem imediat că pe γ avem

$$\omega(\sigma)/\overline{\omega'(\sigma)} = \frac{1}{2}(\sigma + \sigma^2)_n \quad (2)$$

Dezvoltând datele la limită în serie Fourier și căutând soluția sub forma

$$\varphi(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \zeta^n, \quad \psi(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \zeta^n, \quad (3)$$

obținem din condiția la limită (18.9) (vezi și (14.21)) :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sigma^n - \sum_{n=-\infty}^{n=1} \frac{1}{2}(n-2) \bar{a}_{-n+2} \sigma^n - \sum_{n=-\infty}^{n=2} \frac{1}{2}(n-3) \bar{a}_{-n+3} \sigma^n + \\ + \sum_{n=-\infty}^{n=0} \bar{b}_{-n} \sigma^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n \sigma^n + C_0, \end{aligned} \quad (4)$$

unde constanta C_0 trebuie menținută, întrucît nu am făcut încă nici o presupunere asupra coeficienților a_0 , b_0 , $\text{Im } a_1$.

Din (4) urmează prin identificare pentru

$$\begin{aligned}
 n = 0 : \quad a_0 + \bar{a}_2 + \frac{3}{2} \bar{a}_3 + b_0 &= h_0 + C_0, \\
 n = 1 : \quad a_1 + \frac{1}{2} \bar{a}_1 + \bar{a}_2 &= h_1, \\
 n = 2 : \quad a_2 + \frac{1}{2} \bar{a}_1 &= h_2, \\
 n \geq 3 : \quad a_n &= \bar{h}_n, \\
 n \geq 1 : (n+2) a_{n+2} + (n+3) a_{n+3} + 2 b_n &= 2 \bar{h}_{-n}.
 \end{aligned} \tag{5}$$

Din a doua și a treia relație de mai sus căpătăm

$$\operatorname{Re} a_1 = h_1 - \bar{h}_2, \tag{6}$$

ceea ce impune să fie satisfăcută condiția

$$\operatorname{Im} (h_1 - \bar{h}_2) = 0. \tag{7}$$

Întrucît \mathcal{D} este simplu conex, funcția $h(s)$ este uniformă, și momentul resultant poate fi calculat din (11.18). Obținem deci

$$\mathcal{M}_3 = \operatorname{Re} \oint_{\gamma} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{h}_n \sigma^{-n} \cdot 2 a (1 + \sigma) d\sigma = -4 a \pi \operatorname{Im} (\bar{h}_1 + \bar{h}_2),$$

astfel că (7) este tocmai condiția de anulare a momentului \mathcal{M}_3 .

Luînd $a_0 = b_0 = 0$, din prima relație (5) se determină constanta C_0 — inutilă de altfel. Luînd și $\operatorname{Im} a_1 = 0$, coeficientul a_1 este dat de (6). A treia relație (5) dă pe a_2 , iar din ultimele două obținem succesiv toți coeficienții a_n , b_n .

Calcululele rămîn tot atît de simple pentru orice domeniu simplu conex pentru care raportul $\omega(\sigma)/\omega'(\sigma)$ este un polinom sau un cît de polinoame, dacă numărul de termeni din aceste polinoame nu este prea mare.

b) Coroana eliptică (soluția lui A. Kalandia)

Funcția de reprezentare de utilizat este (vezi § A.8, exemplul *b*) :

$$\xi = c (\zeta + h \zeta^{-1}). \tag{8}$$

Ca și pentru starea antiplană (vezi § 5.18, exemplul *d*), vom examina atît cazul domeniului mărginit de două elipse confocale, cît și pe cel al discului eliptic (cînd, spre deosebire de cazul antiplan, nu există soluție elementară).

Fie deci elipsele-frontieră $\mathcal{L}_0, \mathcal{L}_1$ și fie $\mathcal{M}_0, \mathcal{M}_1$ cercurile de raze ρ_0 și $\rho_1 = 1$, care definesc coroana circulară \mathcal{A} a cărei imagine prin intermediul transformării (8) este \mathcal{D} . Parametrii c, h, ρ_0 sînt cunoscuți din (A. 8.15).

Pentru simplitate, să presupunem că sarcinile de pe cele două componente ale frontierei au rezultante nule. Funcțiile $h(\sigma)$ sînt deci uniforme pe ambele cercuri-frontieră, iar $\varphi(\zeta), \psi(\zeta)$ sînt olomorfe în \mathcal{A} (vezi (11.10), (11.11)) :

$$\varphi(\zeta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \zeta^n, \quad \psi(\zeta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \zeta^n. \quad (9)$$

Introducînd (9) în condiția la limită (18.9), obținem mai întîi

$$\begin{aligned} (1 - h/\bar{\zeta}^2) [\varphi(\zeta) + \overline{\psi(\zeta)}] + (\zeta + h/\zeta) \overline{\varphi'(\zeta)} = \\ = (1 - h/\bar{\zeta}^2) [h(\zeta, \bar{\zeta}) + \text{const.}] \quad \text{pe } \mathcal{M}. \end{aligned} \quad (10)$$

Să facem uz acum de (9), ținînd seama că $\zeta = \rho_j \sigma$ pe \mathcal{M}_j ($j=0,1$) și dezvoltînd în serie Fourier pe \mathcal{M} funcția din membrul al doilea din (10), pe care o vom nota ⁸⁾ cu

$$H(\zeta, \bar{\zeta}) = (1 - h/\bar{\zeta}^2) h(\zeta, \bar{\zeta}) \quad \text{pe } \mathcal{M}. \quad (11)$$

Cu aceasta, obținem pe cercul exterior \mathcal{M}_0 :

$$\begin{aligned} (1 - h \rho_0^{-2} \sigma^2) \sum_{n=-\infty}^{\infty} (a_n \rho_0^n + \bar{b}_{-n} \rho_0^{-n}) \sigma^n + \\ + (\rho_0 \sigma + h \rho_0^{-1} \sigma^{-1}) \sum_{n=-\infty}^{\infty} n \bar{a}_n \rho_0^{n-1} \sigma^{-n+1} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} H_n^0 \sigma^n + \\ + (1 - h \rho_0^{-2} \sigma^2) C_0, \end{aligned} \quad (12)$$

și o relație similară pe \mathcal{M}_1 (unde în loc de ρ_0 avem $\rho_1 = 1$).

Identificînd coeficienții, obținem din (12) pe cercul \mathcal{M}_0 :

$$\begin{aligned} a_n \rho_0^n - h a_{n-2} \rho_0^{n-2} - (n-2) \bar{a}_{-n+2} \rho_0^{-n+2} - h n \bar{a}_{-n} \rho_0^{-n-2} + \\ + \bar{b}_{-n} \rho_0^{-n} - h \bar{b}_{-n+2} \rho_0^{-n} = H_n^0, \end{aligned} \quad (13)$$

(unde pentru $n=0$ și $n=2$ trebuie să adăugăm în membrul al doilea cantitățile C_0 , respectiv $-h C_0 \rho_0^{-2}$), și încă o relație analogă provenind din condiția pe cercul \mathcal{M}_1 :

$$a_n - h a_{n-2} - (n-2) \bar{a}_{-n+2} - h n \bar{a}_{-n} + \bar{b}_{-n} - h \bar{b}_{-n+2} = H_n^1. \quad (14)$$

⁸⁾ Se înțelege că această expresie nu trebuie confundată cu funcția $H(\zeta, \bar{\zeta})$ din (18.10). Tot așa, parametrul h al funcției (8) nu are nici o legătură cu funcția $h(\zeta, \bar{\zeta})$.

Înmulțind relația (13) cu ρ_0^n și scăzând din ea relația (14), obținem pentru

$$\begin{aligned} n = 0 : & -h a_{-2} (\rho_0^{-4} - 1) + 2 \bar{a}_2 (\rho_0^2 - 1) = L_0 + C_0 - C_1, \\ n = 1 : & (a_1 + \bar{a}_1) (\rho_0^2 - 1) - h (a_{-1} + \bar{a}_{-1}) (\rho_0^{-2} - 1) = L_1, \\ n = 2 : & a_2 (\rho_0^4 - 1) - 2h \bar{a}_{-2} (\rho_0^{-2} - 1) = L_2 - h C_0 \rho_0^{-2} + h C_1, \\ n \geq 3 : & a_n (\rho_0^{2n} - 1) - h a_{n-2} (\rho_0^{2n-4} - 1) - (n-2) \bar{a}_{-n+2} (\rho_0^2 - 1) - \\ & - h n \bar{a}_{-n} (\rho_0^{-2} - 1) = L_n, \end{aligned} \quad (15)$$

unde am notat

$$L_n = H_n^0 \rho_0^n - H_n^1. \quad (16)$$

Înlocuind în ultima relație (15) pe n prin $-n+2$, obținem încă pentru :

$$\begin{aligned} n \geq 3 : & n \bar{a}_n (\rho_0^2 - 1) + h (n-2) \bar{a}_{n-2} (\rho_0^{-2} - 1) + a_{-n+2} (\rho_0^{-2n+4} - 1) - \\ & - h a_{-n} (\rho_0^{-2n} - 1) = L_{-n+2}. \end{aligned} \quad (17)$$

După cum se vede, coeficientul a_0 nu apare în aceste ecuații. Pentru coeficienții a_1, a_{-1} dispunem numai de a doua ecuație (15), care dă

$$(\rho_0^2 - 1) \operatorname{Re} a_1 - h (\rho_0^{-2} - 1) \operatorname{Re} a_{-1} = \frac{1}{2} L_1. \quad (18)$$

Coeficienții a_2, a_{-2} apar în prima și a treia ecuație (15) :

$$\begin{aligned} (\rho_0^4 - 1) a_2 - 2h (\rho_0^{-2} - 1) \bar{a}_{-2} &= L_2 - h C_0 \rho_0^{-2} + h C_1, \\ 2 (\rho_0^2 - 1) \bar{a}_2 - h (\rho_0^{-4} - 1) a_{-2} &= L_0 + C_0 - C_1. \end{aligned} \quad (19)$$

În fine, pentru a_n, a_{-n} ($n \geq 3$) dispunem de sistemul de ecuații

$$\begin{aligned} (\rho_0^{2n} - 1) a_n - h n (\rho_0^{-2} - 1) \bar{a}_{-n} - h (\rho_0^{2n-4} - 1) a_{n-2} - \\ - (n-2) (\rho_0^2 - 1) \bar{a}_{-n+2} &= L_n, \\ n (\rho_0^2 - 1) \bar{a}_n - h (\rho_0^{-2n} - 1) a_{-n} + h (n-2) (\rho_0^{-2} - 1) \bar{a}_{n-2} + \\ + (\rho_0^{-2n+4} - 1) a_{-n+2} &= L_{-n+2}. \end{aligned} \quad (20)$$

Prin urmare, coeficienții a_n, a_{-n} se determină succesiv câte doi din sisteme de două ecuații în care intervin și coeficienții a_{n-2}, a_{-n+2} , deja cunoscuți. Acești coeficienți nu depind de valoarea a_0 — care, după cum știm, poate fi aleasă arbitrar. Dat fiind că funcției $\varphi_{(1)}(z)$ i se poate adăuga un

termen de forma iC_3 , deduce de asemenea că putem alege arbitrar $\text{Im } a_1$, de unde $\text{Im } a_{-1}$ trebuie să rezulte determinat. Întrucît dispunem însă numai de o singură ecuație (18) pentru $\text{Re } a_1$, $\text{Re } a_{-1}$, iar în (19) intervin și constantele necunoscute C_0, C_1 , sistemul astfel construit are o *infinitate* de soluții.

Ideea lui A. Kalandia[1] constă în a determina *singura* soluție convenabilă cu ajutorul condiției ca seria $\varphi(\zeta)$ să fie convergentă, ceea ce conduce la construirea unor ecuații suplimentare.

În acest scop, să începem prin a izola în ecuațiile (20) termenii în a_n, a_{-n} . Notînd

$$\begin{aligned} A_n &= (\rho_0^{2n} - 1) a_n - h n (\rho_0^{-2} - 1) \bar{a}_{-n}, \\ A_n^* &= n (\rho_0^2 - 1) \bar{a}_n - h (\rho_0^{-2n} - 1) a_{-n}, \end{aligned} \quad (n \geq 0) \quad (21)$$

obținem din (18) și (19) relațiile

$$A_0 = A_0^* = 0, \quad (22)$$

$$A_1 + A_1^* = L_1, \quad (23)$$

$$A_2 = L_2 - h(C_0 \rho_0^{-2} - C_1), \quad A_2^* = L_0 + C_0 - C_1, \quad (24)$$

iar din (20), relațiile (valabile pentru $n \geq 3$):

$$\begin{aligned} A_n - h A_{n-2} &= L_n - (n-2) \lambda \bar{a}_{-n+2}, \\ A_n^* - h^{-1} A_{n-2}^* &= L_{-n+2} + (n-2) \lambda h^{-1} \bar{a}_{n-2}, \end{aligned} \quad (25)$$

unde am notat

$$\lambda = (1 - \rho_0^2)(1 - h^2 \rho_0^{-2}). \quad (26)$$

Relațiile de recurență (25) conduc la două serii de formule distincte, după cum $n = 2p$ sau $n = 2p - 1$. Astfel, avem mai întîi

$$\begin{aligned} A_3 &= h A_1 + L_3 - \lambda \bar{a}_{-1}, & A_3^* &= h^{-1} A_1^* + L_{-1} + \lambda h^{-1} \bar{a}_1, \\ A_5 &= h A_3 + L_5 - 3 \lambda \bar{a}_{-3}, & A_5^* &= h^{-1} A_3^* + L_{-3} + 3 \lambda h^{-1} \bar{a}_3, \\ A_7 &= h A_5 + L_7 - 5 \lambda \bar{a}_{-5}, & A_7^* &= h^{-1} A_5^* + L_{-5} + 5 \lambda h^{-1} \bar{a}_5, \end{aligned}$$

de unde de exemplu

$$\begin{aligned} A_7 &= h^3 A_1 + h^2 L_3 + h L_5 + L_7 - \lambda (h^2 \bar{a}_{-1} + 3 h \bar{a}_{-3} + 5 \bar{a}_{-5}), \\ A_7^* &= h^{-3} A_1^* + h^{-2} L_{-1} + h^{-1} L_{-3} + L_{-5} + \lambda h^{-1} (h^{-2} \bar{a}_1 + 3 h \bar{a}_3 + 5 \bar{a}_5), \end{aligned}$$

și în general pentru $n = 2p - 1$

$$\begin{aligned} A_{2p-1} &= h^{p-1} A_1 + \sum_{s=1}^{p-1} h^{p-s-1} L_{2s+1} - \lambda \sum_{s=1}^{p-1} (2s-1) h^{p-s-1} \bar{a}_{-2s+1}, \\ A_{2p-1}^* &= h^{-p+1} A_1^* + \sum_{s=1}^{p-1} h^{-p+s+1} L_{-2s+1} + \lambda h^{-1} \sum_{s=1}^{p-1} (2s-1) h^{-p+s+1} \bar{a}_{2s-1}. \end{aligned} \quad (27)$$

Tot astfel, pentru $n=2p$ obținem mai întâi (luând valori $n \geq 4$):

$$\begin{aligned} A_4 &= h A_2 + L_4 - 2 \lambda \bar{a}_{-2}, & A_4^* &= h^{-1} A_2^* + L_{-2} + 2 \lambda h^{-1} \bar{a}_2, \\ A_6 &= h A_4 + L_6 - 4 \lambda \bar{a}_{-4}, & A_6^* &= h^{-1} A_4^* + L_{-4} + 4 \lambda h^{-1} \bar{a}_4, \end{aligned}$$

și așa mai departe, de unde de exemplu

$$\begin{aligned} A_8 &= h^3 A_2 + h^2 L_4 + h L_6 + L_8 - \lambda (2 h^2 \bar{a}_{-2} + 4 h \bar{a}_{-4} + 6 \bar{a}_{-6}), \\ A_8^* &= h^{-3} A_2^* + h^{-2} L_{-2} + h^{-1} L_{-4} + L_{-6} + \lambda h^{-1} (2 h^{-2} \bar{a}_2 + 4 h^{-1} \bar{a}_4 + 6 \bar{a}_6), \end{aligned}$$

și în general

$$\begin{aligned} A_{2p} &= h^{p-1} A_2 + \sum_{s=2}^p h^{p-s} L_{2s} - \lambda \sum_{s=1}^{p-1} 2s h^{p-s-1} \bar{a}_{-2s}, \\ A_{2p}^* &= h^{-p+1} A_2^* + \sum_{s=1}^{p-1} h^{-p+s+1} L_{-2s} + \lambda \sum_{s=1}^{p-1} 2s h^{-p+s} \bar{a}_{2s}, \end{aligned} \quad (28)$$

sau încă, ținând seama de relațiile (22) și (24):

$$\begin{aligned} A_{2p} &= -h^p (C_0 \rho_0^{-2} - C_1) + \sum_{s=1}^p h^{p-s} L_{2s} - \lambda \sum_{s=1}^{p-1} 2s h^{p-s-1} \bar{a}_{-2s}, \\ A_{2p}^* &= h^{-p+1} (C_0 - C_1) + \sum_{s=0}^{p-1} h^{-p+s+1} L_{-2s} + \lambda \sum_{s=1}^{p-1} 2s h^{-p+s} \bar{a}_{2s}. \end{aligned} \quad (29)$$

Pentru a calcula sumele în L din (27) și (29), să remarcăm că L_n sînt construiți cu ajutorul coeficienților H_n^0 , H_n^1 , definiți prin relațiile ce rezultă din (11):

$$(1 - h \rho_0^{-2} \sigma^2) \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n^0 \sigma^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} H_n^0 \sigma^n, \quad (30)$$

$$(1 - h \sigma^2) \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n^1 \sigma^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} H_n^1 \sigma^n,$$

de unde

$$h_n^0 - h \rho_0^{-2} h_{n-2}^0 = H_n^0, \quad h_n^1 - h h_{n-2}^1 = H_n^1; \quad (31)$$

astfel că pentru L_n obținem acum din (16):

$$L_n = l_n - h l_{n-2}, \quad L_{-n+2} = l_{-n+2} - h l_{-n}, \quad (32)$$

unde am notat, ca și în (14.31):

$$l_n = h_n^0 \rho_0^n - h_n^1. \quad (33)$$

Scriind relațiile (32) sub forma

$$l_n - h l_{n-2} = L_n, \quad l_{-n} - h^{-1} l_{-n+2} = -h^{-1} L_{-n+2}, \quad (34)$$

remarcăm că ele sînt analoge cu (25) (păstrîndu-și însă valabilitatea și pentru $n = 0, 1, 2$). Prin analogie cu (27) căpătăm imediat

$$l_{2p-1} = h^{p-1} l_1 + \sum_{s=1}^{p-1} h^{p-s-1} L_{2s+1}, \quad l_{-2p+1} = h^{-p+1} l_{-1} - \sum_{s=1}^{p-1} h^{-p+s} L_{-2s+1}. \quad (35)$$

Pe de altă parte, prin analogie cu (28), unde expresiile A_2 și A_2^* se înlocuiesc prin

$$l_2 = h l_0 + L_2, \quad l_{-2} = h^{-1} (l_0 - L_0)$$

obținute din (34) pentru $n = 2$, căpătăm și

$$l_{2p} = h^p l_0 + \sum_{s=1}^p h^{p-s} L_{2s}, \quad l_{-2p} = h^{-p} l_0 - \sum_{s=0}^{p-1} h^{-p+s} L_{-2s}. \quad (36)$$

Ținînd seama de (35) în (27), și de (36) în (29), obținem pentru $p \geq 1$:

$$A_{2p-1} = h^{p-1} \left[A_1 - l_1 - \lambda \sum_{s=1}^{p-1} (2s-1) h^{-s} \bar{a}_{-2s+1} \right] + l_{2p-1}, \quad (37)$$

$$A_{2p-1}^* = h^{-p+1} \left[A_1^* + h l_{-1} + \lambda h^{-1} \sum_{s=1}^{p-1} (2s-1) h^s \bar{a}_{2s-1} \right] - h l_{-2p+1},$$

și respectiv

$$A_{2p} = -h^p \left[C_0 \rho_0^{-2} - C_1 + l_0 + \lambda \sum_{s=1}^{p-1} 2s h^{-s-1} \bar{a}_{-2s} \right] + l_{2p}, \quad (38)$$

$$A_{2p}^* = h^{-p+1} \left[C_0 - C_1 + l_0 + \lambda \sum_{s=1}^{p-1} 2s h^{s-1} \bar{a}_{2s} \right] - h l_{-2p}.$$

Să alegem acum, dintre toate soluțiile posibile ale ecuațiilor (18)–(20), pe aceea care asigură convergența (în \mathcal{H} și pe \mathcal{H}) a seriei $\varphi(\zeta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \zeta^n$. O condiție necesară de convergență a acestei serii este (vezi (A.5.20)):

$$|a_n| \leq C \rho_0^{-n}, \quad |a_{-n}| \leq C \quad \text{pentru } n > 0, \quad (39)$$

astfel că șirul valorilor A_n^* din (21) e mărginit ⁹⁾ pentru $n \rightarrow \infty$. (Din acest punct, simetria formulelor încetează: despre șirul A_n nu se poate afirma același lucru.)

Dacă avem $0 < h < 1$ (cazul $h=1$ se exclude deci), atunci coeficienții termenilor h^{-p+1} din (37) și (38) trebuie să tindă la zero pentru $p \rightarrow \infty$. Obținem deci

$$A_1^* + h l_{-1} = -\lambda \sum_{s=1}^{\infty} (2s-1) h^{s-1} \bar{a}_{2s-1},$$

$$C_0 - C_1 + l_0 = -\lambda \sum_{s=1}^{\infty} 2s h^{s-1} \bar{a}_{2s}.$$

⁹⁾ Amintim că avem $\rho_0 > \rho_1 = 1$ și deci $\lim_{n \rightarrow \infty} n \rho_0^{-n} = 0$.

Notînd

$$A = \sum_{s=1}^{\infty} (2s-1) h^{s-1} \bar{a}_{2s-1}, \quad \tilde{A} = \sum_{s=1}^{\infty} 2s h^{s-1} a_{2s}, \quad (40)$$

putem pune relațiile de mai sus sub forma definitivă

$$A_1^* + h l_{-1} = -\lambda A, \quad C_0 - C_1 + l_0 = -\lambda \tilde{A}. \quad (41)$$

În felul acesta, din condiția de convergență a soluției am obținut încă două ecuații pentru coeficienții necunoscuți.

După cum am văzut, din sistemul (18)–(20) lipsesc două ecuații pentru C_0, C_1 , și o ecuație pentru a_1, a_{-1} . Se știe că modificarea coeficientului a_0 modifică membrul al doilea al condiției la limită (18.9) cu o aceeași valoare pe ambele componente ale frontierei, așadar modifică constantele C_0 și C_1 , dar nu și diferența lor. Întrucît a_0 nu intervine în sistemul considerat, putem alege arbitrar una dintre constantele C_0, C_1 (de ex. $C_0 = 0$), ceea ce revine la a atribui lui a_0 o valoare precisă (deși necunoscută, și de care nu vom avea nevoie). Cele două relații (41) dau prin urmare tocmai cele două ecuații încă necesare pentru a putea determina coeficienții a_1, a_{-1} și constanta C_1 .

Ținînd seama de prima relație (34) pentru $n = 1$, obținem din (23) și din prima relație (41):

$$A_1 = L_1 + h l_{-1} + \lambda A = l_1 + \lambda A. \quad (42)$$

Formulele (37) devin acum

$$\begin{aligned} A_{2p-1} &= \lambda h^{p-1} \left[A - \sum_{s=1}^{p-1} (2s-1) h^{-s} \bar{a}_{-2s+1} \right] + l_{2p-1}, \\ A_{2p-1}^* &= -\lambda h^{-p+1} \left[A - \sum_{s=1}^{p-1} (2s-1) h^{s-1} \bar{a}_{2s-1} \right] - h l_{-2p+1}. \end{aligned} \quad (43)$$

Prima relație (41), împreună cu (42) și (43), dau sistemul de ecuații pentru coeficienții a_p de indici impari. Anume, cu ajutorul expresiilor (21) obținem acum

$$\begin{aligned} (\rho_0^2 - 1) \bar{a}_1 - h(\rho_0^{-2} - 1) a_{-1} + \lambda A &= -h l_{-1}, \\ (\rho_0^2 - 1) a_1 - h(\rho_0^{-2} - 1) \bar{a}_{-1} - \lambda A &= l_1, \\ (\rho_0^{4p-2} - 1) a_{2p-1} - (2p-1) h(\rho_0^{-2} - 1) \bar{a}_{-2p+1} + \\ + \lambda h^{p-1} \left[\sum_{s=1}^{p-1} (2s-1) h^{-s} \bar{a}_{-2s+1} - A \right] &= l_{2p-1}, \\ (2p-1)(\rho_0^2 - 1) \bar{a}_{2p-1} - h(\rho_0^{-4p+2} - 1) a_{-2p+1} - \\ - \lambda h^{-p+1} \left[\sum_{s=1}^{p-1} (2s-1) h^{s-1} \bar{a}_{2s-1} - A \right] &= -h l_{-2p+1}, \end{aligned} \quad (44)$$

unde A are forma dată în (40).

Condiția $C_0 = 0$, a doua relație (41) și relațiile (38) dau sistemul de ecuații din care se determină coeficienții a_n de indici pari :

$$\begin{aligned} C_1 - \lambda \tilde{A} &= l_0, \\ (\rho_0^{4p} - 1) a_{2p} - 2h p (\rho_0^{-2} - 1) \bar{a}_{-2p} + \lambda h^p \left[\sum_{s=1}^{p-1} 2s h^{-s-1} \bar{a}_{-2s} - \tilde{A} \right] &= l_{2p}, \\ 2p (\rho_0^2 - 1) \bar{a}_{2p} - h (\rho_0^{-4p} - 1) a_{-2p} - \lambda h^{-p+1} \left[\sum_{s=1}^{p-1} 2s h^{s-1} \bar{a}_{2s} - \tilde{A} \right] &= -h l_{-2p}, \end{aligned} \quad (45)$$

unde \tilde{A} are forma dată în (40).

După cum se vede, spre deosebire de sistemul inițial (18)–(20), sistemele (44) și (45) sînt veritabile sisteme infinite liniare. Se poate însă demonstra (vezi loc. cit.) că soluția acestor sisteme există, este unică, și poate fi obținută prin aproximații succesive. Pentru aceasta, este suficient să fie satisfăcută condiția

$$\operatorname{Im} (l_1 - h l_{-1}) = 0 \quad (46)$$

(vezi primele două ecuații (44)). Or, din (33) și (11.18) (de care putem face uz intrucit rezultanta sarcinii e nulă pe fiecare componentă a frontierei în parte) avem pe rînd

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_3 &= \operatorname{Re} c \oint_{\gamma} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{h}_n^0 \sigma^{-n} (1 - h \rho_0^{-2} \sigma^{-2}) \rho_0 - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{h}_n^1 \sigma^{-n} (1 - h \sigma^{-2}) \right] d\sigma = \\ &= 2\pi c \operatorname{Im} (h_1^0 \rho_0 - h_1^1 - h \rho_0^{-1} h_{-1}^0 + h h_{-1}^1) = 2\pi c \operatorname{Im} (l_1 - h l_{-1}), \end{aligned} \quad (47)$$

și deci condiția (46) este verificată în virtutea faptului că $\mathcal{M}_3 = 0$.

Coeficienții a_n ($n \neq 0$) odată determinați, relațiile (13) (sau relațiile echivalente lor (14)) permit determinarea directă a cantităților $b_n = h b_{n-2}$.

Înmulțind relațiile (13) cu ρ_0^n , trecînd termenii în a_n în membrul al doilea și înlocuind n prin $-n+2$, obținem o relație de forma

$$b_n - h^{-1} b_{n-2} = K_{-n+2}^0, \quad (48)$$

unde K_n^0 sînt constante cunoscute. Relația analogă scrisă pe cercul J_1 conduce la cantități $K_n^1 = K_n^0$.

Analogia dintre (48) și a doua relație (25) este evidentă. Obținem astfel din (27) și (28) formulele

$$b_{2p-1} = h^{-p+1} \left[b_1 + \sum_{s=1}^{p-1} h^s K_{-2s+1}^0 \right], \quad b_{2p} = h^{-p+1} \left[h^{-1} b_0 + \sum_{s=0}^{p-1} h^s K_{-2s}^0 \right]. \quad (49)$$

Dat fiind că am ales $C_0 = 0$, suma $a_0 + \bar{b}_0$ nu poate fi dată arbitrar. Intrucit $0 < h < 1$, iar coeficienții b_n sînt mărginiți pentru $n \rightarrow \infty$, limita coeficientului lui h^{-p+1} în (49) pentru $p \rightarrow \infty$ trebuie să fie nulă, de unde urmează

$$b_0 = - \sum_{s=0}^{\infty} h^{s+1} K_{-2s}^0, \quad b_1 = - \sum_{s=1}^{\infty} h^s K_{-2s+1}^0. \quad (50)$$

Convergența acestor serii poate fi demonstrată. Introducând valorile (50) în (48), obținem pe rând toți coeficienții b_n . În sfârșit, relația (13) scrisă pentru $n=0$ dă și coeficientul a_0 .

Raționamentul rămâne valabil — cu modificări neînsemnate — în cazul problemei lui Dirichlet, precum și în cazul problemei mixte cu date de tip Dirichlet pe una din componente frontierei, și cu date de tip Neumann pe cealaltă din ele. (Chiar acesta este cazul examinat de A. Kalandia, loc. cit.)

Aceeași problemă este studiată și de M. Șeremetiev [1]. După cum a arătat V. Lihacev [1], soluțiile lui Kalandia și Șeremetiev sînt echivalente.

Convergența soluției este cu atît mai rapidă, cu cît h este mai mic.

c) Discul eliptic

Aceeași metodă permite să se obțină ușor funcțiile $\varphi(\zeta)$ $\psi(\zeta)$ pentru cazul discului eliptic.

Pentru aceasta, este suficient să ținem seama că cele două funcții trebuie să fie olomorfe în \mathcal{D}_0^+ , așadar continue la traversarea tăieturii \mathcal{L}_1 între focare. Întrucît punctelor de pe bordul tăieturii le corespund punctele σ și $\bar{\sigma}$ pe $\mathcal{J}_1 = \gamma$, deducem că condiția la limită pe \mathcal{J}_1 (care a condus mai sus la (14)) trebuie înlocuită acum cu condiția necesară

$$\varphi(\sigma) = \varphi(\bar{\sigma}), \quad \psi(\sigma) = \psi(\bar{\sigma}), \quad (51)$$

de unde, ținînd seama de (9), deducem imediat

$$a_n = a_{-n}, \quad b_n = b_{-n}. \quad (52)$$

(Compară cu § 5.18, exemplul *d*, problema torsiunii pentru același domeniu.)

În locul operațiilor care au condus de la (13), (14) la ecuațiile (15), (17), trebuie să începem acum prin a utiliza ecuațiile (13) și (52). Înmulțind (13) cu ρ_0^n , ținînd seama de (52), și renunțînd la indicii superiori „0”, găsim deci :

$$\begin{aligned} a_0 - a_2 \rho_0^{-4} + 2 \bar{a}_2 \rho_0^2 + \bar{b}_0 - \bar{b}_2 &= H_0 + C_0, \\ a_1 (\rho_0^2 - \rho_0^{-2}) + \bar{a}_1 (\rho_0^2 - \rho_0^{-2}) &= H_1 \rho_0, \\ -a_0 + a_2 \rho_0^4 - 2 \bar{a}_2 \rho_0^{-2} + \bar{b}_2 - \bar{b}_0 &= H_2 \rho_0^2 - C_0, \\ a_n \rho_0^{2n} - a_{n-2} \rho_0^{2n-4} - (n-2) \bar{a}_{n-2} \rho_0^2 - n \bar{a}_n \rho_0^{-2} + \\ &+ \bar{b}_n - \bar{b}_{n-2} = H_n \rho_0^n, \quad n \geq 3, \end{aligned} \quad (53)$$

și încă, înlocuind în ultima relație pe n prin $-n+2$:

$$\begin{aligned} a_{n-2} \rho_0^{-2n+4} - a_n \rho_0^{-2n} + n \bar{a}_n \rho_0^2 + (n-2) \bar{a}_{n-2} \rho_0^{-2} + \\ + \bar{b}_{n-2} - \bar{b}_n = H_{-n+2} \rho_0^{-n+2}. \end{aligned} \quad (54)$$

Adunînd membru cu membru prima și a treia ecuația (53), și ultima ecuație (53) cu ecuația (54), obținem

$$\begin{aligned} a_2 (\rho_0^4 - \rho_0^{-4}) + 2 \bar{a}_2 (\rho_0^2 - \rho_0^{-2}) &= H_0 + H_2 \rho_0^2, \\ 2 \operatorname{Re} a_1 (\rho_0^2 - \rho_0^{-2}) &= H_1 \rho_0, \end{aligned} \quad (55)$$

$$\begin{aligned} a_n (\rho_0^{2n} - \rho_0^{-2n}) + n \bar{a}_n (\rho_0^2 - \rho_0^{-2}) - a_{n-2} (\rho_0^{2n-4} - \rho_0^{-2n+4}) - \\ - (n-2) \bar{a}_{n-2} (\rho_0^2 - \rho_0^{-2}) = H_n \rho_0^n + H_{-n+2} \rho_0^{-n+2} \quad \text{pentru } n \geq 3. \end{aligned}$$

Prin analogie cu formulele (21), putem scrie

$$c_n = a_n (\rho_0^{2n} - \rho_0^{-2n}) + n \bar{a}_n (\rho_0^2 - \rho_0^{-2}), \quad (56)$$

astfel că ecuațiile (55) devin

$$c_1 = H_1 \rho_0; \quad c_2 = H_0 + H_2 \rho_0^2; \quad c_n - c_{n-2} = M_n, \quad n \geq 3, \quad (57)$$

unde am notat

$$\begin{aligned} M_n \equiv H_n \rho_0^n + H_{-n+2} \rho_0^{-n+2} = h_n \rho_0^n - h_{-n} \rho_0^{-n} - h_{n-2} \rho_0^{n-2} + h_{-n+2} \rho_0^{-n+2}, \\ n \geq 3, \end{aligned} \quad (58)$$

ceea ce furnizează relații de același tip cu prima relație (25), dar de structură mai simplă. Obținem prin urmare, prin comparație cu (27) și (28), expresiile

$$c_{2p-1} = H_1 \rho_0 + \sum_{s=2}^p M_{2s-1}, \quad c_{2p} = \sum_{s=1}^p M_{2s}, \quad (59)$$

de unde pentru orice n urmează

$$c_n = h_n \rho_0^n - h_{-n} \rho_0^{-n}. \quad (60)$$

Ecuațiile (56) dau imediat valorile coeficienților a_n .

Dat fiind că funcția $\varphi(\zeta)$ este determinată abstracție făcînd de un termen de forma $iC'(\zeta + \zeta^{-1}) + \gamma$, iar $\psi(\zeta)$, abstracție făcînd de un termen γ' , rezultă că mărimile $a_0, b_0, \operatorname{Im} a_1 = \operatorname{Im} a_{-1}$ pot fi date arbitrar. În fapt, se vede că a_0 nu intervine în relațiile (55), și nici unul din coeficienții a_{2p} nu depinde de el; putem lua deci $a_0 = 0$. Mai departe, din relația (56) pentru $n = 1$ și din prima relație (57) căpătăm pe $\operatorname{Re} a_1$; întrucît putem alege $\operatorname{Im} a_{-1} = 0$, avem deci

$$a_1 = \frac{1}{2} H_1 \rho_0 / (\rho_0^2 - \rho_0^{-2}). \quad (61)$$

Pentru aceasta este desigur necesar să avem $\text{Im } H_1 = 0$. Făcînd uz de (11.18) și ținînd seama că din (11) (pentru $h = 1$) rezultă $h(\sigma) = H(\sigma) (1 - \rho_0^{-2} \sigma^2)^{-1}$, deducem

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_3 &= \text{Re} \oint_{\mathcal{L}_0} \overline{h(t)} dt = \text{Re} \oint_{\gamma} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \overline{H}_n \sigma^{-n} \right) \frac{1}{1 - \rho_0^{-2} \sigma^{-2}} c (1 - \rho_0^{-2} \sigma^{-2}) d\sigma = \\ &= \text{Re } 2\pi i c \overline{H}_1 = 2\pi c \text{Im } H_1, \end{aligned} \quad (62)$$

astfel că membrul al doilea din (61) rezultă într-adevăr real.

Luînd $n = 3$ în (57), se vede ușor că c_3 (și deci și toți coeficienții a_{2p+1}) nu depinde de valoarea $\text{Im } a_1$.

Prin urmare, coeficienții a_n pot fi efectiv determinați unul după altul, și funcția $\varphi(\zeta)$ poate fi scrisă explicit.

Relația (13) dă acum relațiile succesive

$$b_n - b_{n-2} = \overline{H}_n \rho_0^n - \overline{a}_n \rho_0^{2n} + \overline{a}_{n-2} \rho_0^{2n-4} + (n-2) a_{n-2} \rho_0^2 + n a_n \rho_0^{-2}, \quad (63)$$

sau un șir de relații similare în care în membrul al doilea raza ρ_0 e înlocuită prin $\rho_1 = 1$. Ambele șiruri de relații sînt echivalente, și nu permit să determinăm separat b_n și b_{n-2} pentru fiecare n . În fapt însă, amintind că în condiția la limită (10) scrisă pentru $h = 1$ funcția $\psi(\zeta)$ intervine sub forma

$$(1 - \zeta^{-2}) \overline{\psi(\zeta)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \overline{b}_n \zeta^n - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \overline{b}_n \zeta^{n-2} = - \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\overline{b}_n - \overline{b}_{n-2}) \zeta^{n-2}, \quad (64)$$

rezultă că cunoașterea diferențelor $b_n - b_{n-2}$ determină pe $\psi(\zeta)$.

Ținînd seama de relațiile (52), deducem

$$b_1 - b_{-1} = b_{-1} - b_1 = 0, \quad b_{-n} - b_{-n-2} = b_n - b_{n+2},$$

și deci

$$\begin{aligned} \psi(\zeta) &= \left[\sum_{n=0}^{\infty} (b_n - b_{n+2}) (\zeta^n - \zeta^{-n-2}) \right] : [1 - \zeta^{-2}] = \\ &= (b_0 - b_2) + (b_1 - b_3) \zeta (1 + \zeta^{-2}) + (b_2 - b_4) \zeta^2 (1 + \zeta^{-2} + \zeta^{-4}) + \dots \end{aligned} \quad (65)$$

Este limpede că b_0 poate fi ales arbitrar, de pildă $b_0 = 0$. Prima relație (53) permite să calculăm acum C_0 — de care de altfel nu avem nevoie.

După cum se vede, (51) este o condiție nu numai necesară, ci și suficientă pentru obținerea soluției cu toate proprietățile prescrise.

Exemplele b și c prezintă clar dificultățile considerabile ce pot apare, chiar pentru funcții de reprezentare atît de simple ca (8).

§ 20. REDUCEREA PROBLEMELOR LUI DIRICHLET ȘI NEUMANN LA ECUAȚIA INTEGRO-DIFERENȚIALĂ A LUI MUSHELIȘVILI

Metoda dezvoltărilor în serie duce la țintă cu siguranță, dar după calcule adesea obositoare. Întrucât problema constă în determinarea anumitor funcții olomorfe în \mathcal{D} cu ajutorul valorilor lor la limită, este firesc să utilizăm în acest scop teoria integralelor de tip Cauchy. Ca și în studiul ecuației lui Laplace, aceasta conduce în ultimă instanță la rezolvarea unor ecuații integrale.

Chiar dacă pentru calcularea integralelor ce apar pe parcurs vom fi siliți să recurgem tot la dezvoltări în serie, această a doua metodă are avantajul rapidității, permite o lărgire a condițiilor impuse datelor la limită, și conduce la demonstrarea relativ simplă a teoremelor de existență.

Aceasta este una dintre contribuțiile esențiale ale lui N. Mushelișvili [2] la studiul problemei plane.

a) Domenii reprezentabile conform pe discul unitate

Dacă \mathcal{D} este mărginit și simplu conex, funcția $\omega(\zeta)$ este olomorfă în discul unitate \mathcal{D}^+ . Dacă originile se corespund ($\omega(0) = 0$), atunci avem

$$\mathfrak{z} = \omega(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n \zeta^n. \quad (1)$$

Dacă însă \mathcal{D} este nemărginit (de tipul exteriorului unei curbe închise) și punctului $\zeta = 0$ îi corespunde punctul de la infinit, avem

$$\mathfrak{z} = \omega(\zeta) = \omega_{-1} \zeta^{-1} + \omega_0(\zeta), \quad \omega_{-1} \neq 0, \quad (2)$$

unde funcția $\omega_0(\zeta)$ este olomorfă în \mathcal{D}^+ .

Dacă \mathcal{D} este mărginit și simplu conex, se vede imediat că funcțiile $\varphi(\zeta)$, $\psi(\zeta)$ sînt olomorfe în \mathcal{D}^+ .

Dacă \mathcal{D} este nemărginit, vom presupune pentru început că tensiunile și deplasările sînt mărginite la infinit (vezi pp. 412—414). În acest caz, funcțiile lui Kolosov și Mushelișvili sînt de asemenea olomorfe în \mathcal{D} , inclusiv în punctul de la infinit. Introducînd (2) în formulele (10.42), obținem de pildă pentru $\varphi(\zeta)$:

$$\varphi(\zeta) = a_0 + a_{-1} \zeta / [\omega_{-1} + \zeta \omega_0(\zeta)] + a_{-2} \zeta^2 / [\omega_{-1} + \zeta \omega_0(\zeta)]^2 + \dots \quad (3)$$

Alegînd originea în exteriorul lui \mathcal{D} (de ex., dacă $\mathcal{D} = \mathcal{D}_0^-$, alegînd originea în \mathcal{D}_0^+), rezultă că pentru $\zeta \in \mathcal{D}^+$ avem $\mathfrak{z} \neq 0$. Întrucît avem $\omega_{-1} + \zeta \omega_0(\zeta) = \zeta \mathfrak{z}$, urmează că pentru $\zeta \neq 0$ avem și $\omega_{-1} + \zeta \omega_0(\zeta) \neq 0$; iar pentru $\zeta = 0$ căpătăm $\zeta \mathfrak{z} = \omega_{-1} \neq 0$. Prin urmare, fiecare termen din (3) este o funcție olomorfă; în consecință $\varphi(\zeta)$ (și analog și $\psi(\zeta)$) este olomorfă în \mathcal{D}^+ .

În cazul problemei lui Dirichlet, putem alege arbitrar de pildă valoarea $\psi_{(1)}(0)$ dacă \mathcal{D} este mărginit, și $\psi_{(1)}(\infty)$ dacă \mathcal{D} este nemărginit. În definitiv, putem lua întotdeauna arbitrar valoarea $\psi(0)$.

În cazul problemei lui Neumann, putem alege de asemenea arbitrar și $\varphi(0)$, precum și $\operatorname{Im} \varphi'_{(1)}(0)$ sau $\operatorname{Im} \varphi'_{(1)}(\infty)$, așadar valoarea $\operatorname{Im} [\varphi'(0)/\omega'(0)]$. (Amintim că avem $\omega'(\zeta) \neq 0$ în \mathcal{D}^+ .)

Vom face uz deocamdată de condiția la limită sub forma ambiguă (18.10). Dat fiind că $\zeta|_\gamma = \sigma$, această condiție se scrie

$$H\varphi(\sigma) + [\omega(\sigma)/\overline{\omega'(\sigma)}] \overline{\varphi'(\sigma)} + \overline{\psi(\sigma)} = H(\sigma). \quad (4)$$

Trecînd în (4) la cantități complex conjugate, obținem încă

$$H\overline{\varphi(\sigma)} + [\overline{\omega(\sigma)}/\omega'(\sigma)] \varphi'(\sigma) + \psi(\sigma) = \overline{H(\sigma)}. \quad (5)$$

Comparînd ecuațiile (4), (5) cu (5.21.7), (5.21.8), este ușor de văzut atît asemănarea cît și deosebirea dintre ele; în problema antiplană avem de-a face cu o singură funcție $\varphi(\zeta)$, iar funcția $H(\sigma)$ depinde acolo în esență numai de configurația geometrică a domeniului.

Soluția nu mai poate fi deci obținută aci sub forma—principal simplă, întrucît este vorba numai de o cuadratură—din (5.21.15). În schimb, faptul că funcțiile $\varphi(\zeta)$, $\psi(\zeta)$ trebuie să fie olomorfe în \mathcal{D}^+ sugerează următoarea metodă de studiu.

Să înmulțim relațiile (4), (5) cu $d\sigma/2\pi i(\sigma - \zeta)$, unde $\zeta \in \mathcal{D}^+$, și să le integrăm pe γ . Ținînd seama în prima din ele de formula (A.10.1) pentru $\varphi(\zeta)$, și de formula (A.11.37) pentru $\psi(\zeta)$, obținem

$$H\varphi(\zeta) + \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{\omega(\sigma) \overline{\varphi'(\sigma)}}{\omega'(\sigma)(\sigma - \zeta)} d\sigma + \overline{\psi(0)} = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{H(\sigma)}{\sigma - \zeta} d\sigma. \quad (6)$$

Repetînd același raționament pentru relația (5), deducem și

$$H\overline{\varphi(0)} + \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{\overline{\varphi(\sigma)} \varphi'(\sigma)}{\omega'(\sigma)(\sigma - \zeta)} d\sigma + \psi(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{\overline{H(\sigma)}}{\sigma - \zeta} d\sigma. \quad (7)$$

Relația (7) dă explicit funcția $\psi(\zeta)$ sub forma

$$\psi(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{\overline{H(\sigma)}}{\sigma - \zeta} d\sigma - \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{\overline{\omega(\sigma)} \varphi'(\sigma)}{\omega'(\sigma)(\sigma - \zeta)} d\sigma - H\overline{\varphi(0)}; \quad (8)$$

aceasta este o sumă de integrale de tip Cauchy, care pot fi calculate de îndată ce funcția $\varphi(\zeta)$ —sau cel puțin $\varphi'(\sigma)$ și $\varphi(0)$ —sînt cunoscute.

Pe de altă parte, relația (6) poate fi scrisă sub forma

$$H\varphi(\zeta) + \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \frac{\overline{\varphi'(\sigma)}}{\sigma - \zeta} d\sigma = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{H(\sigma)}{\sigma - \zeta} d\sigma - \overline{\psi(0)}. \quad (9)$$

Aceasta este *ecuația integro-diferențială a lui Mushelișvili*, care slujește la determinarea funcției $\varphi(\zeta)$ — după care din (8) se obține și funcția $\psi(\zeta)$.

OBSERVAȚIA 1. Ecuația (9) nu este desigur de tip Fredholm, dar studiul ei poate fi redus la cel al unei ecuații de tip Fredholm (în complex) pentru $\varphi'(\sigma)$ — ceea ce, cu ajutorul teoremei de unicitate și al alternativei lui Fredholm, permite demonstrarea *teoremelor de existență* ale elasticității plane pentru domeniile reprezentabile conform pe cerc. (Vezi N. Mushelișvili [5], § 79. Un caz particular va fi examinat ceva mai departe, în § 21. Vezi încă și J. Rovka [1].)

b) Domenii nemărginite, supuse la tensiuni ne-nule la infinit

Acesta este cazul corpurilor plane cu orificii relativ mici față de dimensiunile lor de ansamblu; acțiunea sarcinilor reale este schematizată prin cea a unor sarcini (care nu mai sînt nule) la infinit în planul cu un orificiu de aceeași formă cu cel dat; soluția acestei din urmă probleme furnizează deci o evaluare a concentrării tensiunilor în vecinătatea orificiului.

Vom face deci uz acum nu de formulele (10.42), ci de formulele (10.32), unde constantele a_1, b_1 sînt date de relațiile (10.35), așadar :

$$\varphi_{(1)}(\zeta) = -[X/2\pi(\kappa + 1)] \ln \zeta + a_1 \zeta + \sum_{n=2}^{\infty} a_n \zeta^{-n},$$

$$\psi_{(1)}(\zeta) = [\kappa \bar{X}/2\pi(\kappa + 1)] \ln \zeta + b_1 \bar{\zeta} + \sum_{n=2}^{\infty} b_n \bar{\zeta}^{-n}.$$

Introducînd aci pe ζ din (2) și grupînd termenii olomorfi, obținem

$$\begin{aligned} \varphi(\zeta) &= [X/2\pi(\kappa + 1)] \ln \zeta + a_1 \omega_{-1} \zeta^{-1} + \varphi_0(\zeta), \\ \psi(\zeta) &= -[\kappa \bar{X}/2\pi(\kappa + 1)] \ln \zeta + b_1 \omega_{-1} \bar{\zeta}^{-1} + \psi_0(\zeta), \end{aligned} \quad (10)$$

unde $\varphi_0(\zeta), \psi_0(\zeta)$ sînt olomorfe în D^+ , iar X, a_1, b_1 sînt cunoscute ¹⁰⁾.

Introducînd acum expresiile (10) în (18.8) și ținînd seama că $\bar{\sigma} = \sigma^{-1}$, obținem în cazul problemei lui Dirichlet condiția la limită

$$\kappa \varphi_0(\sigma) - [\omega(\sigma)/\omega'(\sigma)] \overline{\varphi_0'(\sigma)} - \overline{\psi_0(\sigma)} = 2\mu g_0(\sigma), \quad (11)$$

unde

$$\begin{aligned} 2\mu g_0(\sigma) &= 2\mu g(\sigma) + \frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}} \left[\frac{\bar{X}}{2\pi(\kappa + 1)} \sigma - \bar{a}_1 \bar{\omega}_{-1} \sigma^2 \right] - \\ &\quad - \kappa a_1 \omega_{-1} \sigma^{-1} + \bar{b}_1 \bar{\omega}_{-1} \sigma. \end{aligned} \quad (12)$$

¹⁰⁾ După cum am arătat în § 18, nota de la pag 465, păstrăm notațiile, nu valorile coeficienților a_n, b_n . Se vede însă ușor că coeficienții a_1, b_1 din (10) sînt chiar *egali* cu coeficienții lui ζ din dezvoltările în serie ale funcțiilor $\varphi_{(1)}(\zeta), \psi_{(1)}(\zeta)$.

În același fel deducem din (18.9) pentru problema lui Neumann

$$\varphi_0(\sigma) + [\omega(\sigma)/\overline{\omega'(\sigma)}] \overline{\varphi'_0(\sigma)} + \overline{\psi_0(\sigma)} = h_0(\sigma) + \text{const.}, \quad (13)$$

unde

$$h_0(\sigma) = h(\sigma) - \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \left[\frac{\overline{X}}{2\pi(\kappa+1)} \sigma - \overline{a_1} \overline{\omega_{-1}} \sigma^2 \right] - \\ - \frac{X}{2\pi} \ln \sigma - a_1 \omega_{-1} \sigma^{-1} - \overline{b_1} \overline{\omega_{-1}} \sigma. \quad (14)$$

Se verifică ușor (compară cu § 11) că funcțiile $g_0(\sigma)$, $h_0(\sigma)$ sînt uniforme.

Cu aceasta, problema este redusă la determinarea funcțiilor olomorfe $\varphi_0(\zeta)$, $\psi_0(\zeta)$ din condiții la limită de același tip cu condiția (18.10), de care am făcut uz pentru a ajunge la (8), (9).

OBSERVAȚIA 2. Se pune firesc întrebarea dacă aceeași metodă nu poate fi folosită cel puțin în cazul unui domeniu reprezentabil conform pe o coroană mărginită de cercurile J_0 , J_1 . Într-adevăr, formulele de la începutul § A.10 sînt valabile și pentru domenii multiplu conexe. Acum însă, separarea realizată în (8) și (9) între funcțiile $\varphi(\zeta)$, $\psi(\zeta)$ nu mai este posibilă.

În schimb, în acest caz rămîne adesea utilizabilă metoda lui L. Milne-Thomson [2], §§ 6.7 și 6.8 (cu modificările din Corrigenda), adică metoda expusă în § 17, dar transformată prin intermediul reprezentării conforme.

Amintim încă soluția lui S. Belonosov [2], capitolele 1, 2, și 5, bazată pe îmbinarea metodei integralelor de tip Cauchy cu teoria transformatelor Fourier-Laplace.

§ 21. SOLUȚIA PROBLEMELOR FUNDAMENTALE PENTRU DOMENII REPREZENTABILE CONFORM PE DISCUL UNITATE PRIN INTERMEDIUL UNOR FUNCȚII POLINOMIALE

Ca și în cazul problemei antiplane (vezi §§ 5.17 și 5.21), problema plană poate fi rezolvată relativ simplu dacă $\omega(\zeta)$ este o funcție rațională. (Vezi N. Mushelişvili [5], cap. 5.)

Ne vom mărgini aci la cazul în care $\omega(\zeta)$ este un polinom

$$\omega(\zeta) = \omega_1 \zeta + \omega_2 \zeta^2 + \dots + \omega_p \zeta^p, \quad (1)$$

unde am luat $\omega(0) = 0$, și unde presupunem $\omega_p \neq 0$ și $\omega_1 \neq 0$.

În locul raționamentului sugerat în § 18, pag. 466, vom folosi tehnica expusă în § A.11, care elimină de la început calculele inutile.

Pe lângă funcția $\omega(\zeta)$, vom considera și funcția $\omega_*(\zeta) = \overline{\omega(1/\bar{\zeta})}$, definită în (A.11.27). Valorile la limită ale acestor funcții sînt legate de (A.11.33) iar pentru cele ale derivatelor lor, căpătăm din (A.11.35)

$$\overline{\omega'(\sigma)} = -\sigma^2 \omega'_*(\sigma) = \overline{\omega'(1/\bar{\zeta})} \Big|_{\zeta=\sigma}, \quad (2)$$

(unde am renunțat la indicii $+$, $-$, întrucît $\omega(\sigma) \equiv \omega^+(\sigma)$), astfel că din (1) deducem

$$\frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} = \frac{\omega(\zeta)}{\omega'(1/\bar{\zeta})} \Big|_{\zeta=\sigma} = \zeta^p \frac{\omega_1 + \omega_2 \zeta + \dots + \omega_p \zeta^{p-1}}{\bar{\omega}_1 \zeta^{p-1} + 2\bar{\omega}_2 \zeta^{p-2} + \dots + p\bar{\omega}_p} \Big|_{\zeta=\sigma}. \quad (3)$$

Întrucît prin ipoteză avem $\omega'(\zeta) \neq 0$ pentru $|\zeta| \leq 1$, rezultă și $\omega'(1/\bar{\zeta}) \neq 0$ pentru $|\zeta| \geq 1$, astfel că funcția a cărei valoare la limită e dată în (3) nu are poli la distanță finită în exteriorul cercului unitate, și nici pe γ . În punctul de la infinit, ea posedă evident un pol de ordin p , astfel că această funcție poate fi pusă sub forma

$$\omega(\zeta) : \omega'(1/\bar{\zeta}) = \sum_{n=1}^p d_n \zeta^n + d_0 + \sum_{n=1}^{\infty} d_{-n} \zeta^{-n}. \quad (4)$$

Pentru a determina coeficienții d_0, d_1, \dots, d_p , să înmulțim seria (4) cu numitorul din primul membru. Identificînd coeficienții puterilor $\zeta^{2p-1}, \zeta^{2p-2}, \dots, \zeta^{p-1}$, obținem relațiile

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_1 d_p &= \omega_p, \\ \bar{\omega}_1 d_{p-1} + 2\bar{\omega}_2 d_p &= \omega_{p-1}, \\ \dots & \\ \bar{\omega}_1 d_1 + 2\bar{\omega}_2 d_2 + 3\bar{\omega}_3 d_3 + \dots + p\bar{\omega}_p d_p &= \omega_1, \end{aligned} \quad (5)$$

care dau succesiv valorile constantelor d_p, d_{p-1}, \dots, d_1 .

Repetînd raționamentul din (2) pentru funcția $\varphi'(\sigma)$, căpătăm

$$[\omega(\sigma)/\omega'(\sigma)] \varphi'(\sigma) = [\omega(\zeta)/\omega'(1/\bar{\zeta})] \varphi'(1/\bar{\zeta}) \Big|_{\zeta=\sigma}, \quad (6)$$

astfel că funcția ce apare în prima integrală din (20.9) este valoarea la limită a unei funcții olomorfe în exteriorul cercului unitate, cu excepția punctului de la infinit, unde ea posedă un pol de ordin cel mult egal cu p .

Întrucît avem

$$\varphi(\zeta) = a_0 + a_1 \zeta + \dots + a_n \zeta^n + \dots, \quad (7)$$

obținem

$$\varphi'(1/\bar{\zeta}) = \bar{a}_1 + 2\bar{a}_2 \zeta^{-1} + \dots + (n+1)\bar{a}_{n+1} \zeta^{-n} + \dots, \quad |\zeta| > 1; \quad (8)$$

înmulțind (4) cu (8), deducem (vezi (6)) expresia

$$[\omega(\zeta)/\omega'(1/\bar{\zeta})] \varphi'(1/\bar{\zeta}) = \sum_{n=0}^p K_n \zeta^n + K(1/\zeta), \quad (9)$$

unde $K(1/\zeta)$ este olomorfă pentru $|\zeta| > 1$, și nulă la infinit. (Expresia efectivă a acestei funcții nu ne interesează.) În ce privește suma $\sum_{n=0}^p K_n \zeta^n$, aceasta

este partea principală a funcției considerate în (9), în vecinătatea polului său de ordin p de la infinit. Pentru coeficienții ei obținem ușor din (4) și (8)

$$\begin{aligned} K_p &= \bar{a}_1 d_p, \\ K_{p-1} &= \bar{a}_1 d_{p-1} + 2\bar{a}_2 d_p, \\ &\dots \dots \dots (10) \\ K_1 &= \bar{a}_1 d_1 + 2\bar{a}_2 d_2 + \dots + (p-1)\bar{a}_{p-1} d_{p-1} + p\bar{a}_p d_p, \\ K_0 &= \bar{a}_1 d_0 + 2\bar{a}_2 d_1 + \dots + (p-1)\bar{a}_{p-1} d_{p-2} + p\bar{a}_p d_{p-1} + (p+1)\bar{a}_{p+1} d_p. \end{aligned}$$

Introducînd acum valoarea la limită a funcției (9) în (A.10.23), obținem

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \frac{\overline{\varphi'(\sigma)}}{\sigma - \zeta} d\sigma = \sum_{n=0}^p K_n \zeta^n, \quad \zeta \in \mathcal{D}^+, \quad (11)$$

astfel că ecuația (20.9) se reduce la

$$H \varphi(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{H(\sigma)}{\sigma - \zeta} d\sigma - \sum_{n=0}^p K_n \zeta^n - \overline{\psi(0)}, \quad (12)$$

ceea ce dă funcția $\varphi(\zeta)$ de îndată ce constantele K_n sînt determinate.

Termenul integral din (12) are evident forma (A.11.41), astfel că

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{H(\sigma)}{\sigma - \zeta} d\sigma = \sum_{n=0}^{\infty} H_n \zeta^n, \quad \zeta \in \mathcal{D}^+, \quad (13)$$

iar din (A.11.43), (A.11.44) urmează și

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{\overline{H(\sigma)}}{\sigma - \zeta} d\sigma = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{H_{-n}} \zeta^n, \quad \zeta \in \mathcal{D}^+, \quad (14)$$

unde H_n sînt coeficienții dezvoltării Fourier ai funcției $H(\sigma)$ (vezi și § A.9, pag. 763). Introducînd (13) în (12), obținem deci

$$H \varphi(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} H_n \zeta^n - \sum_{n=0}^p K_n \zeta^n - \overline{\psi(0)}. \quad (15)$$

Utilizînd dezvoltarea în serie Taylor din (7) și ținînd seama de teorema de unicitate (vezi § A.5, pag. 715), obținem prin identificarea coeficienților

$$\begin{aligned} H a_0 &= H_0 - K_0 - \overline{\psi(0)}, \\ H a_n &= H_n - K_n, & n &= 1, 2, \dots, p, \\ H a_n &= H_n, & n &= p+1, \dots \end{aligned} \quad (16)$$

Relațiile (16) dau direct valorile coeficienților a_n pentru $n \geq p + 1$. Introducând în (16) expresiile (10) ale coeficienților K_n ($n \neq 0$), obținem p ecuații algebrice liniare pentru coeficienții a_1, a_2, \dots, a_p ; odată cu aceasta căpătăm și valorile constantelor K_1, K_2, \dots, K_p . Constanta K_0 se obține din ultima relație (10). De îndată ce este aleasă constanta $\bar{b}_0 = \bar{\psi}(0)$ (de care putem dispune întotdeauna), coeficientul a_0 poate fi calculat din prima relație (16). Funcția $\varphi(\zeta)$ este astfel determinată.

Trecând la calculul funcției $\psi(\zeta)$ cu ajutorul formulei (20.8) și remarcând că din (A.11.32) obținem (neglijând indicii $+$, $-$)

$$[\overline{\omega(\sigma)}/\omega'(\sigma)] \varphi'(\sigma) = [\overline{\omega(1/\bar{\zeta})}/\omega'(\zeta)] \varphi'(\zeta)|_{\zeta=\sigma}, \quad (17)$$

deducem — utilizând și (3), (4) — că aceasta este valoarea la limită a unei funcții olomorfe pentru $|\zeta| < 1$, cu excepția originii unde ea posedă un pol de ordin cel mult p . Formulele (A.10.20) și (9) ne permit deci să scriem (compară cu (11)) :

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{\overline{\omega(\sigma)}}{\omega'(\sigma)} \frac{\varphi'(\sigma)}{\sigma - \zeta} d\sigma = \frac{\overline{\omega(1/\bar{\zeta})}}{\omega'(\zeta)} \varphi'(\zeta) - \sum_{n=1}^p \bar{K}_n \zeta^{-n} = \bar{K}(\zeta), \quad \zeta \in D^+, \quad (18)$$

unde $\bar{K}(\zeta)$ este o funcție cunoscută, olomorfă în D^+ , și nu cu necesitate nulă în origine.

Introducând acum (14) și (18) în (20.8), și ținând seama de prima relație (16) care dă valoarea constantei $H\varphi(0)$, obținem

$$\psi(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{H}_n \zeta^n - \bar{K}(\bar{\zeta}) + (1/H)(\bar{K}_0 + \psi(0) - \bar{H}_0). \quad (19)$$

Alegând $\psi(0) = 0$, deducem deci din (15) și (19) soluția

$$H\varphi(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} H_n \zeta^n - \sum_{n=0}^p K_n \zeta^n, \quad (20)$$

$$\psi(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{H}_n \zeta^n - [\overline{\omega(1/\bar{\zeta})}/\omega'(\zeta)] \varphi'(\zeta) + \sum_{n=1}^p \bar{K}_n \zeta^{-n} + (1/H)(\bar{K}_0 - \bar{H}_0).$$

Dacă este preferabil să folosim integralele din (13), (14), avem și

$$H\varphi(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{H(\sigma)}{\sigma - \zeta} d\sigma - \sum_{n=0}^p K_n \zeta^n, \quad (21)$$

$$\psi(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{\bar{H}(\sigma)}{\sigma - \zeta} d\sigma - \frac{\overline{\omega(1/\bar{\zeta})}}{\omega'(\zeta)} \varphi'(\zeta) + \sum_{n=1}^p \bar{K}_n \zeta^{-n} - \bar{\varphi}(0).$$

Prin urmare, una din ecuațiile (24), (25) poate fi eliminată, ca combinație liniară a celorlalte, astfel că una dintre cantitățile a_n , \bar{a}_n (sau dintre mărimile $\operatorname{Re} a_n$, $\operatorname{Im} a_n$) rămâne nedeterminată. Întrucît în problema lui Neumann putem dispune de valoarea $\operatorname{Im} [\varphi'(0)/\omega'(0)]$ (vezi § 20, pag. 480), vom adăuga sistemului drept cea de a $(2n)$ -a, ecuație, relația

$$\operatorname{Im} a_1 = 0. \quad (26)$$

Sistemul astfel modificat are întotdeauna soluție (unică). Pentru a ne convinge de aceasta, este suficient să arătăm că sistemul omogen corespunzător posedă numai soluția identic nulă. Or, aceasta se vede punînd pur și simplu $h(s) \equiv 0$, și ținînd seama de teorema de unicitate a teoriei elasticității.

În cazul problemei lui Dirichlet, coeficienții H_n nu sînt legați prin nici o condiție; sistemul neomogen analog cu (24), (25) are cu siguranță soluție (unică) în virtutea aceleiași teoreme de unicitate, și toate constantele a_n (inclusiv a_1) sînt deplin determinate.

Pentru a obține soluția sub forma (20), am presupus că ea *există* (așadar că datele sînt de așa natură încît problema să aibă soluție), și că ea este *regulată* (așadar că funcțiile $\varphi(\zeta)$, $\varphi'(\zeta)$, $\psi(\zeta)$ pot fi prelungite pe γ). Soluția de forma (20) satisface evident condițiile la limită — dacă funcțiile φ , φ' , ψ astfel construite sînt prelungibile pe γ , și dacă constantele K_n (și deci și a_n) pot fi determinate. Pentru aceasta este suficient să avem $H'(\sigma) \in C_\mu^0(\gamma)$ (vezi (21) și § A.11, pag. 776), și ca \mathcal{L} să fie de clasă C^2 (vezi § A.6, pag. 729—730).

Astfel, este demonstrată o *teoremă de existență* pentru domenii care sînt imagini ale discului unitate prin intermediul unor funcții de reprezentare polinomiale, și pentru deplasări la limită $g(s) \in C_\mu^1(\mathcal{L})$, respectiv pentru forțe superficiale $f(s) \in C_\mu^0(\mathcal{L})$.

Felul în care se ajunge aci la demonstrarea *existenței* este caracteristic pentru raționamentul general, bazat pe teorema de *unicitate*: ecuația integro-diferențială a problemei este redusă la o ecuație pentru care poate fi utilizată alternativa lui Fredholm — cu aceeași semnificație ca alternativa care a dus la afirmarea existenței soluției sistemului (24) — (26). (Vezi și observația din § 20, pag. 421).

OBSERVAȚIA 1. Aceeași metodă poate fi folosită pentru \mathcal{D} nemărginit, dacă funcția $\omega_0(\zeta)$ din (20.2) este un polinom. Problemele de rezolvat sînt problemele (20.11) și (20.13).

OBSERVAȚIA 2. Rezultate de același tip au fost obținute de N. Muskhelișvili [5], capitolul 5, în cazul unei funcții $\omega(\zeta)$ *raționale*. Funcția (6) este atunci valoarea la limită a unei funcții meromorfe, care posedă în exteriorul cercului unitate și *alți poli*, în afara punctului de la infinit. Raționamentul rămîne același, dar locul formulelor (A.10.1), (A.10.2) și al consecințelor lor îl iau formulele (A.10.20), (A.10.23) și consecințele analoage.

Vezi de asemenea S. Mikhlin [1], § 73, cu demonstrarea teoremei lui D. Șerman asupra soluției prin cuadraturi a problemei *mixte* pentru $\omega(\zeta)$ rațională.

§ 22. PROBLEMA LUI NEUMANN. (METODA ECUAȚIEI
INTEGRO-DIFERENȚIALE A LUI MUSHELIȘVILI)
EXEMPLE

Ne limităm la exemple destinate a ilustra rezultatele din § 21.

a) Discul circular

Funcția de reprezentare (21.1) este în acest caz

$$z = \omega(\zeta) = R_0 \zeta, \quad R_0 > 0, \quad (1)$$

unde R_0 este raza cercului. Prin urmare, (21.4) devine

$$\omega(\zeta)/\overline{\omega'(1/\bar{\zeta})} = \zeta, \quad (2)$$

iar din (21.9) urmează

$$[\omega(\zeta)/\overline{\omega'(1/\bar{\zeta})}] \overline{\varphi'(1/\bar{\zeta})} = \bar{a}_1 \zeta + 2 \bar{a}_2 + K(1/\zeta). \quad (3)$$

Mai departe, sistemul (21.10) se scrie

$$K_1 = \bar{a}_1, \quad K_0 = 2 \bar{a}_2, \quad (4)$$

astfel că pentru $H = 1$, $H(\sigma) = h(\sigma) + C_0$, $\psi(0) = 0$, din (21.16) avem

$$a_0 = h_0 + C_0 - 2 \bar{a}_2; \quad a_1 = h_1 - \bar{a}_1; \quad a_n = h_n, \quad n \geq 2. \quad (5)$$

Alegînd $a_0 = \operatorname{Im} a_1 = 0$, (21.23) devine aci $\operatorname{Im} h_1 = 0$, și obținem

$$a_1 = \frac{1}{2} h_1, \quad a_2 = h_2, \quad (6)$$

și încă $C_0 = 2 \bar{h}_2 - h_0$. Cu aceasta, din (21.22) avem soluția

$$\varphi(\zeta) = \frac{1}{2} h_1 \zeta + \sum_{n=2}^{\infty} h_n \zeta^n, \quad \psi(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{h}_{-n} \zeta^n - \sum_{n=3}^{\infty} n h_n \zeta^{n-2}, \quad (7)$$

ceea ce, ținînd seama de (1), coincide evident cu (15.5).

Pentru cazurile în care e avantajos să reținem forma (21.21) a soluției, găsim (pentru $H = 1$, $H(\sigma) = h(\sigma) + C_0$, $\varphi(0) = 0$):

$$\begin{aligned} \varphi(\zeta) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{h(\sigma)}{\sigma - \zeta} d\sigma - K_0 - K_1 \zeta + C_0, \\ \psi(\zeta) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{\bar{h}(\sigma)}{\sigma - \zeta} d\sigma - \varphi'(\zeta) \zeta^{-1} + \bar{K}_1 \zeta^{-1} + \bar{C}_0, \end{aligned}$$

de unde mai departe

$$\begin{aligned}\varphi(\zeta) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{h(\sigma)}{\sigma - \zeta} d\sigma - \frac{1}{2} h_1 \zeta - h_0, \\ \psi(\zeta) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{\overline{h(\sigma)}}{\sigma - \zeta} d\sigma - \varphi'(\zeta) \zeta^{-1} + \frac{1}{2} h_1 \zeta^{-1} + 2h_2 - \bar{h}_0.\end{aligned}\quad (8)$$

Evident, avem (vezi (A.9.25))

$$h_0 = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{h(\sigma)}{\sigma} d\sigma. \quad (9)$$

Mai departe, întrucît $\frac{1}{2} h_1 = a_1$, din prima relație (8) deducem

$$\frac{1}{2} h_1 = \varphi'(0) = \left[\frac{d}{d\zeta} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{h(\sigma)}{\sigma - \zeta} d\sigma \right] \Big|_{\zeta=0} - \frac{1}{2} h_1,$$

de unde

$$h_1 = \left[\frac{d}{d\zeta} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{h(\sigma)}{\sigma - \zeta} d\sigma \right] \Big|_{\zeta=0}. \quad (10)$$

În fine, întrucît $h_2 = a_2$, avem și

$$h_2 = \frac{1}{2} \varphi''(0) = \frac{1}{2} \left[\frac{d^2}{d\zeta^2} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{h(\sigma)}{\sigma - \zeta} d\sigma \right] \Big|_{\zeta=0}. \quad (11)$$

De altfel, toate acestea decurg și din dezvoltarea în serie a integralei

$$h(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{h(\sigma)}{\sigma - \zeta} d\sigma.$$

Acest exemplu constituie o ilustrare deosebit de simplă pentru compararea metodei din § 21 cu cea din § 15.

b) Discul circular sub acțiunea unor sarcini concentrate aplicate pe frontieră

Fie că în punctele $z_k = R_0 \exp(i\chi_k)$, unde $0 \leq \chi_1 < \chi_2 < \dots < \chi_p < 2\pi$, sînt aplicate forțele concentrate $f_k = f_{k1} + i f_{k2}$. (Problema cuprinde drept caz particular pe cea tratată în § 16, exemplul b.) Punctele z_k sînt, în reprezentarea (1), imaginile punctelor $\sigma_k = \exp(i\chi_k) \in \gamma$.

Funcția $h(\chi) = i \int_0^\chi f(s) ds$ din (11.6) este discontinuă. Raționând la fel ca în § 16, exemplul **b**, vom scrie

$$h(\chi) = i \sum_{k=1}^h f_k \quad \text{pentru } \chi_h \leq \chi < \chi_{h+1}, \quad (12)$$

unde $\chi_{p+1} = \chi_1$ și unde evident trebuie să avem $\sum_{k=1}^p f_k = 0$.

Abstracție făcând de constanta C_0 , obținem din (21.13)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{h(\sigma)}{\sigma - \zeta} d\sigma &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{h=1}^p \int_{\sigma_h}^{\sigma_{h+1}} i \sum_{k=1}^h f_k \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{h=1}^p \sum_{k=1}^h f_k \ln [(\sigma_{h+1} - \zeta)/(\sigma_h - \zeta)] = -\frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^p f_k \ln (\sigma_k - \zeta). \end{aligned} \quad (13)$$

Tot astfel obținem și (vezi mai sus (12))

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{\overline{h(\sigma)}}{\sigma - \zeta} d\sigma = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^p \bar{f}_k \ln (\sigma_k - \zeta). \quad (14)$$

După cum se vede, în acest caz este avantajos să utilizăm formulele compacte (8), și nu dezvoltările (7). Din (13) și (9)–(11) avem acum

$$h_0 = -\frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^p f_k \ln \sigma_k, \quad h_1 = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^p f_k / \sigma_k, \quad h_2 = \frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^p f_k / \sigma_k^2. \quad (15)$$

Condiția ca $h_1 = 2a_1$ să fie o cantitate reală se scrie

$$\operatorname{Im} \sum_{k=1}^p f_k \bar{\sigma}_k = R_0^{-1} \sum_{k=1}^p (x_{k1} f_{k2} - x_{k2} f_{k1}) = 0, \quad (16)$$

și coincide evident cu condiția $\mathcal{M}_3 = 0$.

Din (8) și (13)–(15) obținem după calcule elementare

$$\begin{aligned} \varphi(\zeta) &= -\frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^p f_k \ln (1 - \zeta/\sigma_k) - \frac{\zeta}{4\pi} \sum_{k=1}^p f_k / \sigma_k, \\ \psi(\zeta) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^p \bar{f}_k \ln (1 - \zeta/\sigma_k) - \frac{\zeta}{2\pi} \sum_{k=1}^p f_k / [\sigma_k^2 (\sigma_k - \zeta)]. \end{aligned} \quad (17)$$

Luând aci în particular $\chi_1 = \chi_0$, $\chi_2 = 2\pi - \chi_0$, $f_1 = -iP$, $f_2 = iP$, se obțin din (17) tocmai formulele (16.10), inclusiv constantele adi-tive neesențiale.

c) Planul cu un orificiu eliptic. Concentrarea tensiunilor

Funcția (A.8.8) realizează reprezentarea conformă a unei coroane circulare pe o coroană eliptică. Dacă raza cercului exterior tinde la infinit, căpătăm reprezentarea exteriorului unui cerc pe exteriorul unei elipse. Pentru a obține reprezentarea discului unitate pe exteriorul unei elipse, este suficient să considerăm și inversiunea $\zeta \Rightarrow 1/\zeta$, ceea ce conduce la funcția

$$\delta = \omega(\zeta) = c(\zeta^{-1} + h\zeta), \quad (18)$$

de unde

$$x_1 = c(\rho^{-1} + h\rho) \cos \theta, \quad x_2 = -c(\rho^{-1} - h\rho) \sin \theta. \quad (19)$$

În notațiile din § 20, avem desigur $c = \omega_{-1}$.

Alegînd $\rho = 1$, obținem condiția $\rho^{-1} - h\rho > 0$, astfel că trebuie să avem $h < 1$ pentru ca funcția (18) să realizeze reprezentarea discului \mathcal{D}^+ pe exteriorul elipsei de semi-axe

$$a = c(1 + h), \quad b = c(1 - h). \quad (20)$$

Pentru a putea utiliza relațiile (20.8), (20.9) — deduse pentru *deplasări și tensiuni nule la infinit* — vom calcula mai întîi valorile la limită:

$$\frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} = \frac{1 + h\sigma^2}{\sigma(h - \sigma^2)}, \quad \frac{\overline{\omega(\sigma)}}{\overline{\omega'(\sigma)}} = \frac{\sigma(h + \sigma^2)}{h\sigma^2 - 1}. \quad (21)$$

Formulele menționate dau aci (după ce am renunțat la constanta C_0):

$$\begin{aligned} \varphi(\zeta) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{h(\sigma)}{\sigma - \zeta} d\sigma - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{1 + h\sigma^2}{\sigma(h - \sigma^2)} \frac{\overline{\varphi'(\sigma)}}{\sigma - \zeta} d\sigma, \\ \psi(\zeta) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{\overline{h(\sigma)}}{\sigma - \zeta} d\sigma - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{\sigma(h + \sigma^2)}{h\sigma^2 - 1} \frac{\varphi'(\sigma)}{\sigma - \zeta} d\sigma. \end{aligned} \quad (22)$$

În cele de mai sus, funcția $\overline{\varphi'(\sigma)}$ este valoarea la limită a unei funcții olomorfe în \mathcal{D}^- (vezi (A.11.35)).

Prima funcție din (21) este valoarea la limită a funcției

$$\begin{aligned} \frac{1 + h\zeta^2}{\zeta(h - \zeta^2)} &= -\frac{1 + h\zeta^2}{\zeta^3(1 - h\zeta^{-2})} = \\ &= -(1 + h\zeta^2)\zeta^{-3}(1 + h\zeta^{-2} + h^2\zeta^{-4} + \dots), \end{aligned} \quad (23)$$

așadar (întrucît avem $h < 1$, și deci $|h\zeta^{-2}| < 1$ pentru $\zeta \in \mathcal{D}^-$), a unei funcții olomorfe în \mathcal{D}^- și nule la infinit. Prin urmare, în virtutea formu-

lei (A.10.2), integrala ce conține pe $\overline{\varphi'(\sigma)}$ în (22) este nulă, și astfel obținem

$$\varphi(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{h(\sigma)}{\sigma - \zeta} d\sigma. \quad (24)$$

A doua expresie din (21) este valoarea la limită a funcției

$$\begin{aligned} \frac{\zeta(h + \zeta^2)}{h\zeta^2 - 1} &= -\zeta \frac{h + \zeta^2}{1 - h\zeta^2} = \\ &= -\zeta(h + \zeta^2)(1 + h\zeta^2 + h^2\zeta^4 + \dots), \end{aligned} \quad (25)$$

așadar (întrucât $h < 1$, și deci $|h\zeta^2| < 1$ pentru $\zeta \in \mathcal{H}^+$), a unei funcții olomorfe în \mathcal{H}^+ . Integrala din expresia (22) a funcției $\psi(\zeta)$ se calculează deci cu ajutorul formulei (A.10.1), de unde

$$\psi(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{\overline{h(\sigma)}}{\sigma - \zeta} d\sigma + \frac{\zeta(h + \zeta^2)}{1 - h\zeta^2} \varphi'(\zeta). \quad (26)$$

Dimpotrivă, să presupunem acum că *deplasările și tensiunile nu sînt nule la infinit*. Formulele precedente își pierd desigur valabilitatea, și soluția are în acest caz forma (20.10), unde funcțiile $\varphi_0(\zeta)$, $\psi_0(\zeta)$ se obțin din formulele (24), (26), dar unde $h(\sigma)$ trebuie înlocuită prin $h_0(\sigma)$ dată de relația (20.14), care în problema de față devine

$$\begin{aligned} h_0(\sigma) &= h(\sigma) - \frac{1 + h\sigma^2}{h - \sigma^2} \left[\frac{\overline{X}}{2\pi(\kappa + 1)} - \overline{a}_1 \sigma c \right] - \\ &\quad - \frac{X}{2\pi} \ln \sigma - a_1 c \sigma^{-1} - b_1 c \sigma; \end{aligned} \quad (27)$$

(a_1 , b_1 au valorile din (10.33), iar c este constanta din (18)).

Cu titlu de exemplu, să considerăm cazul unui orificiu eliptic liber ($h(\sigma) = X = 0$), planul fiind supus la infinit la o întindere P după o direcție ce formează un unghi ϑ cu Ox_1 . Notînd cu z^1 afixul unui punct în noile axe, rotite de un unghi ϑ față de axele Ox_1x_2 , obținem din (9.16), (9.20) tensiunile la infinit

$$S_0 = S_0^1 = P, \quad S = [\exp(-2i\vartheta)] S^1 = -[\exp(-2i\vartheta)] P, \quad (28)$$

și deci, utilizînd (10.33):

$$a_1 = \overline{a}_1 = \frac{1}{4} P, \quad b_1 = -\frac{1}{2} [\exp(-2i\vartheta)] P. \quad (29)$$

Din (27) căpătăm acum (întrucît $\bar{\sigma} = \sigma^{-1}$):

$$h_0(\sigma) = \frac{1}{4} cP \left[\frac{\sigma(1 + h\sigma^2)}{h - \sigma^2} - \sigma^{-1} \right] + \frac{1}{2} cP [\exp(2i\vartheta)]\sigma, \quad (30)$$

$$\overline{h_0(\sigma)} = -\frac{1}{4} cP \left[\frac{h + \sigma^2}{\sigma(1 - h\sigma^2)} + \sigma \right] + \frac{1}{2} cP [\exp(-2i\vartheta)]\sigma^{-1}.$$

Cu ajutorul relației (23) obținem

$$\begin{aligned} \frac{\zeta(1 + h\zeta^2)}{h - \zeta^2} &= -(1 + h\zeta^2)\zeta^{-1} (1 + h\zeta^{-2} + h^2\zeta^{-4} + \dots) = \\ &= -h\zeta - \zeta^{-1} - h^2\zeta^{-1} - \dots, \end{aligned} \quad (31)$$

de unde conchidem că această funcție este olomorfă în \mathcal{D}^- , cu excepția punctului de la infinit, unde ea posedă un pol de primul ordin.

Tot astfel, cu ajutorul relației (25) deducem că

$$\begin{aligned} \frac{h + \zeta^2}{\zeta(1 - h\zeta^2)} &= (h + \zeta^2)\zeta^{-1} (1 + h\zeta^2 + h^2\zeta^4 + \dots) = \\ &= h\zeta^{-1} + (1 + h^2)\zeta + \dots, \end{aligned} \quad (32)$$

astfel că această funcție este olomorfă în \mathcal{D}^+ , cu excepția originii, unde ea posedă un pol de primul ordin.

Făcînd acum uz de (A.10.23), respectiv de (A.10.20), obținem deci

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{\sigma(1 + h\sigma^2)}{h - \sigma^2} \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} &= -h\zeta, \\ \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{h + \sigma^2}{\sigma(1 - h\sigma^2)} \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} &= \frac{h + \zeta^2}{\zeta(1 - h\zeta^2)} - \frac{h}{\zeta} = \frac{(1 + h^2)\zeta}{1 - h\zeta^2}, \end{aligned} \quad (33)$$

și mai departe, evident,

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{d\sigma}{\sigma(\sigma - \zeta)} = 0, \quad \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{\sigma d\sigma}{\sigma - \zeta} = \zeta. \quad (34)$$

Formulele (24) și (26) scrise pentru funcțiile $\varphi_0(\zeta)$, $\psi_0(\zeta)$ dau așadar

$$\begin{aligned} \varphi_0(\zeta) &= \frac{1}{4} cP [2 \exp(2i\vartheta) - h]\zeta, \\ \psi_0(\zeta) &= -\frac{1}{4} cP \left[\frac{1 + h^2}{1 - h\zeta^2} + 1 \right] \zeta + \frac{h + \zeta^2}{1 - h\zeta^2} \zeta \varphi'_0(\zeta), \end{aligned} \quad (35)$$

astfel că în definitiv, introducînd (35) și (29) în (20.10), avem

$$\varphi(\zeta) = \frac{1}{4} cP [\zeta^{-1} + (2 \exp(2i\vartheta) - h)\zeta], \quad (36)$$

$$\psi(\zeta) = -\frac{1}{2} cP \left[(\exp(-2i\vartheta))\zeta^{-1} + \frac{1 + h^2 - h [\exp(2i\vartheta)] - [\exp(2i\vartheta)]\zeta^2}{1 - h\zeta^2} \zeta \right],$$

Să comparăm această soluție cu cea din problema planului *fără orificiu*, supus aceleiași sarcini la infinit (notată cu un indice i — stare inițială). Pentru aceasta, remarcăm că din (10.32) rezultă (vezi și finele § 16, pag. 458) că avem

$$\varphi_{(i)}^{(1)}(\zeta) = a_{1\zeta}, \quad \psi_{(i)}^{(1)}(\zeta) = b_{1\zeta}, \quad (37)$$

de unde, utilizînd (18) și (29), urmează

$$\varphi^{(1)}(\zeta) = \frac{1}{4} cP (\zeta^{-1} + h\zeta), \quad \psi^{(1)}(\zeta) = -\frac{1}{2} cP [\exp(-2i\vartheta)] (\zeta^{-1} + h\zeta). \quad (38)$$

Diferența dintre funcțiile (36) și (38) descrie tocmai perturbarea stării elastice a planului, provocată de prezența orificiului eliptic.

În cazul-limită $h = 0$ al unui orificiu circular (studiat în (16.25) pentru $\vartheta = 0$) deducem din (36):

$$\begin{aligned} \varphi(\zeta) &= \frac{1}{4} cP \{ \zeta^{-1} + 2 [\exp(2i\vartheta)] \zeta \}, \\ \psi(\zeta) &= -\frac{1}{2} cP \{ [\exp(-2i\vartheta)] \zeta^{-1} + \zeta - [\exp(2i\vartheta)] \zeta^3 \}. \end{aligned} \quad (39)$$

Celălalt caz-limită ($h = 1$) corespunde prezenței unei fisuri rectilinii:

$$\begin{aligned} \varphi(\zeta) &= \frac{1}{4} cP \{ \zeta^{-1} + [2 \exp(2i\vartheta) - 1] \zeta \}, \\ \psi(\zeta) &= -\frac{1}{2} cP \left[[\exp(-2i\vartheta)] \zeta^{-1} + \frac{2 - [\exp(2i\vartheta)] (1 + \zeta^2)}{1 - \zeta^2} \zeta \right]. \end{aligned} \quad (40)$$

Se poate aprecia ușor efectul prezenței orificiului eliptic. În acest scop, să remarcăm că din (18.6) și (9.16) obținem în orice sistem de axe —

deci și în coordonate naturale — valoarea $S_0 = \widehat{\rho\rho} + \widehat{\theta\theta}$. Întrucât frontiera orificiului este liberă, deducem

$$\widehat{\rho\rho}|_{\mathcal{L}_1} = \widehat{\rho\theta}|_{\mathcal{L}_1} = 0, \quad (41)$$

și deci

$$\widehat{\theta\theta}|_{\mathcal{L}_1} = 4 \operatorname{Re} [\varphi'(\sigma)/\omega'(\sigma)]. \quad (42)$$

Prin urmare, utilizând (36) și (18) deducem (a nu se confunda ϑ și θ !)

$$\begin{aligned} \widehat{\theta\theta}|_{\mathcal{L}_1} &= P \operatorname{Re} \{ [1 - (2 \exp(2i\vartheta) - h) \exp(2i\theta)] : [1 - h \exp(2i\theta)] \} \\ &= P [1 - h^2 + 2h \cos 2\vartheta - 2 \cos 2(\vartheta + \theta)] : [1 - 2h \cos 2\theta + h^2], \end{aligned} \quad (43)$$

de unde în particular pentru cerc ($h = 0$):

$$\widehat{\theta\theta}|_{\mathcal{L}_1} = P [1 - 2 \cos 2(\vartheta + \theta)], \quad (44)$$

și pentru fisura rectilie ($h = 1$):

$$\widehat{\theta\theta}|_{\mathcal{L}_1} = P [\cos 2\vartheta - \cos 2(\vartheta + \theta)] : [1 - \cos 2\theta]. \quad (45)$$

Luând $\vartheta = 0$ (sarcină dirijată după Ox_1), căpătăm din (43)

$$\widehat{\theta\theta}|_{\mathcal{L}_1} = P [1 + 2h - h^2 - 2 \cos 2\theta] : [1 + h^2 - 2h \cos 2\theta]. \quad (46)$$

Derivata acestei cantități în raport cu θ conține în factor pe $\sin 2\theta$, și deci se anulează — pentru orice h — pentru $\theta = 0$ și $\theta = \pi/2$. Ținând seama de (20), obținem valorile

$$\widehat{\theta\theta}|_{\mathcal{L}_1}^{\theta=0} = -P, \quad \widehat{\theta\theta}|_{\mathcal{L}_1}^{\theta=\pi/2} = P \left(1 + 2 \frac{1-h}{1+h} \right) = P \left(1 + 2 \frac{b}{a} \right). \quad (47)$$

În punctul-frontieră $\theta = \pi/2$ avem deci, în cazul cercului, concentrarea maximă pentru tensiunea normală: $\widehat{\theta\theta} = 3P$. Dimpotrivă, în cazul fisurii rectilinie avem $\widehat{\theta\theta}|_{\theta=\pi/2} = P$: sarcina la infinit dirijată după direcția fisurii nu modifică tensiunile normale în vecinătatea acesteia.

În punctele de intersecție ale elipsei cu axa Ox_1 obținem din (43):

$$\widehat{\theta\theta}|_{\theta=0, \pi} = P [1 + h - 2 \cos 2\vartheta] : [1 - h] = P [a/b - (1 + a/b) \cos 2\vartheta]. \quad (48)$$

Pentru $h = 1$ ($b = 0$), tensiunile devin infinite, oricare ar fi $\vartheta \neq 0$.

Cele de mai sus constituie exemple simple de studiu a *concentrării tensiunilor* în problema plană. O cercetare detaliată a acestei probleme (incluzând rezultate relative la încovoierea plăcilor, la corpuri anizotrope, date experimentale etc.) este dată în monografia lui G. Savin [1].

Vezi de asemenea A. Green și W. Zerna [1], capitolul 8 (și cap. 9—pentru cazul anizotrop); L. Milne—Thomson [2], §§ 6.3 și 6.4; lucrările lui S. Belonosov [3]; E. Burmistrov [1]; S. Heler et al. [1]; G. Șapiro [1] — și lucrările mai recente ale lui M. Kikukava [1] — [4] și N. Kurdin [1]. Pentru utilizarea de ecuații de ordin superior în teoria plăcilor, vezi B. Pelch [1]. Pentru un punct de vedere permițând evitarea apariției de tensiuni infinite în vecinătatea fisurilor, vezi indicațiile din § 6.25 pag. 508. Pentru cazul teoriei asimetrice, vezi G. Savin [2], § 4.

§ 23. PROBLEMA LUI NEUMANN PENTRU DOMENII MULTIPLU CONEXE. ALGORITMUL ALTERNANT GENERALIZAT AL LUI SCHWARZ-MIHLIN

O cale posibilă de rezolvare efectivă a problemelor fundamentale pentru domenii *multiplu conexe* este dată de generalizarea la teoria elasticității a algoritmului alternant al lui Schwarz. Pentru detalii, vezi S. Mihlin [1], §§ 48—53. (Vezi și indicațiile din § 4.4, pag. 135.) În cele ce urmează, vom prezenta ideea algoritmului alternant, și o schiță a raționamentului ce îl justifică.

a) Algoritmul alternant

Să considerăm ca exemplu problema lui Neumann pentru un domeniu mărginit de două curbe simple închise $\mathcal{L}_0, \mathcal{L}_1$, conducând la problema la limită

$$\varphi(t) + t\overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)} = h^{(j)}(t) + C_j, \quad t \in \mathcal{L}_j, \quad (j = 0, 1). \quad (1)$$

Presupunând deja efectuată separarea eventualilor termeni multi-formi (vezi § 11, pag. 418), rezultă că funcțiile φ, ψ sînt olomorfe în \mathcal{D} , iar $h^{(0)}(t), h^{(1)}(t)$ sînt uniforme pe \mathcal{L} . Să luăm pentru început $h^{(1)}(t) = C_1 = 0$.

Să admitem acum că putem rezolva problema (1) pentru domeniul *simplu conex* \mathcal{D}_0^+ ; funcțiile lui Kolosov și Mushelișvili obținute pot fi privite ca o primă aproximație a soluției, și vor fi notate cu indici la stînga: ${}_1\varphi(z), {}_1\psi(z)$. Cunoașterea lor permite să calculăm funcția

$${}_1h(t) \equiv {}_1\varphi(t) + t\overline{{}_1\varphi'(t)} + \overline{{}_1\psi(t)}, \quad t \in \mathcal{L}_1. \quad (2)$$

Dacă obținem astfel ${}_1h(t) \equiv 0$ pe \mathcal{L}_1 , problema (1) este rezolvată. Dacă nu, se trece la rezolvarea problemei lui Neumann pentru domeniul nemărginit \mathcal{D}_1^- , cu datele la limită ce rezultă din (2). Aceasta duce la

determinarea unor funcții Kolosov-Mushelișvili ${}_2\varphi(\zeta)$, ${}_2\psi(\zeta)$, iar funcțiile ${}_1\varphi - {}_2\varphi$, ${}_1\psi - {}_2\psi$ rezolvă evident o anumită problemă Neumann pentru domeniul \mathcal{D} cu componenta \mathcal{L}_1 a frontierei libere, așa cum cere condiția (1). Dacă în același timp condiția (1) pe \mathcal{L}_0 rămâne satisfăcută, aceasta este soluția exactă. În general însă, apariția funcțiilor $-{}_2\varphi$, $-{}_2\psi$ face ca (1) (tocmai condiția din care am dedus funcțiile ${}_1\varphi$, ${}_1\psi$) să nu mai fie verificată pe \mathcal{L}_0 . Este deci firesc să rezolvăm acum o nouă problemă Neumann cu date la limită ce se obțin calculând

$${}_2h(t) = {}_2\varphi(t) + t \overline{{}_2\varphi'(t)} + \overline{{}_2\psi(t)}, \quad t \in \mathcal{L}_0, \quad (3)$$

ceea ce conduce la găsirea unor funcții ${}_3\varphi(\zeta)$, ${}_3\psi(\zeta)$. Funcțiile ${}_1\varphi - {}_2\varphi + {}_3\varphi$, ${}_1\psi - {}_2\psi + {}_3\psi$ asigură acum verificarea condiției la limită pe \mathcal{L}_0 , dar pretind o nouă corecție pe \mathcal{L}_1 , datorată apariției termenilor ${}_3\varphi$, ${}_3\psi$ — și procesul continuă astfel la infinit.

În determinarea termenilor de ordin par, așadar când se rezolvă probleme Neumann pentru domeniul \mathcal{D}_1^- , apar termeni constanți pe care trebuie să-i neglijăm; aceștia pot fi priviți ca fiind valorile la infinit ale funcțiilor lui Kolosov și Mushelișvili, întrucât, prin ipoteză, nu există termeni logaritmici sau polari la infinit.

Putem renunța acum la presupunerea inițială $h^{(1)}(t) \equiv 0$: într-adevăr, dacă componenta \mathcal{L}_1 nu este liberă, este suficient să scădem din primul membru din (2) funcția $h^{(1)}(t)$, și lanțul ulterior de raționamente rămâne intact.

b) Exemplu

Reproducem aci, cu unele detalii, un exemplu dat de S. Mihlin [1], § 53. Fie o coroană, circulară excentrică de raze R_0 , R_1 . Problema plană corespunzătoare poate fi rezolvată prin metoda seriilor, făcând uz de funcția de reprezentare (A.8.3); calculele sînt similare celor din § 19 (vezi și § 5.18, exemplul e). Ea se pretează însă și la utilizarea algoritmului alternant, întrucît soluțiile pentru domenii cu o singură frontieră circulară sînt relativ simple.

Să alegem originea în centrul cercului \mathcal{L}_0 , și să luăm linia centrelor drept axă Ox_1 ; centrul cercului \mathcal{L}_1 va fi notat cu afixul său a_1 .

Pentru problema lui Neumann pentru domeniul \mathcal{D}_0^+ , avem de utilizat formulele (22.8), care, ținînd seama de (22.1), se scriu

$$\begin{aligned} \varphi(\zeta) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{L}_0} \frac{h(t)}{t - \zeta} dt - \frac{1}{2} h_1 R_0^{-1} \zeta - h_0, \\ \psi(\zeta) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{L}_0} \frac{\overline{h(t)}}{t - \zeta} dt - R_0^2 \varphi'(\zeta) \zeta^{-1} + \frac{1}{2} h_1 R_0 \zeta^{-1} + 2h_2 - \bar{h}_0. \end{aligned} \quad (4)$$

Coefficienții h_0 , h_1 , h_2 se deduc din (22.9) — (22.11) ținînd seama de (22.1) — așadar înlocuind derivarea în raport cu ζ prin derivare față de ζ , și înmulțind cu R_0 la o putere egală cu ordinul de derivare.

Pentru problema lui Neumann pentru domeniul \mathcal{D}_1^- , vom face uz de soluția problemei planului cu un orificiu eliptic, luând $c = R_1$ și $h = 0$ în (22.18). Întrucît (22.18) realizează reprezentarea exteriorului unei elipse pe \mathcal{H}^+ , va trebui să schimbăm și sensul de parcurs pe frontieră. Neglijînd constantele neesențiale și revenind la sensul de parcurs direct, căpătăm din (22.24) și (22.26) pentru un cerc \mathcal{L}_1 cu centrul în origine

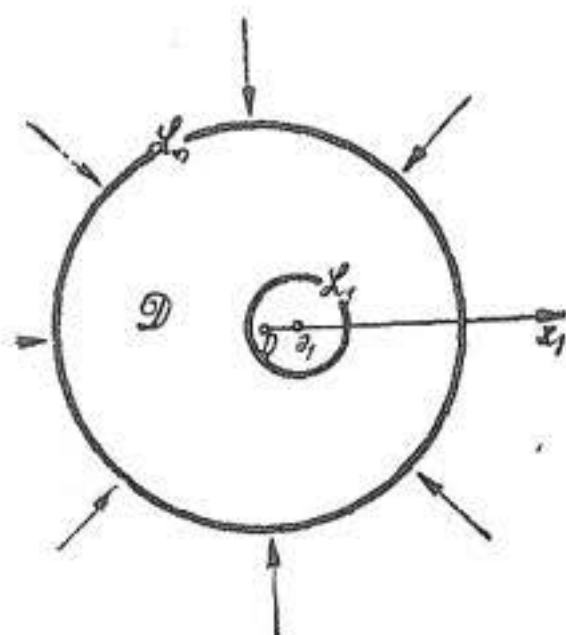


Fig. 6.23.1

$$\begin{aligned}\varphi(\zeta) &= -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{L}_1} \frac{h(t)}{t - \zeta} dt, \\ \psi(\zeta) &= -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{L}_1} \frac{\overline{h(t)}}{t - \zeta} dt - R_1^2 \varphi'(\zeta) \zeta^{-1}.\end{aligned}\quad (5)$$

În rezultatul final, va trebui evident să ținem seama și de formulele (9.15).

Pentru simplitate, vom admite că componenta \mathcal{L}_1 este liberă, iar \mathcal{L}_0 este supusă unei presiuni hidrostatice. Întrucît pentru orice domeniu supus la o astfel de presiune este valabilă soluția (11.21), prima aproximație va fi

$${}_1\varphi(\zeta) = -\frac{1}{2} p\zeta, \quad {}_1\psi(\zeta) = 0. \quad (6)$$

Înlocuind (6) în (2), obținem ${}_1h(t) = -pt$, valoare ce trebuie introdusă mai departe în (5). Întrucît ζ e exterior curbei \mathcal{L}_1 , integrala ce dă ${}_2\varphi(\zeta)$ este nulă (vezi (A.10.1)). Formulele (9.15) arată acum că funcțiile lui Kolosov și Mushelișvili rămîn invariante la o translație. A doua formulă (5) se scrie

$${}_2\psi(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{L}_1} \frac{\overline{p} \overline{t}}{t - \zeta} dt,$$

sau încă, notînd $t - a_1 = \tau$, $\zeta - a_1 = Z$:

$$\frac{1}{p} {}_2\psi(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\tau|=R_1} \frac{\overline{\tau} + a_1}{\tau - Z} d\tau. \quad (7)$$

Întrucît $\overline{\tau} = R_1^2/\tau$, și $|\zeta - a_1| > R_1$, de unde $|Z| > R_1$, avem

$$\frac{1}{p} {}_2\psi(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\tau|=R_1} \frac{R_1^2}{\tau(\tau - Z)} d\tau + a_1 \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\tau|=R_1} \frac{d\tau}{\tau - Z}, \quad |Z| > R_1. \quad (8)$$

Dat fiind că funcția $1/\tau$ este valoarea la limită a unei funcții olomorfe în exteriorul cercului de rază R_1 , și nule la infinit, prima integrală din (8) are (vezi (A.10.2)) valoarea $R_1^2(-Z^{-1})$; cea de a doua este evident nulă.

Prin urmare, termenii de corecție obținuți sînt

$${}_2\varphi(\zeta) = 0, \quad {}_2\psi(\zeta) = -p R_1^2/(\zeta - a_1). \quad (9)$$

Introducând (9) în (3), și ținând seama că pe cercul \mathcal{L}_0 avem $\bar{t} = R_0^2/t$, căpătăm ${}_2h(t) = -pR_1^2t/(R_0^2 - a_1t)$, valoare ce trebuie introdusă în (4). Prima din aceste formule devine

$${}_3\varphi(\zeta) = -pR_1^2 \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{L}_0} \frac{t}{R_0^2 - a_1t} \frac{dt}{t - \zeta} - \frac{1}{2} R_0^{-1} h_1 \zeta. \quad (10)$$

În integrala din (10) intervine valoarea la limită a unei funcții ce nu posedă poli în \mathcal{D}_0^+ : întrucât $a_1 \in \mathcal{D}_0^+$, numitorul integrandului se anulează într-un punct $R_0^2/a_1 > R_0$. Valoarea integralei ei este deci dată de (A.10.1):

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{L}_0} \frac{t}{R_0^2 - a_1t} \frac{dt}{t - \zeta} = \frac{\zeta}{R_0^2 - a_1\zeta}. \quad (11)$$

Din (22.10) și (11), derivând în raport cu ζ și luând apoi $\zeta = 0$, obținem (după înmulțire cu R_0 , și ținând seama și de factorul pR_1^2) valoarea $h_1 = -pR_1^2/R_0$. Cu aceasta, din (10), (11), urmează

$${}_3\varphi(\zeta) = -\frac{1}{2} p (R_1^2/R_0^2) [(R_0^2 + a_1\zeta)\zeta/(R_0^2 - a_1\zeta)]. \quad (12)$$

A doua formulă (4) necesită calcularea integralei

$$-pR_1^2 \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{L}_0} \frac{\bar{t}}{R_0^2 - a_1\bar{t}} \frac{dt}{t - \zeta} = -pR_1^2 \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{L}_0} \frac{dt}{(t - a_1)(t - \zeta)} = 0, \quad (13)$$

unde am ținut seama că $\bar{t} = R_0^2/t$, și de formula (A.10.2) pentru funcția $1/(t - a_1)$, valoare la limită a unei funcții olomorfe în \mathcal{D}_0^- și nule la infinit.

Al doilea și al treilea termen din a doua formulă (4) se obțin cu ajutorul valorilor deja calculate ${}_3\varphi(\zeta)$ și h_1 , astfel că

$${}_3\psi(\zeta) = pR_1^2 a_1 [(2R_0^2 - a_1\zeta)/(R_0^2 - a_1\zeta)^2]. \quad (14)$$

Continuarea calculului nu prezintă dificultăți principiale.

c) *Asupra justificării algoritmului alternant*

Convergența acestui procedeu este în general destul de lentă. De asemenea, dificultățile de calcul cresc simțitor dacă \mathcal{L} are mai mult decât două componente.

Procedeul poate fi utilizat în asociere cu metoda reprezentării conforme; în acest caz, problema reprezentării unui domeniu multiplu conex pe un domeniu canonic este deci înlocuită cu cea (mult mai simplă) a reprezentării conforme a mai multor domenii simplu conexe pe discul unitate. Un astfel de procedeu e folosit de L. Solomon și D. Drăghicescu [1] pentru domeniul mărginit de două pătrate cu centrul comun și laturile paralele. Remarcăm însă că convergența algoritmului este mult înrăutățită dacă funcțiile de reprezentare nu sînt destul de exacte. (O astfel de deficiență, neremarcată la timpul ei, se prezintă în lucrarea menționată, datorită utilizării integralei Schwarz-Christoffel; vezi și § A.8, pag. 755–756).

Pentru studiul teoretic al algoritmului, calea de urmat este, în linii mari, următoarea. Condiția la limită a problemei lui Neumann se scrie

$$\varphi(t) + t\overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)} = h^{(j)}(t) + C_j, \quad t \in \mathcal{L}_j, \quad j = 0, 1, \dots, m. \quad (15)$$

Presupunând termenii multiformi deja separați, vom căuta $\varphi(z)$, $\psi(z)$ sub forma

$$\varphi(z) = \sum_{j=0}^m \varphi_j(z), \quad \psi(z) = \sum_{j=0}^m \psi_j(z), \quad (16)$$

unde fiecare din funcțiile $\varphi_j(z)$, $\psi_j(z)$ este olomorfă în domeniul de indice j (așadar în \mathcal{D}_0^+ pentru $j = 0$, și în \mathcal{D}_j^- pentru $j = 1, 2, \dots, m$).

Să introducem funcțiile

$$\tilde{h}_j(t) = \varphi_j(t) + t\overline{\varphi_j'(t)} + \overline{\psi_j(t)}, \quad t \in \mathcal{L}_j. \quad (17)$$

Dacă funcțiile $\tilde{h}_j(t)$ ar fi cunoscute, relația (17) ar permite să rezolvăm problema lui Neumann pentru domeniile mărginite de câte o singură curbă \mathcal{L}_j , așadar să determinăm φ_j , ψ_j și deci — ținând seama de (16) — să scriem soluția problemei inițiale.

Soluția problemei lui Neumann depinde evident de punct, de domeniul considerat, și de valorile la limită corespunzătoare. Putem deci scrie

$$\varphi_l(z) + z\overline{\varphi_l'(z)} + \overline{\psi_l(z)} = \mathfrak{M}_l[z; \tilde{h}_l(t)], \quad \text{pentru } z \in \mathcal{D}_l^- \text{ sau } z \in \mathcal{D}_0^+, \quad (18)$$

unde \mathfrak{M}_l este un anumit operator ce depinde numai de domeniul mărginit de \mathcal{L}_l , și al cărui aspect se obține dacă rezolvăm problema Neumann corespunzătoare.

Pe orice curbă \mathcal{L}_j avem deci, ca mai sus,

$$\varphi_j(t) + t\overline{\varphi_j'(t)} + \overline{\psi_j(t)} = \tilde{h}_j(t), \quad t \in \mathcal{L}_j. \quad (19)$$

Pe de altă parte, pentru orice indice $l \neq j$, curba \mathcal{L}_j este în interiorul domeniului \mathcal{D}_l^- (sau \mathcal{D}_0^+), astfel că pe această curbă este valabilă relația (18):

$$\varphi_l(t) + t\overline{\varphi_l'(t)} + \overline{\psi_l(t)} = \mathfrak{M}_l[t; \tilde{h}_l(t)], \quad t \in \mathcal{L}_j, \quad l \neq j. \quad (20)$$

Adunând (19) cu toate relațiile (20), și ținând seama de (16), căpătăm

$$\varphi(t) + t\overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)} = \tilde{h}_j(t) + \sum_{l \neq j} \mathfrak{M}_l[t; \tilde{h}_l(t)], \quad t \in \mathcal{L}_j. \quad (21)$$

Dar primul membru din (21) are valoarea (15); aceasta conduce la sistemul

$$\tilde{h}_j(t) + \sum_{l \neq j} \mathfrak{M}_l[t; \tilde{h}_l(t)] = h^{(j)}(t) + C_j, \quad t \in \mathcal{L}_j, \quad j, l = 0, 1, \dots, m. \quad (22)$$

Problema este redusă astfel la determinarea funcțiilor $\tilde{h}_j(t)$ din (22), funcțiile $h^{(j)}(t)$ fiind cunoscute.

Posibilitatea de a rezolva sistemul (22) depinde evident de natura operatorilor \mathfrak{M}_j . Această chestiune a fost studiată de D. Șerman (vezi S. Mihlin [1], § 52). Rezultatul obținut permite să se afirme că sistemul (22) admite alternativa lui Fredholm — și în felul acesta existența soluției decurge direct din teorema de unicitate a lui Kirchhoff.

Dacă componentele \mathcal{L}_j nu sînt prea apropiate, sistemul (22) poate fi rezolvat prin aproximații succesive, ca în studiul ecuației lui Laplace în domenii multiplu conexe (loc. cit., § 50). Aceasta impune o tehnică de recurență și, în ultimă instanță, sîntem conduși tocmai la felul de a raționa din (1)–(3). Pentru domenii dublu conexe, convergența acestui algoritm a fost demonstrată de S. Sobolev [1].

§ 24. PROBLEMA LUI NEUMANN PENTRU DOMENII MULTIPLU CONEXE. ECUAȚIA INTEGRALĂ A LUI ȘERMAN

Din cele arătate în § 18 (pag. 466), urmează că una din dificultățile esențiale în rezolvarea problemei plane stă în necesitatea de a determina funcția $z = \omega(\zeta)$. Această dificultate devine considerabilă în cazul domeniilor multiplu conexe, caz în care se adaugă și imposibilitatea de a face uz în mod direct de metode de calcul eficace, ca cea a seriilor sau (chiar pentru domenii dublu conexe) cea a integralelor de tip Cauchy.

Există rezultate importante, bazate pe utilizarea integralelor de tip Cauchy pentru domenii multiplu conexe; unele dintre ele duc la rezolvarea problemei în chiar planul ζ , fără a face uz de funcția de reprezentare. Problema este amănunțit examinată de N. Mushelişvili [5], §§ 96–104, unde se dau rezultatele esențiale în acest sens, datorate lui S. Mihlin, N. Mushelişvili și D. Șerman.

În cele ce urmează, vom expune ideea unei soluții mai recente date de D. Șerman [7]. Pentru bibliografia rezultatelor obținute pe această cale, vezi D. Șerman [8]. Vezi încă același autor [9].

a) Ecuația lui Șerman

Esențialul metodei constă în a reduce problema la limită la rezolvarea unor ecuații integrale pentru domenii mărginite fiecare de *cîte una* din componentele lui \mathcal{L} . Metoda rămîne valabilă și pentru problema lui Dirichlet.

Pentru simplitate, fie că \mathcal{D} este mărginit de două curbe simple închise $\mathcal{L}_0, \mathcal{L}_1$. Condiția la limită are forma (11.7), unde vom presupune constantele C_j incluse în funcția $h(t)$. Avem prin urmare:

$$\varphi(t) + t\overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)} = h(t), \quad t \in \mathcal{L}. \quad (1)$$

Să definim *numai pe componenta exterioară* \mathcal{L}_0 , funcția complexă

$$\varphi(t) - t\overline{\varphi'(t)} - \overline{\psi(t)} = a(t), \quad t \in \mathcal{L}_0. \quad (2)$$

Funcția $h(t)$ este cunoscută. Dacă $\varphi(t)$ și $\psi(t)$ ar fi cunoscute pe frontieră, $a(t)$ ar rezulta de asemenea cunoscută. Invers, dacă $h(t)$ și $a(t)$ ar fi cunoscute, valorile pe \mathcal{L}_0 ale funcțiilor φ , ψ , ar rezulta cunoscute. Într-adevăr, adunând termen cu termen (1) și (2), obținem :

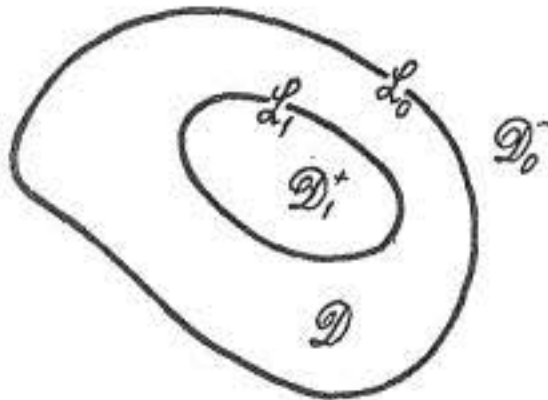


Fig. 6. 24.1

$$\varphi(t) = \frac{1}{2} [h(t) + a(t)], \quad t \in \mathcal{L}_0. \quad (3)$$

Presupunind funcțiile din (3) derivabile în raport cu t , avem și $\varphi'(t) = \frac{1}{2} [h'(t) + a'(t)]$.

Scăzând acum termen cu termen (1) și (2), deducem

$$\psi(t) = -\frac{1}{2} [\overline{a(t)} + t\overline{a'(t)}] + \frac{1}{2} [\overline{h(t)} - t\overline{h'(t)}], \quad t \in \mathcal{L}_0. \quad (4)$$

Înmulțind relația (3) cu $dt/2\pi i (t - z)$ și integrând pe \mathcal{L}_0 , avem

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{L}_0} \frac{\varphi(t)}{t - z} dt = \frac{1}{2} [H(z) + A(z)], \quad (5)$$

unde

$$H(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{L}_+} \frac{h(t)}{t - z} dt, \quad A(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{L}_0} \frac{a(t)}{t - z} dt \quad (6)$$

sînt integrale de tip Cauchy, care definesc funcții olomorfe pe porțiuni în \mathcal{D}_0^+ și \mathcal{D}_0^- . Utilizînd notațiile din (A.11.1) și prima formulă (A.11.9), și ținînd seama de (3), obținem mai întîi

$$\varphi(t) = \frac{1}{2} [H_+(t) + A_+(t)] - \frac{1}{2} [H_-(t) + A_-(t)], \quad t \in \mathcal{L}_0. \quad (7)$$

Să considerăm acum în domeniul \mathcal{D} funcția

$$\varphi(z) = \frac{1}{2} [H_+(z) + A_+(z)]. \quad (8)$$

Prin definiție, această funcție este analitică în \mathcal{D} (dar nu în \mathcal{D}_0^+ !) : în virtutea egalității (7), ea poate fi prelungită prin continuitate în \mathcal{D}_0^- cu funcția analitică $-\frac{1}{2} [H_-(z) + A_-(z)]$. Prin urmare, funcția

$$\alpha(z) = \begin{cases} \varphi(z) - \frac{1}{2} [H_+(z) + A_+(z)], & z \in \mathcal{D}, \\ -\frac{1}{2} [H_-(z) + A_-(z)], & z \in \mathcal{D}_0^-, \end{cases} \quad (9)$$

este definită peste tot în \mathcal{D}_1^- , și evident analitică ; întrucît în \mathcal{D}_0^- ea este suma a două integrale de tip Cauchy, rezultă că ea este nulă la infinit.

Acesta este primul pas al raționamentului, care duce la considerarea unei funcții $\alpha(z)$ analitice în domeniul avînd ca frontieră numai componenta \mathcal{L}_1 .

Un raționament analog poate fi realizat pornind de la relația (4). Fără nici un calcul, se vede că (4) se obține din (3), dacă înlocuim

$$\begin{aligned} a(t) & \text{ prin } -[\overline{a(t)} + \bar{t} a'(t)], \\ h(t) & \text{ prin } [\overline{h(t)} - \bar{t} h'(t)]. \end{aligned} \quad (10)$$

În loc de (6), vor apare acum funcțiile

$$G(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{L}_1} \frac{\overline{h(t)} - \bar{t} h'(t)}{t - z} dt, \quad B(z) = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{L}_1} \frac{\overline{a(t)} + \bar{t} a'(t)}{t - z} dt, \quad (11)$$

care permit — analog cu (9) — să definim o funcție

$$\beta(z) = \begin{cases} \psi(z) - \frac{1}{2} [G_+(z) + B_+(z)], & z \in \mathcal{D}, \\ -\frac{1}{2} [G_-(z) + B_-(z)], & z \in \mathcal{D}_0^-, \end{cases} \quad (12)$$

analitică în \mathcal{D}_1^- , și nulă la infinit.

Cu aceasta, putem trece la utilizarea datelor de care dispunem pe \mathcal{L}_1 . Întrucît din (9), (12) urmează că în \mathcal{D} avem

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= \alpha(z) + \frac{1}{2} [H_+(z) + A_+(z)], \\ \psi(z) &= \beta(z) + \frac{1}{2} [G_+(z) + B_+(z)], \\ \varphi'(z) &= \alpha'(z) + \frac{1}{2} [H'_+(z) + A'_+(z)], \end{aligned} \quad (13)$$

condiția (1) scrisă într-un punct oarecare t_1 de pe \mathcal{L}_1 devine

$$\begin{aligned} & \alpha(t_1) + t_1 \overline{\alpha'(t_1)} + \overline{\beta(t_1)} = \\ & = h^{(1)}(t_1) - \frac{1}{2} [H_+(t_1) + t_1 \overline{H'_+(t_1)} + \overline{G_+(t_1)}] - \\ & - \frac{1}{2} [A_+(t_1) + t_1 \overline{A'_+(t_1)} + \overline{B_+(t_1)}], \quad t_1 \in \mathcal{L}_1, \end{aligned} \quad (14)$$

astfel că problema determinării funcțiilor $\alpha(z)$, $\beta(z)$ este echivalentă cu o problemă Neumann pentru domeniul infinit \mathcal{D}_1^- . Dificultatea stă acum în faptul că în membrul al doilea din (14) apar și funcțiile necunoscute A_+ și B_+ , care depind la rândul lor (sub o formă integrală) de funcția necunoscută $a(t)$ de pe \mathcal{L}_0 .

Să explicităm ultima paranteză din (14). Avem pe rînd

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{4\pi i} \oint_{\mathcal{L}_0} \frac{a(t)}{t-t_1} dt - t_1 \overline{\frac{1}{4\pi i} \oint_{\mathcal{L}_0} \frac{a(t)}{(t-t_1)^2} dt} + \\ & + \overline{\frac{1}{4\pi i} \oint_{\mathcal{L}_0} \frac{a(t) + ta'(t)}{t-t_1} dt} = -\frac{1}{4\pi i} \oint_{\mathcal{L}_0} a(t) \left[\frac{dt}{t-t_1} + \frac{d\bar{t}}{\bar{t}-\bar{t}_1} \right] + \\ & + \frac{1}{4\pi i} \oint_{\mathcal{L}_0} \overline{a(t)} \frac{t_1 d\bar{t}}{(\bar{t}-\bar{t}_1)^2} - \frac{1}{4\pi i} \oint_{\mathcal{L}_0} \overline{a'(t)} \frac{t d\bar{t}}{\bar{t}-\bar{t}_1}. \end{aligned}$$

Integrînd prin părți în ultima integrală de mai sus, presupunînd că $a(t)$ este uniformă (ceea ce este întotdeauna admisibil — vezi (11.7)–(11.11)), și grupînd cu penultima integrală, deducem, după calcule elementare :

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} [A_+(t_1) + t_1 \overline{A'_+(t_1)} + \overline{B_+(t_1)}] = \\ & = -\frac{1}{4\pi i} \oint_{\mathcal{L}_0} a(t) \left[\frac{dt}{t-t_1} + \frac{d\bar{t}}{\bar{t}-\bar{t}_1} \right] + \frac{1}{4\pi i} \oint_{\mathcal{L}_0} \overline{a(t)} d \frac{t-t_1}{\bar{t}-\bar{t}_1}, \end{aligned} \quad (15)$$

Dacă funcția $a(t_0)$, $t_0 \in \mathcal{L}_0$, ar fi cunoscută, atunci $\alpha(z)$, $\beta(z)$ s-ar obține rezolvînd problema (14); soluția acesteia are deci forma

$$\alpha(z) = \alpha[a(t_0), z], \quad \beta(z) = \beta[a(t_0), z], \quad t_0 \in \mathcal{L}_0. \quad (16)$$

În acest caz, funcțiile lui Kolosov și Mushelișvili se scriu cu ajutorul formulelor (13), în care introducem (16), iar însăși funcția $a(t)$ din (2) se obține sub forma

$$a(t) = \alpha(t) + \frac{1}{2} [H_+(t) + A_+(t)] - t \left[\overline{\alpha'(t)} + \frac{1}{2} \overline{H'_+(t)} + \frac{1}{2} \overline{A'_+(t)} \right] - \\ - \left[\overline{\beta(t)} + \frac{1}{2} \overline{G_+(t)} + \frac{1}{2} \overline{B_+(t)} \right],$$

sau încă, explicitînd și înlocuind t prin t_0 pentru a lăsa lui t rolul de variabilă curentă de integrare :

$$a(t_0) = \alpha[a(t_0), t_0] - t_0 \overline{\alpha'_t[a(t_0), t_0]} - \overline{\beta[a(t_0), t_0]} + \\ + \frac{1}{4\pi i} \oint_{\mathcal{L}_0} \frac{h(t)}{t - t_0} dt + t_0 \frac{1}{4\pi i} \oint_{\mathcal{L}_0} \frac{\overline{h(t)}}{(\bar{t} - \bar{t}_0)^2} d\bar{t} + \\ + \frac{1}{4\pi i} \oint_{\mathcal{L}_0} \frac{h(t) - t \overline{h'(t)}}{\bar{t} - \bar{t}_0} d\bar{t} + \frac{1}{4\pi i} \oint_{\mathcal{L}_0} \frac{a(t)}{t - t_0} dt + \\ + t_0 \frac{1}{4\pi i} \oint_{\mathcal{L}_0} \frac{\overline{a(t)}}{(\bar{t} - \bar{t}_0)^2} d\bar{t} - \frac{1}{4\pi i} \oint_{\mathcal{L}_0} \frac{a(t) + t \overline{a'(t)}}{t - t_0} dt. \quad (17)$$

Cele trei integrale ce depind de $h(t)$ sînt funcții cunoscute. Să grupăm cele două integrale în care apare $a(t)$; să integrăm prin părți în integrala ce conține $\overline{a'(t)}$, ținînd seama că $a(t)$ este uniformă, și să adunăm cu cealaltă integrală în care apare $\overline{a(t)}$; să revenim în integralele ce depind de $h(t)$ la notațiile din (6) și (11); după calcule elementare, (17) devine

$$a(t_0) = \alpha[a(t_0), t_0] - t_0 \overline{\alpha'_t[a(t_0), t_0]} - \overline{\beta[a(t_0), t_0]} + \\ + \frac{1}{2} [H_+(t_0) - t_0 \overline{H'_+(t_0)} - \overline{G_+(t_0)}] + \\ + \frac{1}{4\pi i} \oint_{\mathcal{L}_0} a(t_0) d \ln \frac{t - t_0}{\bar{t} - \bar{t}_0} + \frac{1}{4\pi i} \oint_{\mathcal{L}_0} \overline{a(t)} d \frac{t - t_0}{\bar{t} - \bar{t}_0}, \quad (18)$$

așadar o ecuație integrală pentru funcția $a(t)$, unde $t, t_0 \in \mathcal{L}_0$.

b) Asupra metodei de calcul efectiv

Conducerea efectivă a calculelor prezintă dificultăți importante. Vom schița aci numai linia mare a tipului de raționament folosit de Serman și colaboratorii săi, în lucrările în care această metodă este folosită pentru rezolvarea de probleme concrete.

Fie de pildă cunoscută funcția

$$z = \omega_0(\zeta) \quad (19)$$

care reprezintă conform domeniul \mathcal{D}_0^- pe exteriorul \mathcal{D}^- al cercului unitate γ din planul ζ . Dacă curba \mathcal{L}_0 este de clasă cel puțin C^2 , atunci relația (19) rămâne valabilă pe frontieră:

$$t = \omega_0(\sigma), \quad \sigma \in \gamma, \quad (20)$$

iar dt se obține de aci prin diferențiere (vezi § A.6, pag. 730).

Prin urmare, orice funcție $c(t)$ dată pe \mathcal{L}_0 poate fi scrisă

$$c(t) \equiv c^*(\sigma) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^* \sigma^k, \quad (21)$$

unde coeficienții c_k^* sînt cunoscuți prin intermediul lui $c(t)$ și $\omega_0(\sigma)$.

Acest raționament rămîne valabil pentru funcțiile $h(t)$ și $a(t)$ de mai sus. În particular, $a(t)$ devine astfel

$$a(t) \equiv a^*(\sigma) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^* \sigma^k, \quad (22)$$

unde a_k^* urmează a fi determinați, în timp ce h_k^* sînt cunoscuți odată cu $h(t)$.

Integralele de tip Cauchy din (6) și (11) devin integrale luate pe γ , așadar expresii ce depind în ultimă instanță de h_k^* și a_k^* .

Dar pentru $z \in \mathcal{D}_0^+$, putem scrie întotdeauna

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{L}_0} \frac{\sigma^k}{t - z} dt = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{L}_0} \frac{[\omega_0^{-1}(t)]^k}{t - z} dt = \psi_k(z), \quad (23)$$

așadar o funcție în principiu cunoscută în \mathcal{D}_0^+ . Acest raționament permite să calculăm integralele din (6), (11) și în interiorul curbei \mathcal{L}_0 , obținînd astfel expresii ce depind de coeficienții cunoscuți h_k^* , de coeficienții necunoscuți a_k^* , și de funcțiile cunoscute ψ_k .

Prin urmare, soluția problemei la limită (14) poate fi acum scrisă prin intermediul coeficienților a_k^* ; în particular, aceasta este întotdeauna realizabil dacă cunoaștem funcția

$$z = \omega_1(\zeta) \quad (24)$$

care reprezintă conform domeniul \mathcal{D}_1^- pe exteriorul \mathcal{D}^- al cercului unitate γ . Dependența din (16) este astfel explicitată, și problema este redusă la rezolvarea efectivă a ecuației (18) — ceea ce conduce în general la un sistem infinit de ecuații algebrice liniare pentru coeficienții a_k^* .

Obținerea efectivă a soluției depinde la rândul său de posibilitatea de a rezolva acest lanț de probleme. Exemplele studiate pînă azi par să arate că metoda e rapid convergentă, și în particular utilă în studiul concentrărilor de tensiuni pentru componente ale frontierei apropiate în anumite porțiuni ale lor.

În unele din lucrările citate în articolul mai sus amintit (și de altfel chiar în articolul inițial al lui Șerman), metoda este aplicată cu succes și la studiul problemelor încovoierii și torsiunii — unde soluția depinde de o singură funcție analitică de determinat.

Metoda a fost generalizată la cazul tridimensional de către P. Perlin [1].

§ 25. ALTE METODE ȘI PROBLEME

Lipsa de spațiu ne obligă să dăm numai scurte indicații asupra altor teme — uneori mai puțin elementare — referitoare la problema plană.

a) **Domenii semiinfinite.** Prezintă deosebit interes considerarea unor domenii mărginite de curbe *deschise*, cu capetele aruncate la infinit (domeniu de tipul semi-planului), cu sau fără orificii. Punctul de plecare în studiul lor îl constituie problema semi-planului elastic, cu utilizarea reprezentării conforme. Tehnica integralilor de tip Cauchy este ușor aplicabilă aci, formulele din cazul reprezentării conforme pe discul circular găsindu-și imediat analogul. Pentru detalii, vezi N. Mushelișvili [5], §§ 90—95; vezi și A. Green și W. Zerna [1], §§ 8.6—8.11, M. Haimovici [1], §§ 16.2—16.5; L. Milne-Thomson [2], capitolul 4.

b) **Ecuațiile integrale ale problemelor lui Dirichlet și Neumann.** După cum am spus în § 20, pag. 481, studiul ecuației lui Mushelișvili poate fi redus la cel al unor ecuații de tip Fredholm, cu nucleu nesimetric. Aceste ecuații sînt însă utilizabile numai pentru domenii reprezentabile conform pe un disc, și ele nu pot fi scrise efectiv decît dacă funcția de reprezentare este cunoscută.

S. Mihlin [1], §§ 42, 43, a obținut ecuații integrale utilizabile și pentru domenii multiplu conexe — legate totuși de necesitatea cunoașterii funcției lui Green a domeniului considerat.

Ulterior, N. Mushelișvili [5], § 98 a stabilit ecuații integrale de tip Fredholm valabile pentru domenii multiplu conexe, în care intervin direct datele la limită pe frontiera domeniului inițial, și care nu pretind cunoașterea funcției de reprezentare pe vreun domeniu canonic. E. Măgnaradze (vezi lucrările sale în bibliografia la N. Mushelișvili [5]) a demonstrat că aceste ecuații rămîn utilizabile și pentru frontiere cu puncte unghiulare (care nu sînt puncte de întoarcere); în acest caz, integralele trebuie înțelese în sensul Radon-Stieltjes.

În fine, D. Șerman [1] — [4] (vezi S. Mihlin [1], § 56; N. Mushelișvili [5], § 101) a stabilit ecuații de o formă apropiată de cea a ecuațiilor lui Mushelișvili, dar impunînd condiții mai slabe funcțiilor necunoscute. Aceste ecuații corespund variantei plane a ecuațiilor lui G. Lauricella [3] — [5] — dar sînt obținute pe o cale mult mai directă, și își păstrează valabilitatea și pentru domenii multiplu conexe.

c) **Problema conjugării liniare.** În § 17 am văzut că problemele fundamentale pentru domenii cu frontiere circulare pot fi abordate cu ajutorul unui proces de prelungire analitică a funcției $\Phi(z)$ prin porțiunile libere ale frontierei. Acesta constituie un caz particular al problemei conjugării liniare (sau încă: problema Riemann-Hilbert) care constă în construirea unei funcții olomorfe pe porțiuni, definite în planul cu o tăietură în lungul unei linii \mathcal{L} , — dacă este

cunoscută o relație *liniară* între valorile la limită ale funcției de o parte și de alta a acestei linii. Problema este amănunțit studiată dintr-un punct de vedere general-teoretic de către F. Gahov [1] și N. Mushelişvili [3] (vezi în special cap. 2); pentru aplicațiile nemijlocite la teoria elasticității vezi A. Green și W. Zerna [1], capitolul 8; L. Milne-Thomson [2], capitolele 3—6; N. Mushelişvili [5], capitolul 6.

Spre deosebire de metoda seriilor și de metoda integralelor de tip Cauchy — care permit rezolvarea efectivă sau cel puțin studiul teoretic al problemelor lui Dirichlet și Neumann — *studiul problemei conjugării liniare rămâne metoda de elecție a problemei mixte*¹¹⁾. Pentru indicații critice și bibliografice, vezi și J. Goodier [4], § 5. Printre lucrările inspirate de această metodă, vezi V. Buchwald [1], [2]; G. Mandjavidze [1]; C. Stănescu [2] etc.

Dintre problemele majore ale elasticității plane, cea a *contactului* corpurilor elastice și cea a *fisurilor* sînt abordabile tocmai pe această cale.

În legătură cu problema de contact, vezi L. Galin [4] (inclusiv pentru corpuri anizotrope; pentru acest ultim caz, vezi și numeroasele lucrări ale lui J. Brilla, de exemplu [2]; G. Mandjavidze [2]); A. Green și W. Zerna [1], §§ 8.11—8.14; L. Milne-Thomson [2], capitolul 4; N. Mushelişvili [5], capitolul 6, partea a doua.

În ce privește studiul problemei fisurilor (este vorba de fisuri în corpuri casante — așadar fără trecere în stadiul plastic), punctul de pornire a fost constituit de o ipoteză a lui S. Hristianovici: condiția ca tensiunile la capetele fisurii să rămîină finite — analogă cu condiția cunoscută din aerodinamică asupra finitudinii vitezelor la bordul de fugă al unui profil angulos. Rezultate majore în acest sens aparțin lui G. Barenblatt [1]—[3] (cu indicații asupra lucrărilor lui G. Cerepanov, P. Jeltov, R. Salganik etc.). Vezi încă I. Babič și A. Kamiński [1]; A. England și A. Green [1]; V. Entov și R. Salganik [1]; L. Kacianov [2]; V. Panasiuk [1] — [3]. Pentru teoria clasică, vezi A. Green și W. Zerna [1], §§ 8.15—8.17.

d) Metode operaționale. Un cu totul alt punct de vedere constă din utilizarea metodelor operaționale, bazate pe transformatele Fourier, Laplace, Mellin etc. Acestea se dovedesc extrem de eficace în problema contactului, a fisurilor etc., și prezintă avantajul de a putea fi extinse la cazul tridimensional. Un bogat material în această direcție e dat de I. Sneddon [1], cap. 9 (vezi și cap. 10, pentru problemele cu simetrie axială, înrudite cu cele plane). Vezi încă L. Sneddon [2] (pentru aparatul matematic) și [3] (pentru unele puncte de vedere mai recente). În liniile sale mari, metoda e prezentată de I. Sneddon și D. Berry [1], capitolul C, partea a V-a. Numeroase rezultate noi aparțin lui I. Ufliand [2], capitolele 1 și 3—6 (bandă, lamelă, pană, încovoierea plăcilor), și [3].

S. Belonosov [2] a propus o metodă care asociază punctul de vedere al teoriei integralelor de tip Cauchy cu cel operațional, reducînd problema (pentru domenii simplu și dublu conexe) la studiul unor ecuații integrale de tip Fredholm cu nuclee simetrice, și care pot fi utilizate și în prezența de puncte unghiulare pe frontieră. Metoda îngăduie atât demonstrarea de teoreme de existență, cît și obținerea de algoritme de calcul efectiv.

e) Observație finală. Toate aceste metode sînt departe de a fi limitate la studiul problemelor plane și antiplane ale elastostaticii liniare a corpurilor omogene și izotrope. Ele sînt deja larg utilizate în studiul problemelor tridimensionale (vezi mai jos indicațiile din § 7.1, pag. 510—511); în studiul corpurilor anizotrope (S. Lehnitki [1], [2]); în teoria neliniară a elasticității (vezi de ex. A. Green și J. Adkins [1]; vezi încă D. Carlson și R. Shield [1], etc.); în teoria plasticității (vezi lucrările lui D. Cerepanov [1] — [3]; ș.a.m.d.). Pentru alte domenii, unde cercetarea este într-un stadiu mai puțin evoluat, a se revedea indicațiile din § 7, pag. 391.

¹¹⁾ Pentru metodele numerice de studiu ale problemei mixte, vezi M. Dlugaci [1].

CAPITOLUL 7

PROBLEMA TRIDIMENSIONALĂ. STUDIUL ECUAȚIILOR LUI LAMÉ

§ 1. GENERALITĂȚI

În §§ 4.8, 4.10 și 4.12, au fost puse în evidență două fapte esențiale: caracterul eliptic al ecuațiilor lui Lamé *statice* și caracterul bi-armonic al componentelor stării elastice. Aceste rezultate deschid două căi posibile de studiu al ecuațiilor lui Lamé:

a) studiul lor ca ecuații de tip eliptic — așadar posibilitatea de a construi o teorie a elasticității după modelul teoriei ecuației lui Poisson sau Laplace;

b) studiul soluțiilor lor ca funcții reprezentabile, datorită teoremei lui Almansi, prin potențiali armonici.

Analiza problemelor plană și antiplană se subsumează, în principiu, celui de al doilea dintre aceste puncte de vedere. Dimpotrivă, studiul problemei tridimensionale nu mai beneficiază direct de posibilitățile teoriei funcțiilor complexe, și obligă la abordarea directă a ecuațiilor lui Lamé, care se dovedesc în acest caz mai utile decât ecuațiile în tensiuni.

Avertizăm că aceste raționamente sînt valabile *numai pentru corpuri izotrope și omogene*, în teorie liniară. Totuși, primul din punctele de vedere de mai sus (și într-un anumit sens și cel de al doilea), e susceptibil de importante generalizări.

Amintim aci forma generală (4.8.7) a ecuațiilor lui Lamé

$$\Delta u + (1 - 2\nu)^{-1} \text{grad div } u + \mu^{-1} F = 0, \quad (1)$$

și condițiile la limită (4.2.1) și (4.2.2):

$$u|_{\mathcal{S}} = g, \quad (2)$$

$$\sigma_n(u)|_{\mathcal{S}} = f. \quad (3)$$

Întrucît intenționăm să abordăm sistemul (1), este necesar ca și condiția (3) să fie explicitată prin intermediul lui u . În acest scop, vom face uz de legea lui Hooke (3.3.18), unde vom da în factor 2μ , și vom ține seama că din (3.4.16) urmează $\lambda/2\mu = \nu/(1 - 2\nu)$; aceasta duce la

$$\sigma_{ij} = 2\mu [\varepsilon_{ij} + \nu(1 - 2\nu)^{-1} \theta \delta_{ij}]. \quad (4)$$

Introducînd (4) în relațiile lui Cauchy (2.3.3), căpătăm

$$\sigma_{ij} = 2\mu [\varepsilon_{ij} n_j + \nu(1 - 2\nu)^{-1} n_i \text{div } u]. \quad (5)$$

În al doilea termen din (5) apar evident componentele vectorului

$$2\mu\nu(1 - 2\nu)^{-1} \mathbf{n} \operatorname{div} \mathbf{u}, \quad (6)$$

dirijat după normală. În ce privește primul termen din membrul al doilea, din ecuațiile geometrice (4.11) avem pe rînd

$$\varepsilon_{ij} n_j = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) n_j = \frac{1}{2} (u_{j,i} - u_{i,j}) n_j + u_{i,j} n_j, \quad (7)$$

unde ultimul termen este derivata normală a funcției u_i ; prin urmare, din (5) se separă și componentele vectorului

$$2\mu u_{,n}. \quad (8)$$

În fine, primul termen din expresia finală din (7) este alcătuit din componentele vectorilor \mathbf{n} și $\operatorname{rot} \mathbf{u}$; după calcule elementare, deducem că în (7) apar componentele lui $\frac{1}{2} \mathbf{n} \times \operatorname{rot} \mathbf{u}$. Ținînd seama și de (6) și (8), obținem în definitiv

$$\sigma_n(\mathbf{u}) = 2\mu \left[\nu(1 - 2\nu)^{-1} \mathbf{n} \operatorname{div} \mathbf{u} + \frac{1}{2} \mathbf{n} \times \operatorname{rot} \mathbf{u} + u_{,n} \right]. \quad (9)$$

Pentru studiul problemei lui Dirichlet vom păstra deci condiția la limită (2), în timp ce în problema lui Neumann trebuie să introducem (9) în condiția (3).

Capitolele ce urmează sînt consacrate studiului problemei tridimensionale. Aci nu mai dispunem de un analog eficace al reprezentării conforme, astfel că rezultatele obținute pentru domenii canonice (bulă, semi-spațiu) nu sînt nici înrudite între ele, și nici nu pot fi „transcrise” pentru domenii mai generale. Aceasta obligă la studiul separat al diferitelor tipuri de corpuri, și justifică situația actuală, cînd masei de soluții relativ unitare de care dispunem în cazul antiplan și plan, i se opun în cazul tridimensional puțin numeroase probleme, rezolvate cu metode relativ disparate. Tocmai așa se explică faptul că, chiar în tratate de prima mîină, spațiul acordat problemei tridimensionale este în general destul de redus.

Menționăm încă unele încercări de extindere a *metodelor teoriei funcțiilor complexe* (și hipercomplexe) în studiul problemelor tridimensionale: lucrările lui A. Alexandrov și ale colaboratorilor săi I. Soloviev și V. Volpert (vezi de ex. A. Alexandrov [1]); I. Arjanhi și B. Bondarenko [1]; S. Bergman [1]; M. Mișicu [2]; V. Mossakovski [8]; M. Nedelcu [1]; E. Obolashvili [1]; Tang Li Min și Sun Hwan Chun [1].

O metodă ce-și păstrează validitatea în principiu intactă în problemele uni-, bi- sau tridimensionale, este *metoda operațională*, bazată pe utilizarea a diferite transformări integrale

(Fourier, Laplace, Mellin, Hankel etc.). Aparatul matematic corespunzător este expus în detaliu de I. Sneddon [2], și pe larg folosit de același autor în [1]. Vezi de asemenea I. Sneddon și D. Berry [1], §§ 64—66; I. Ufliand [2] (cu numeroase aplicații) și [3]; I. Sneddon [3].

Capitolul de față este consacrat studiului ecuațiilor lui Lamé din punctul de vedere al legăturii lor cu ecuația lui Laplace, și al unor metode generale de integrare. În capitolul 8 va fi prezentată problema bulei, iar în capitolul 9, cea a semi-spațiului. În fine, în capitolul 10 va fi studiată una dintre problemele cu vaste implicații: contactul corpurilor elastice.

Toate acestea poartă numele de „probleme clasice” ale teoriei elasticității. Forma geometrică a corpurilor considerate nu mai îngăduie nici o simplificare de tipul celor admise de rezistența materialelor, și aceste probleme — ca și cea plană — nu pot fi cercetate decât cu ajutorul metodelor exacte ale teoriei elasticității. Toate aceste probleme vor fi examinate aci în varianta lor tridimensională — deși există și variante plane ale lor (de exemplu problema semi-planului, sau cea a contactului plan). Indicații asupra problemelor clasice sînt date de A. Love [1], capitolele 7, 8, 10, 11; E. Trefftz [3], capitolul 10.

Printre problemele clasice de care nu ne vom ocupa aci, notăm încă problema corpurilor axial-simetrice, problema paralelipipedului elastic, și altele.

Pentru problemele cu simetrie axială, vezi articolul de analiză al lui B. Abramian și A. Alexandrov [1]; apoi A. Alexandrov [1] (cu generalizare la cazul absenței simetriei); N. Arutiunian și B. Abramian [1] (cu aplicații speciale la problema torsiunii); M. Belenkiĭ [1] (ca și la A. Alexandrov, în strînsă conexiune cu problema plană); S. Belonosov [1]; V. Cemeris [1] (funcții p -analitice); A. Lurie [4], capitolele 6 și 7 (bulă, și cilindru circular solicitat pe suprafața sa laterală); G. Polojii [1], [4] (probleme de torsiune și încovoiere, și aplicații ale teoriei funcțiilor p -analitice); H. Poritsky [2] (torsiune); I. Sneddon [1], capitolul 10; K. Solianik-Krasa [1] — [3]; I. Ufliand [2] (transformări integrale); G. Valov [1], [2]; V. V. Vlasov [1]. Pentru chestiuni mai simple de tip axial-simetric, vezi S. Timoshenko și J. Goodier [1], capitolul 13.

Problema paralelipipedului a fost propusă de G. Lamé [1]; ea a fost reluată de B. Bondarenko [1], [2]; M. Filonenko-Borodici [2] (metode aproximative); K. Hata [1] (metode operaționale); P. P. Teodorescu [1] (care demonstrează că sistemele de ecuații liniare obținute pornind de la soluția lui Lamé sînt complet regulate) și [5] (diferite domenii de tipul paralelipipedului cu fețe aruncate la infinit).

Studiul teoretic al ecuațiilor lui Lamé poate fi pus în strînsă conexiune cu cel al ecuației lui Laplace. În acest sens amintim mai întîi lucrările lui E. Betti [1], O. Tedone [1], care studiază ecuațiile lui Lamé puse sub forma

$$\Delta \left[u + \frac{1}{2} (1 - 2\nu)^{-1} x \operatorname{div} u \right] = 0.$$

În felul acesta, problema este redusă la integrarea celor trei ecuații Laplace de mai sus, plus ecuația care arată că $\operatorname{div} u$ este de asemenea armonică. Aceasta permite utilizarea directă

a rezultatelor teoriei potențialului. Totuși, metoda conduce nu în mod nemijlocit la cunoașterea componentelor deplasării, ci la cea a mărimilor $\text{div } \mathbf{u}$ și $\text{rot } \mathbf{u}$. Altit Betti el și Tedone studiază problema semi-spațiului, a domeniului mărginit de două plane paralele, a bulei, a domeniului mărginit de două sfere concentrice. O expunere rezumată a acestor rezultate, inclusiv indicații bibliografice, este dată de A. Love [1], cap. 10. Vezi de asemenea M. Haimovici [1], cap. 12 și § 13.3; I. Sneddon și D. S. Berry [1], §§ 61–63.

Lucrări recente aflate sub o formă sau alta în conexiune cu studiul ecuației lui Laplace aparțin lui J. Bramble [1]; J. Bramble și L. Payne [6]; J. Diaz și L. Payne [1]; G. Grioli [1], [3].

Printre problemele generale de mare importanță notăm aci chestiunea evaluării *marginilor* pentru deplasări, tensiuni, energia de deformare, în funcție de datele problemei, — și pe cea a *concentrării tensiunilor*.

În ce privește chestiunea marginilor, vezi G. Adler [1], J. Diaz și H. Greenberg [1], G. Fichera [4] (marginii în problema lui Dirichlet); G. Grioli [3], capitolul 6 (marginii pentru tensiuni); J. Bramble și L. Payne [4], M. Slobodianskii [3], [4] (marginii pentru tensiuni și pentru energia de deformare); K. Washizu [1]; vezi de asemenea G. Colombo [1], G. Grioli [2] (marginii pentru tensiuni în problema anti-plană); C. Maple [1], L. Payne și H. Weinberger [1], [2] (marginii pentru soluțiile unor ecuații de tip eliptic). Aceste rezultate se obțin făcându-se uz de reprezentări prin intermediul matricei lui Green (vezi mai jos § 12), sau încă prin metodele lui W. Prager și L. Syge, citate în § 4.4, pag. 136.

Cu referire la studiul concentrării tensiunilor, a se revedea indicațiile din § 4.2, pag. 127; exemplele tratate în capitolele 5 și 6; lucrările citate în § 6.22, pag. 496. Indicăm încă punctul de vedere a lui I. Babuška și J. Kautski [1], și studiul concentrărilor de tensiuni în vecinătatea unei frontiere cu rugozități, realizat prin mijloace probabilistice de către V. Palmov [1] — [3]. Menționăm aci și o concluzie generală la care se ajunge în studiul concentrărilor de tensiuni: caracterul lor mai puțin important și mai localizat în cazul tridimensional, în comparație cu variantele plane respective (vezi exemplul de la finele § 8.6, pag. 584). Acest fapt se explică într-un mod asemănător cu cele spuse referitor la principiul lui Saint-Venant în cazul plan (vezi § 6.11, pag. 421); vezi și mai departe § 10.

Pentru studiul problemei tridimensionale, vezi încă indicațiile date de I. Sneddon și D. Berry [1] (cap. D), E. Sternberg [4], G. Shapiro [2]. Pentru problemele *dinamice*, a se revedea finele § 4.12, pag. 163–164.

§ 2. DESPRE STUDIUL ECUAȚIEI LUI POISSON

Vom aminti aci unele fapte privind studiul celei mai simple ecuații de tip eliptic — ecuația lui Poisson. Acestea vor fi utile în studiul ecuațiilor lui Lamé, pe ambele linii menționate la începutul § 1. Pentru detalii, vezi de pildă R. Courant [1], capitolul 4; E. Goursat [2], capitolele 27 și 28; C. Iacob [5], capitolul 3; V. Smirnov [2], volumul 2, § 7.4; A. Tihonov și A. Samarskii [1], §§ 4.2–4.5.

Vom nota¹⁾ coordonatele carteziene cu x, y, z sau x_1, x_2, x_3 , iar versorii axelor, cu i, j, k sau i_1, i_2, i_3 . Amintim expresiile operatorilor :

$$\text{grad } f = \nabla f = i_j f_{,j}, \quad (1)$$

$$\text{div } V = \nabla \cdot V = V_{i,i}, \quad (2)$$

$$\Delta f = \nabla \cdot \nabla f = f_{,ii}. \quad (3)$$

Dat fiind că avem pe rînd $(n \cdot \text{grad}) f = (n_j i_j) \cdot (i_i f_{,i}) = n_j f_{,j}$, operatorul de derivare normală se poate scrie și sub forma

$$f_{,n} = (n \cdot \text{grad}) f = (n \cdot \nabla) f. \quad (4)$$

Trecînd la coordonatele sferice definite de relațiile

$$x_1 = R \sin \theta \cos \varphi, \quad x_2 = R \sin \theta \sin \varphi, \quad x_3 = R \cos \theta, \quad (5)$$

sau încă de relațiile inverse lor

$$R = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}, \quad \theta = \arctg [\sqrt{x_1^2 + x_2^2}/x_3], \quad \varphi = \arctg (x_2/x_1), \quad (6)$$

obținem după calcule elementare expresiile :

$$\begin{aligned} f_{,1} &= \sin \theta \cos \varphi f_{,R} + R^{-1} \cos \theta \cos \varphi f_{,\theta} - R^{-1} (\sin \varphi / \sin \theta) f_{,\varphi}, \\ f_{,2} &= \sin \theta \sin \varphi f_{,R} + R^{-1} \cos \theta \sin \varphi f_{,\theta} + R^{-1} (\cos \varphi / \sin \theta) f_{,\varphi}, \\ f_{,3} &= \cos \theta f_{,R} - R^{-1} \sin \theta f_{,\theta}, \end{aligned} \quad (7)$$

ceea ce permite să transcriem (1)–(4) în coordonate sferice. În particular avem

$$\Delta f = R^{-2} [(R^2 f_{,R})_{,R} + (\sin \theta)^{-1} (\sin \theta f_{,\theta})_{,\theta} + (\sin \theta)^{-2} f_{,\varphi\varphi}]. \quad (8)$$

Pentru transcrierea operatorilor diferențiali analogi celor de mai sus în diferite sisteme de coordonate curbilinii, inclusiv pentru utilizarea lor în teoria elasticității, există o vastă literatură. (Vezi indicațiile din § 4.1, pag. 121).

a) Formule integrale

Formula lui Gauss-Ostrogradskii : date fiind trei funcții $U_j \in C^1(\mathcal{V})$ într-un domeniu mărginit \mathcal{V} , a cărui frontieră \mathcal{S} este alcătuită dintr-un număr finit de suprafețe ce posedă o arie (vezi § 1.1, pag. 34), avem relația

$$\iiint_{\mathcal{V}} U_{i,i} dV = \iint_{\mathcal{S}} U_i n_i dS, \quad (9)$$

unde $n_j = \cos(n, x_j)$, iar n este normala exterioară la \mathcal{S} .

¹⁾ Orice exagerație puristă duce la complicații, și ar fi greu să scriem majoritatea relațiilor din capitolele 9 și 10 în coordonate x_1, x_2, x_3 , (vezi de ex. mai departe pag. 557; cap. 10 pag. 669; etc.).

Formula rămâne valabilă dacă funcțiile U_j posedă derivate parțiale mărginite și integrabile în \mathcal{V} . Pentru cadrul ei de valabilitate, vezi și indicațiile de la finele § A.3, pag. 701. În cazul plan, (9) ia forma (A.3.18) sau (A.3.19).

Prima formulă a lui Green: date fiind funcțiile $u, v \in C^2(\mathcal{V})$, avem

$$\iiint_{\mathcal{V}} v \Delta u \, dV = - \iiint_{\mathcal{V}} (\text{grad } u \cdot \text{grad } v) \, dV + \iint_{\mathcal{S}} v u_{,n} \, dS. \quad (10)$$

A doua formulă a lui Green: Luând $u = v$, obținem din (10):

$$\iiint_{\mathcal{V}} u \Delta u \, dV = - \iiint_{\mathcal{V}} (\text{grad } u)^2 \, dV + \iint_{\mathcal{S}} u u_{,n} \, dS. \quad (11)$$

A treia formulă a lui Green: intervertind în (10) funcțiile u și v și scăzând termen cu termen (10) din relația astfel obținută, avem

$$\iiint_{\mathcal{V}} (u \Delta v - v \Delta u) \, dV = \iint_{\mathcal{S}} (u v_{,n} - v u_{,n}) \, dS. \quad (12)$$

Formule de același tip se stabilesc și în cazul plan, pentru domenii \mathcal{D} mărginite de curbe frontieră netede pe porțiuni.

Toate aceste formule se generalizează ușor pentru domenii nemărginite, dacă u, v sînt *regulate la infinit*, adică verifică (în \mathcal{E}_3) condițiile

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R |f| \leq C, \quad \lim_{R \rightarrow \infty} R^2 |\text{grad } f| \leq C, \quad (13)$$

($C = \text{const.}$) (Vezi de ex. A. Tihonov și A. Samarskii [1], § 4.2, pct. 8.)

Subliniem că formulele lui Green *nu se referă* la proprietăți ale funcțiilor u, v — ci la proprietăți ale operatorului lui Laplace și ale operatorilor grad și $(n \cdot \text{grad})$, asociați acestuia prin intermediul relațiilor (10) — (12).

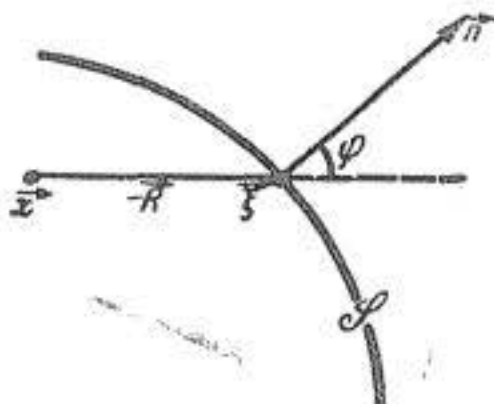


Fig. 7.2.1

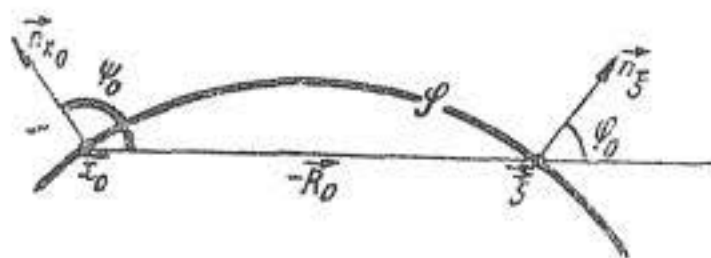


Fig. 7.2.2

În cele ce urmează, vom avea de repetate ori de considerat puncte în \mathcal{V} , pe care le vom nota x sau ξ . Punctele situate pe \mathcal{S} se vor nota x_0 (și încă ξ , în special pentru puncte curente de integrare). Pe \mathcal{S} se consideră întotdeauna normala *exterioară*, notată cu n .

Vom folosi notațiile

$$\begin{aligned} \mathbf{R} = \mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}, \quad R_0 = \mathbf{x}_0 - \boldsymbol{\xi}, \quad R = |\mathbf{R}| = \sqrt{\sum_{j=1}^3 (x_j - \xi_j)^2}, \\ \varphi = (\mathbf{n}, -\mathbf{R}), \quad \varphi_0 = (\mathbf{n}, -\mathbf{R}_0). \end{aligned} \quad (14)$$

Prin urmare, \mathbf{R} este vectorul de la $\boldsymbol{\xi}$ la \mathbf{x} , iar R este modulul său. (În (5), (6) avem desigur $\boldsymbol{\xi} = 0$.) Unghiul φ este unghiul dintre normala \mathbf{n} în punctul $\boldsymbol{\xi}$ și vectorul $-\mathbf{R}$ de la \mathbf{x} la $\boldsymbol{\xi}$ (vezi și mai departe, pag. 518).

Este ușor de văzut că funcția R^{-1} verifică ecuația lui Laplace în raport cu variabilele x_j (cu excepția punctului $\boldsymbol{\xi}$), sau încă verifică ecuația lui Laplace în raport cu variabilele ξ_j (cu excepția punctului \mathbf{x}). Mai precis, se poate arăta că

$$\Delta R^{-1} = -4\pi\delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}), \quad (15)$$

unde $\delta(\mathbf{x})$ este funcția lui Dirac în \mathcal{L}_3 : $\delta(\mathbf{x}) \equiv \delta(x_1, x_2, x_3)$. (Vezi I. Ghelfand și G. Șilov [1], volumul 1, § 1.2, pct. 3; § 4.1, pct. 5.)

Privind valorile funcției R^{-1} în punctul \mathbf{x} ca descriind efectul unei anumite acțiuni mecanice în $\boldsymbol{\xi}$, vom numi pe primul din aceste puncte, *punct de observație*, iar pe cel de al doilea, *punct de sursă*. Rolurile acestor puncte pot fi intervertite.

Funcția

$$f(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}) = 1/4\pi R(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}) \quad (16)$$

se numește *soluția fundamentală*²⁾ a ecuației lui Laplace (în \mathcal{L}_3). Factorul $1/4\pi$ este un factor de normare: prezența sa arată că $f(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi})$ descrie o acțiune concentrată *unitară* în $\boldsymbol{\xi}$ (compară (15) și (16)). Astfel de pildă, funcția (16) poate fi privită ca potențial al vitezelor în mișcarea irotațională a unui fluid ideal, în prezența unui izvor de intensitate *unitară*.

În cazul plan, rolul de soluție fundamentală este luat de funcția

$$f(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}) = (1/2\pi) \ln [1/R(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi})]. \quad (17)$$

Întrucât aceste funcții depind numai de *diferența* $\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}$, orice suprapunere de acțiuni descrise prin intermediul lor, poate fi exprimată printr-o convoluție (vezi § A.2, pag. 690).

Pentru a scrie formula (12) pentru o funcție $u \in C^2(\mathcal{V})$ și funcția (16), trebuie să izolăm punctul singular $\mathbf{x} = \boldsymbol{\xi}$, și să calculăm integrala de suprafață pe \mathcal{S} , plus aceeași integrală luată pe o suprafață \mathcal{S}_ε care conține în interior punctul $\mathbf{x} = \boldsymbol{\xi}$, de exemplu o sferă $S(\boldsymbol{\xi}, \varepsilon)$; integrala de volum urmează a fi calculată în domeniul $\mathcal{V} - B_\varepsilon$, unde B_ε e bula mărginită de

²⁾ Din punctul de vedere al unei teorii generale ar fi mai corect să atribuim expresiei (16) semnul *minus*.

S_ε . (Compară cu raționamentele care au condus la (A.4.48).) Trecând la limită pentru $\varepsilon \rightarrow 0$, se obține așa numita *formulă integrală fundamentală*:

$$u(x) = -\frac{1}{4\pi} \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\Delta u}{R} dV + \frac{1}{4\pi} \iint_{\mathcal{S}} \left[\frac{1}{R} u_{,n} - u \left(\frac{1}{R} \right)_{,n} \right] dS, \quad (18)$$

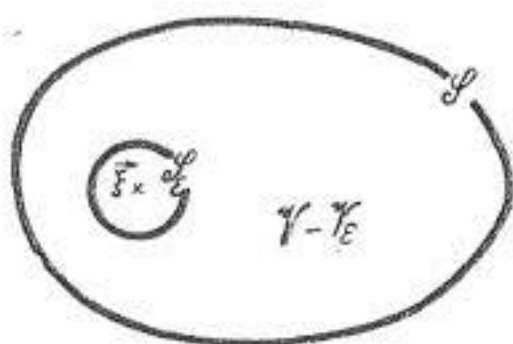


Fig. 7.2.3

unde derivata normală se calculează în raport cu punctul de sursă ξ variabil, iar punctul de observație x joacă rol de parametru. Formula (18) rămâne valabilă și pentru domenii \mathcal{V} nemărginite, dacă funcția u este regulată la infinit. Ea poate fi transcrisă în \mathcal{L}_2 , dacă înlocuim (16) prin (17).

Ca și formulele lui Green, formula (18) pune în evidență proprietăți ale *operatorului* lui Laplace, cărui ea îi asociază operatorul identic și operatorul de derivare normală.

b) Potențiali newtonieni

Considerând funcțiile Δu , u și $u_{,n}$ cunoscute în \mathcal{V} , respectiv pe \mathcal{S} , formula (18) introduce trei tipuri de integrale, legate de soluția fundamentală:

$$U(x) = \iiint_{\mathcal{V}} \frac{F(\xi)}{R} dV, \quad (19)$$

$$V(x) = \iint_{\mathcal{S}} \frac{G(\xi)}{R} dS, \quad (20)$$

$$W(x) = - \iint_{\mathcal{S}} \left(\frac{1}{R} \right)_{,n} H(\xi) dS. \quad (21)$$

Acestea se numesc *potențiali newtonieni*, și anume: *potențial de volum*, *de simplu strat*, și *de dublu strat*; F , G , și H sînt *densitățile* respective.

Pentru o expunere detaliată a teoriei potențialilor newtonieni, vezi de exemplu E. Goursat [2], §§ 535—539; N. Günther [1]; L. Sretenskii [1].

Pentru potențialul de dublu strat, putem încă scrie (21) sub forma

$$W(x) = \iint_{\mathcal{S}} R^{-2} R_{,n} H(\xi) dS. \quad (22)$$

Or, din (14) urmează că în $\xi \in \mathcal{S}$ avem

$$R_{,n} = n_j R_{,z_j} = n_j (\xi_j - x_j) / R = - (n \cdot R) / R = \cos \varphi, \quad (23)$$

astfel că acum formula (21) devine

$$W(x) = \iint_{\mathcal{S}} (\cos \varphi / R^2) H(\xi) dS. \quad (24)$$

Proprietățile potențialilor depind de cele ale densităților, și de \mathcal{S} . Potențialul de volum (19) este o integrală improprie. Dacă $F \in C^0_{\mu}(\mathcal{V})$, integrala $U(x)$ este convergentă, și reprezintă o funcție de clasă $C^2_{\mu}(\mathcal{V})$, pentru care

$$\Delta U(x) = \begin{cases} -4\pi F(x) & \text{dacă } x \in \mathcal{V}, \\ 0 & \text{dacă } x \in \mathcal{V} + \mathcal{S}. \end{cases} \quad (25)$$

Potențialul de volum este deci o soluție particulară a ecuației lui Poisson, și cunoașterea lui permite reducerea studiului acesteia, la studiul ecuației lui Laplace, cu condiții la limită convenabil modificate.

Domeniul \mathcal{V} poate fi privit ca ocupat de o mulțime de surse de intensitate variabilă $(1/4\pi) F dV$, repartizate continuu în \mathcal{V} . Luând $F \equiv 0$ în complementara $\mathcal{C}(\mathcal{V} + \mathcal{S})$, și observînd că R depinde numai de diferențele $x_i - \xi_i$, acest potențial se scrie sub forma unei convoluții

$$U = F * R^{-1}. \quad (26)$$

Ținînd seama de (A.2.23), unde rolul operatorului \mathfrak{D} este preluat de Δ , obținem pe rînd (făcînd uz și de (15) și (A.2.10)) :

$$\Delta U = \Delta(F * R^{-1}) = F * \Delta R^{-1} = F * (-4\pi\delta) = -4\pi F, \quad (27)$$

ceea ce este similar cu (25), dar are un sens mai general, întrucît F este aci o distribuție. (Vezi I. Ghelfand și G. Șilov[1], vol. 1, § 1.3, pct. 3.)

Potențialii (20), (21) verifică ecuația lui Laplace în orice punct $x \in \mathcal{S}$, pentru orice densități G, H integrabile pe \mathcal{S} . (Formule mai generale, similare cu (26), pot fi de asemenea date; vezi loc. cit., § 3.1, pct. 2, 5 și 8.) Este limpede că aceste formule definesc funcții *diferite* după cum x este interior sau exterior domeniului.

Întrucît sînt funcții armonice, potențialii (20), (21) sînt și funcții analitice (desfășurabile în serii Taylor convergente) în orice punct $x \in \mathcal{S}$.

Dacă însă $x \in \mathcal{S}$, integralele (20), (21) devin de asemenea improprii. Dacă densitățile sînt integrabile și mărginite pe \mathcal{S} , iar \mathcal{S} este o suprafață Liapunov pe porțiuni, aceste integrale sînt convergente. Valorile lor pot fi obținute printr-un proces de trecere la limită, *care nu trebuie confundat* cu cel care dă valorile la limită ale integralelor (20), (21) în sensul din § 1.1, pentru puncte interioare sau exterioare ce tind către puncte de pe \mathcal{S} . (Compară cu § A.11, pag. 776.)

Să notăm cu indicele „+” valorile la limită pentru $x \rightarrow x_0$, $x \in \mathcal{V}^+$, $x_0 \in \mathcal{S}$, și cu indicele „-” cele ce corespund cazului complementar.

Dacă G și H sînt *continue* pe \mathcal{S} , se pot stabili următoarele relații între valorile la limită interioare (+), cele exterioare (-), și valorile directe ale integralelor (20), (21) și ale derivatelor lor în orice punct $x_0 \in \mathcal{S}$:

$$V_+(x_0) = V_-(x_0), \quad (28)$$

$$W_+(x_0) = 2\pi H(x_0) + \iint_{\mathcal{S}} (\cos \varphi_0 / R_0^2) H(\xi) dS, \quad (29)$$

$$W_-(x_0) = -2\pi H(x_0) + \iint_{\mathcal{S}} (\cos \varphi_0 / R_0^2) H(\xi) dS, \quad (30)$$

$$V_{+,n}(x_0) = 2\pi G(x_0) + \iint_{\mathcal{S}} (\cos \psi_0 / R_0^2) G(\xi) dS, \quad (31)$$

$$V_{-,n}(x_0) = -2\pi G(x_0) + \iint_{\mathcal{S}} (\cos \psi_0 / R_0^2) G(\xi) dS. \quad (32)$$

În aceste relații, φ_0 este — după cum urmează din (14) — unghiul dintre normala *exterioară* \mathbf{n} la \mathcal{S} în *punctul de sursă* ξ , și vectorul $-\mathbf{R}_0$ ce merge de la punctul de observație x_0 (situat acum tot pe \mathcal{S}), la punctul de sursă ξ . Unghiul ψ_0 este unghiul dintre normala *exterioară* în *punctul de observație*, și același vector $-\mathbf{R}_0$ (vezi și fig. 7.2.1 și 7.2.2).

Aceste relații rămîn valabile pentru suprafețe \mathcal{S} deschise și orientabile.

Asemănarea dintre formulele (28)–(32) și formulele lui Sohoțkii-Plemelj (A.11.6) pentru integralele de tip Cauchy este evidentă.

Formule similare pot fi stabilite în \mathcal{E}_2 , înlocuind în (29)–(32) coeficientul 2π prin π , și R_0^2 prin R_0 .

Pentru un studiu detaliat al formulelor (28)–(32), vezi de exemplu N. Günther [1], capitolul 2; V. Smirnov [2], volumul 4, pct. 192–199; L. Sretenskii [1], capitolul 1; A. Tihonov și A. Samarskii [1], § 4.5. Vezi și N. Mushelişvili [4], § 1.12.

Potențialii newtonieni introduși în (19)–(21) conduc la o interpretare importantă a formulei (18). Anume, fiind dată ecuația lui Poisson

$$\Delta u + F = 0 \quad \text{în } \mathcal{V}, \quad (33)$$

și valorile la limită

$$u|_{\mathcal{S}} = g, \quad u_{,n}|_{\mathcal{S}} = f, \quad (34)$$

formula (18) realizează reprezentarea lui u ca *sumă a trei potențiali*. Studiul ecuației lui Poisson poate fi deci redus la cel al funcțiilor (19)–(21).

c) Metode de rezolvare

Formula (18) nu dă totuși explicit soluția problemei (33), (34): teorema de unicitate arată că datele din (34) sînt supraabundente. Pentru a căpăta o formulă care să furnizeze soluția ecuației (33) cu datele la limită

$$u|_{\mathcal{S}'} = g, \quad u_{,n}|_{\mathcal{S}''} = f, \quad (\mathcal{S}' \cup \mathcal{S}'' = \mathcal{S}, \quad \mathcal{S}' \cap \mathcal{S}'' = \emptyset), \quad (35)$$

este necesară considerarea funcției lui Green $G(x; \xi)$. (A nu se confunda cu $G(\xi)$ din (20)!) Aceasta este suma soluției fundamentale a ecuației lui Laplace, cu o anumită soluție regulată a aceleiași ecuații, care trebuie determinată din condițiile

$$G|_{\mathcal{S}'} = 0, \quad G_{,n}|_{\mathcal{S}''} = 0. \quad (36)$$

Prin urmare, $G(x; \xi)$ este o funcție de domeniu (și de descompunerea $\mathcal{S}' \cup \mathcal{S}''$) și trebuie atașată nu ecuației (33) cu condițiile (35), ci operatorului Δ , domeniului \mathcal{V} , și descompunerii $\mathcal{S}' \cup \mathcal{S}''$. Cunoașterea ei dă posibilitatea de a exprima soluția celor trei probleme fundamentale (Dirichlet, Neumann, sau mixtă) pentru ecuația lui Poisson prin integrale definite:

$$u(x) = \iiint_{\mathcal{V}} F(\xi) G(x; \xi) dV - \iint_{\mathcal{S}} g(\xi) [G(x; \xi)]_{,n} dS + \iint_{\mathcal{S}''} f(\xi) G(x; \xi) dS. \quad (37)$$

Aceasta a fost istoricește prima cale spre demonstrarea teoremelor de existență pentru ecuația lui Poisson. Din punct de vedere al calculului, importanța ei este sensibil redusă de dificultățile legate de determinarea efectivă a funcției lui Green.

O a doua cale constă în a reduce problema la studiul unor *ecuații integrale* pentru densitățile ce apar în (18) — așadar, în cazul tridimensional, pentru funcții de două variabile, iar în cel bidimensional, pentru funcții de numai o variabilă.

Formula (25) arată că problema poate fi întotdeauna redusă la integrarea ecuației lui Laplace, iar soluția acesteia poate fi căutată sub forma unui potențial de dublu sau de simplu strat, după cum este vorba de problema lui Dirichlet sau Neumann. Densitatea odată găsită, soluția se obține și aci sub forma unei integrale definite.

Astfel de pildă, să determinăm funcția u , armonică în \mathcal{V}^+ , și care ia pe \mathcal{S} valori date g . Căutînd soluția sub forma

$$W(x) = \iint_{\mathcal{S}} (\cos \varphi / R^2) H(\xi) dS, \quad (38)$$

sîntem conduşi la a transcrie condiţia la limită sub forma

$$W_+ = g, \quad (39)$$

ceea ce, ţinînd seama de (29), duce la ecuaţia integrală

$$2\pi H(x_0) + \iint_{\mathcal{S}} (\cos \varphi_0 / R_0^2) H(\xi) dS = g(x_0), \quad x_0, \xi \in \mathcal{S}. \quad (40)$$

Dacă \mathcal{S} este o suprafaţă cu curbura continuă (vezi § 1.1, pag. 34), această ecuaţie este de tip Fredholm. Dacă \mathcal{S} este numai o suprafaţă Liapunov, prezenţa factorului $1/R_0^2$ arată că avem de-a face cu o ecuaţie slab-singulară (funcţia $\cos \varphi_0$ fiind în acest caz hîlderiană), care beneficiază deci de multe din mijloacele teoriei lui Fredholm. Pentru studiul acestor probleme, vezi C. Iacob [5], capitolul 3; S. Mihlin [1], §§ 10 şi 38; [2], §§ 48 şi 49; [3], §§ 19–21; [4], § 74; A. Tihonov şi A. Samarskii [1], § 4.5, pct. 11.

Dacă \mathcal{S} nu este o suprafaţă Liapunov, atunci (40) este o ecuaţie integrală singulară. Pentru problema plană, astfel de ecuaţii (incluzînd cazul frontierelor Liapunov) sînt studiate în general de F. Gakhov [1]; N. Mushelişvili [3]. Pentru un număr oarecare de dimensiuni, rezultatele cele mai importante aparţin lui G. Giraud (vezi o expunere detaliată în C. Miranda [1], capitolele 3 şi 4) şi S. Mihlin [5].

Menţionăm în fine vechiul punct de vedere al lui Riemann în studiul ecuaţiei lui Poisson, constînd în reducerea chestiunii la o *problemă de minimum pentru o anumită funcţională*. Reluat de D. Hilbert [1], acest punct de vedere a deschis drumul aplicaţiilor analizei funcţionale în problemele fundamentale ale teoriei potenţialului. (Vezi S. Mihlin [2]–[4].)

Ideea de a reprezenta soluţia cu ajutorul funcţiei lui Green, sau prin potenţiali (integrale de tipul (19)–(21), definite cu ajutorul soluţiilor fundamentale ale ecuaţiei omogene corespunzătoare), cu reducerea ulterioară la rezolvarea anumitor ecuaţii integrale — s-a dovedit a fi rodnică şi înafara studiului ecuaţiei lui Poisson. Pentru mai multe detalii, vezi mai departe § 11, pag. 562.

d) Funcţii sferice

În unele chestiuni cu caracter teoretic, precum şi în problemele referitoare la domeniul mărginit de una sau două sfere concentrice, se poate face uz de dezvoltări în serie, analoge într-o anumită măsură seriilor Laurent şi Fourier: este vorba despre seriile de polinoame armonice omogene, respectiv de seriile de funcţii sferice superficiale.

Pentru expuneri amănunţite, vezi de exemplu E. Goursat [2], §§ 531–532; E. Hobson [2], capitolul 4; V. Smirnov [2], volumul 3, partea 2, § 6.1; S. Sobolev [3], capitolele

29—30; L. Sretenskii [1], capitolul 5; N. Teodorescu și V. Olaru [1], vol. 1, partea 3, capitolul 4. A. Tihonov și A. Samarskii [1], anexa 2.

Amintim aci pe scurt că, dacă se caută soluțiile *polinomiale* ale ecuației lui Laplace (în \mathcal{E}_3), se vede ușor că există $2n + 1$ polinoame armonice și omogene de grad n , liniar independente. Transcriind aceste polinoame în coordonate sferice cu ajutorul formulelor (5), deducem că orice astfel de polinom are forma

$$H_n(x_1, x_2, x_3) = R^n Y_n(\theta, \varphi). \quad (41)$$

Aceeași concluzie se obține dacă se pune ecuația lui Laplace sub forma care rezultă din (8), și se caută soluția sub forma

$$H(R, \theta, \varphi) = g(R) Y(\theta, \varphi). \quad (42)$$

De aci, obținem ușor ecuațiile

$$R^2 g''(R) + 2R g'(R) - k g(R) = 0, \quad (43)$$

$$(\sin \theta)^{-1} (\sin \theta Y_{,\theta})_{,\theta} + (\sin \theta)^{-2} Y_{,\varphi\varphi} + k Y = 0, \quad (44)$$

unde k este o constantă nedeterminată. Soluția ecuației (43) este de forma $g(R) = R^n$; întrucât căutăm soluții *polinomiale*, urmează $k = n(n + 1)$. Introducând această valoare în (44), obținem pentru fiecare întreg $n > 0$ câte o soluție $Y_n(\theta, \varphi)$ și pentru fiecare Y_n , câte două soluții ale ecuației lui Laplace:

$$H_n(R, \theta, \varphi) = R^n Y_n(\theta, \varphi), \quad H_{-n-1}(R, \theta, \varphi) = R^{-n-1} Y_n(\theta, \varphi), \quad (45)$$

dintre care prima este un polinom, iar cea de a doua este o funcție armonică și omogenă de grad $-n - 1$.

Funcțiile H_n și H_{-n-1} se numesc *funcții sferice*, iar Y_n se numesc *funcții sferice superficiale* de ordin n . Evident, există $2n + 1$ funcții sferice superficiale independente de ordin n .

Căutînd soluția ecuației (44) pentru $k = n(n + 1)$ sub forma

$$Y_n(\theta, \varphi) = \Theta_n(\theta) \Phi_n(\varphi), \quad (46)$$

obținem

$$\Phi_n'' / \Phi_n = - [\sin \theta (\sin \theta \Theta_n')' / \Theta_n] - n(n + 1) \sin^2 \theta = -m^2, \quad (47)$$

unde $-m^2$ este o nouă constantă. Ecuația

$$\Phi_n'' + m^2 \Phi_n = 0, \quad (48)$$

ce rezultă din (47), posedă soluțiile $\sin m\varphi$, $\cos m\varphi$. Pentru $0 \leq m \leq n$, obținem deci $2n + 1$ soluții liniar independente.

Efectuînd în cea de-a doua ecuație ce rezultă din (47) schimbarea de variabilă $x = \cos \theta$, obținem ecuația

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dP_n^m(x)}{dx} \right] + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] P_n^m(x) = 0, \quad (49)$$

unde am notat

$$P_n^m(x) = \Theta_n(\theta) \quad (50)$$

pentru o valoare dată a lui m (număr natural).

Soluția continuă în intervalul $[-1, +1]$ a ecuației (49) este

$$P_n^m(x) = (1-x^2)^{m/2} d^m P_n(x) / dx^m, \quad (51)$$

unde funcțiile $P_n(x)$ sînt *polinoamele lui Legendre*

$$P_n(x) = (1/2^n n!) d^n (x^2-1)^n / dx^n; \quad (52)$$

$P_n^m(x)$ se numesc *polinoamele lui Legendre asociate*. Și unele, și celelalte sînt sisteme de polinoame ortogonale în intervalul $[-1, +1]$.

Funcția sferică superficială din (46) ia acum forma

$$Y_n(\theta, \varphi) = a_0 P_0(\cos \theta) + \sum_{m=1}^n [a_m \cos m\varphi + b_m \sin m\varphi] P_n^m(\cos \theta), \quad (53)$$

și depinde de $2n+1$ constante arbitrare.

Funcțiile sferice superficiale rezultă de asemenea ortogonale pe sfera unitate. Aceasta permite construirea unor serii formal analoge seriilor Fourier :

$$F(\theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\theta, \varphi) = a_0^0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n^0 P_n(\cos \theta) + \sum_{m=1}^n (a_m^n \cos m\varphi + b_m^n \sin m\varphi) P_n^m(\cos \theta) \right], \quad (54)$$

în care coeficienții au, datorită proprietăților de ortogonalitate, valorile

$$a_m^n = \frac{(2n+1)(n-m)!}{2\delta_m \pi (n+m)!} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} F(\theta, \varphi) P_n^m(\cos \theta) \cos m\varphi \sin \theta d\theta d\varphi, \quad (55)$$

$$b_m^n = \frac{(2n+1)(n-m)!}{2\delta_m \pi (n+m)!} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} F(\theta, \varphi) P_n^m(\cos \theta) \sin m\varphi \sin \theta d\theta d\varphi,$$

unde $P_n^0 \equiv P_n$, iar $\delta_0 = 2$, $\delta_m = 1$ pentru $m \geq 1$.

Pentru convergența uniformă a seriei (54) în orice punct al sferei unitate, este suficient ca media valorilor lui $F(\theta, \varphi)$ pe orice cerc (privit ca cerc paralel) pe sferă să fie o funcție de clasă

C^1 în raport cu arcul meridianului corespunzător (vezi V. Smirnov [2], vol. 3, partea 2, pct. 134). Aceasta este o condiție mai severă decât cele ce intervin în teoria seriilor Fourier (vezi § A.9). O altă condiție suficientă de convergență este $F(\theta, \varphi) \in C^2$. Pentru rezultate mai generale, vezi E. Hobson [2], capitolul 7.

Din cele de mai sus rezultă ușor soluția problemelor lui Dirichlet și Neumann pentru bulă, pentru exteriorul sferei și pentru domeniul mărginit de două sfere concentrice. Astfel, în problema lui Dirichlet este suficient să dezvoltăm datele la limită în serii de funcții sferice superficiale, și să înlocuim în fiecare din termeni funcția Y_n prin $(R/R_0)^n Y_n$ (pentru problema interioară), sau prin $(R/R_1)^{-n-1} Y_n$ (pentru problema exterioară) sau, în fine, cu o sumă de termeni de ambele tipuri (pentru domeniul mărginit de două sfere de raze $R_1 < R_0$).

§ 3. ASUPRA REPREZENTĂRII SOLUȚIILOR ECUAȚIILOR ELASTICITĂȚII PRIN POTENȚIALI DE TENSIUNE ȘI DE DEPLASARE

a) Potențiali

Noțiunea de *potențial* a fost introdusă în § 4.10. În capitolele 5 și 6, am văzut că funcțiile lui Prandtl și Timoshenko, ca și cea a lui Airy, sînt potențiali de tensiune; funcțiile lui Capildeo și Milne-Thomson, respectiv ale lui Kolosov și Muskhelișvili, sînt potențiali de deplasare pentru aceleași probleme.

Trecînd la cazul tridimensional, amintim rezultatele lui J. Maxwell [1] și G. Morera [1] care, generalizînd formulele lui Airy, au construit potențiali de tensiune ce asigură verificarea ecuațiilor de echilibru. (Vezi și E. Beltrami [1]; G. Morera [1], [2]; M. Gurtin [2].) Dar faptul că acești potențiali trebuie să verifice și ecuațiile ce derivă din condițiile de compatibilitate (șase la număr, în loc de una în cazul plan), explică noile dificultăți de învins. Pentru detalii, vezi de exemplu M. Haimovici [1], § 9.1; A. Lurie [4], §§ 1.11 și 1.12; A. Love [1], § 56; vezi și lucrarea lui B. Finzi [1], care este la originea punctului de vedere dezvoltat de I. Krutkov [1] și V. Bloh [1], [2] (inclusiv pentru cazul coordonatelor curbilinii); vezi în fine E. Kröner [2] și [4], § 2.11–2.12; H. Schaeffer [1]; C. Truesdell [4].

Dificultățile menționate au justificat concentrarea atenției asupra ecuațiilor în deplasări.

După o primă reprezentare a soluției ecuațiilor lui Lamé omogene prin funcții armonice (lord Kelvin [1], retipărit în [4], vol. 1; vezi încă E. și F. Cosserat [2]), au urmat repetate încercări de a se reprezenta aceste soluții prin funcții bi-armonice (vezi de ex. J. Boussinesq [2]; B. Galerkin, [1], [2] vol. 1). Dar teorema lui Almansi (vezi § 4.10) permite să se ajungă la *reprezentarea deplasărilor prin potențiali armonici*. Utilizarea funcțiilor bi-armonice în acest scop este azi deja depășită.

Totuși, potențialii de deplasare prezintă — deocamdată — avantaje evidente, *mai ales în cazul corpurilor izotrope și omogene*. Dimpotrivă, metoda potențialilor de tensiune poate conduce la soluții care nu depind de legătura dintre tensiuni și deformații, și sint deci apte de a fi generalizate la corpuri anizotrope, ne-omogene, chiar plastice etc. (Vezi și § 5.1, pag. 166; § 6.6, pag. 388.)

b) Reprezentarea lui Kelvin

Înainte de a trece la reprezentările uzuale ale soluțiilor, amintim pe scurt reprezentarea lui Kelvin. Să considerăm ecuațiile lui Lamé (4.8.7) :

$$\Delta \mathbf{u} + (1 - 2\nu)^{-1} \text{grad div } \mathbf{u} + \mu^{-1} \mathbf{F} = 0, \quad (1)$$

și să folosim pentru vectorii \mathbf{u} și \mathbf{F} descompunerea lui Stokes :

$$\mathbf{u} = \text{grad } p + \text{rot } \mathbf{q}, \quad (2)$$

$$\mathbf{F} = \text{grad } P + \text{rot } \mathbf{Q}. \quad (3)$$

Aceasta dă succesiv

$$\text{div } \mathbf{u} = \Delta p; \quad \Delta \mathbf{u} = \text{grad } \Delta p + \text{rot } \Delta \mathbf{q}, \quad (4)$$

astfel că (1) devine

$$\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \text{grad } \Delta p + \text{rot } \Delta \mathbf{q} + \frac{1}{\mu} (\text{grad } P + \text{rot } \mathbf{Q}) = 0. \quad (5)$$

Or, această ecuație este desigur satisfăcută dacă alegem

$$\Delta p = -\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \frac{P}{\mu}, \quad \Delta \mathbf{q} = -\frac{\mathbf{Q}}{\mu}. \quad (6)$$

Orice vector \mathbf{u} definit de (2), (6), verifică ecuațiile (1). Am obținut deci o soluție a ecuațiilor lui Lamé, reprezentată prin patru potențiali (scalari) de deplasare, soluții la rîndul lor ale unor ecuații Poisson, sau pur și simplu funcții armonice dacă $\mathbf{F} = 0$. (Vezi și § 4.10, pag. 156).

Cu toată importanța ei principală, reprezentarea lui Kelvin a jucat un rol practic restrîns — desigur, din cauză că potențialii p și \mathbf{q} intervin în expresia lui \mathbf{u} numai sub formă diferențială.

c) Reprezentarea lui Clebsch

Un analog al acestei reprezentări pentru cazul dinamic a fost obținut de A. Clebsch [1]. Folosind cele arătate în § 4.11, ecuațiile micilor mișcări elastice se obțin (în absența forțelor de volum) înlocuind \mathbf{F}

prin vectorul lui d'Alembert $-\rho \ddot{u}$. Raționamentele de mai sus rămân intacte, și în locul ecuațiilor (6) căpătăm (folosind încă și (3.4.7))

$$\Delta p = [\rho/(\lambda + 2\mu)] \ddot{p}, \quad \Delta q = [\rho/\mu] \ddot{q}. \quad (7)$$

În cazul prezenței forțelor de volum, în membrul al doilea din (7) se adaugă încă termeni identici celor din membrul al doilea din (6).

În elasto-dinamică, ecuația lui Poisson (sau Laplace) este deci înlocuită de *ecuația propagării undelor*, cea mai simplă ecuație de tip hiperbolic. Repetind cu referire la ecuațiile (7) raționamentele bazate pe formula (4.12.4), ajungem la concluzia că *componenta irotațională* grad p a deplasării u se propagă cu viteza c_1 , iar *componenta echivoluminală* rot q se propagă cu viteza c_2 din (4.12.16). Descompunerea lui Stokes și raționamentul lui Clebsch oferă deci o posibilitate de a separa cele două tipuri de unde, puse în evidență în § 4.12.

§ 4. REPREZENTAREA LUI GRODSKII. ALTE REPREZENTĂRI PRIN POTENȚIALI DE DEPLASARE. PROPRIETĂȚI GENERALE

Ne vom opri acum asupra unor reprezentări libere de inconvenientul mai sus menționat relativ la cea a lui Kelvin. O tehnică unitară de deducere a celor mai importante reprezentări prin potențiali de deplasare este următoarea (L. Solomon [1]).

Dacă termenul median ar lipsi din ecuațiile lui Lamé

$$\Delta u + (1 - 2\nu)^{-1} \text{grad div } u + \mu^{-1} F = 0, \quad (1)$$

vectorul u ar satisface o ecuație Poisson. Să căutăm deci soluția ecuațiilor lui Lamé sub forma

$$u = B + u_0, \quad (2)$$

unde B este soluția ecuației Poisson (vectoriale)

$$\Delta B + \mu^{-1} F = 0, \quad (3)$$

iar u_0 este un vector de corecție. Impunând dinainte diferite proprietăți vectorului u_0 , vom obține pentru acesta diferite ecuații cărora ele le satisfac. Toate aceste rezultate sînt valabile pentru $u \in C^2(\mathcal{V})$, chiar dacă $F \neq 0$.

a) Reprezentarea lui Grodskii

Să căutăm mai întîi vectorul u_0 sub forma

$$u_0 = \text{grad } f. \quad (4)$$

Pentru a găsi ecuația căreia îi satisface funcția f , vom introduce

$$u = B + \text{grad } f \quad (5)$$

în (1), ținând seama că B este soluția ecuației (3). Întrucât avem

$$\Delta u = -\frac{F}{\mu} + \text{grad } \Delta f, \quad \text{div } u = \text{div } B + \Delta f, \quad (6)$$

și întrucât avem $0 < \nu < \frac{1}{2}$, ecuația (1) devine

$$\text{grad} \left[\Delta f + \frac{1}{2} (1 - \nu)^{-1} \text{div } B \right] = 0. \quad (7)$$

Întrucât nu căutăm soluția generală a ecuației (7), este suficient să luăm

$$\Delta f = -\frac{1}{2} (1 - \nu)^{-1} \text{div } B. \quad (8)$$

Să începem prin a evalua expresia $\Delta(x \cdot B)$. Avem mai întâi

$$\Delta(x \cdot B) = (\delta_{jh} B_h + x_h B_{h,j})_{,j} = 2 \text{div } B + x \cdot \Delta B, \quad (9)$$

și deci, ținând seama și de (3):

$$\text{div } B = \frac{1}{2} \Delta(x \cdot B) + \frac{1}{2} \mu^{-1} (x \cdot F). \quad (10)$$

Introducând acum (10) în (8), căpătăm ecuația

$$\Delta \left[f + \frac{1}{4} (1 - \nu)^{-1} (x \cdot B) \right] = -\frac{1}{4} (1 - \nu)^{-1} \mu^{-1} (x \cdot F), \quad (11)$$

și mai departe, notînd

$$f + \frac{1}{4} (1 - \nu)^{-1} (x \cdot B) = -\frac{1}{4} (1 - \nu)^{-1} B_0,$$

căpătăm în definitiv

$$\Delta B_0 = \mu^{-1} (x \cdot F), \quad (12)$$

unde B_0 este soluția *generală* a ecuației (12), iar f are forma

$$f = -\frac{1}{4} (1 - \nu)^{-1} (x \cdot B + B_0). \quad (13)$$

Corecția căutată a fost astfel găsită, și u admite reprezentarea

$$u = B - \frac{1}{4} (1 - \nu)^{-1} \text{grad } (x \cdot B + B_0), \quad (14)$$

unde avem

$$\Delta \mathbf{B} = -\mu^{-1} \mathbf{F}, \quad \Delta B_0 = \mu^{-1} (\mathbf{x} \cdot \mathbf{F}). \quad (15)$$

Sub o formă mai dezvoltată, relațiile (14) se scriu

$$u_j = B_j - \frac{1}{4(1-\nu)} (x_1 B_1 + x_2 B_2 + x_3 B_3 + B_0)_{,j}. \quad (16)$$

Se verifică ușor că orice vector \mathbf{u} de forma dată în (14), (15) este o soluție a ecuațiilor lui Lamé. Într-adevăr, un calcul elementar dă (ținând seama și de (9) și (3)) :

$$\Delta \mathbf{u} = -\frac{\mathbf{F}}{\mu} - \frac{1}{2(1-\nu)} \text{grad div } \mathbf{B}, \quad \text{div } \mathbf{u} = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \text{div } \mathbf{B}, \quad (17)$$

astfel că ecuațiile (1) rezultă identic verificate.

Prin urmare, reprezentarea (14), (15) este o condiție *suficientă* (nu și necesară!) pentru ca vectorul $\mathbf{u} \in C^2$ să fie soluție a ecuațiilor Lamé ne-omogene. Evident, alegând funcții \mathbf{B} , B_0 destul de simple, putem construi, printr-o metodă inversă, soluții ale ecuațiilor Lamé. Vom face de repetate ori uz de acest fapt.

Reprezentarea (14), (15) a fost găsită de către G. Grodskii [1], H. Neuber [1] și P. Papkovici [1], [2]. După cum subliniază P. Papkovici [3], prioritatea îi aparține lui Grodskii, în timp ce Neuber are meritul celei dintâi utilizări sistematice a acestei reprezentări. În cele ce urmează, reprezentarea (14), (15) se va numi *reprezentarea* (sau *soluția*) *lui Grodskii*, iar funcțiile B_1 , B_2 , B_3 , B_0 vor fi funcțiile lui Grodskii. (În literatură, este frecvent folosită denumirea de „soluție Neuber-Papkovici” sau „Papkovici-Boussinesq”.)

OBSERVAȚIE. O reprezentare de aspect similar apare în studiul corpurilor poroase, sau al corpurilor compuse din mici granule sferice. Vezi de exemplu M. Biot [1]; A. Lubinskii [1]; R. Mindlin [5].

Pentru $\mathbf{F} = 0$, formulele (14) și (15) dau soluția de clasă C^2 a ecuațiilor lui Lamé omogene *prin intermediul a 4 potențiali armonici de deplasare*. (După cum vom vedea în § 5, aceștia *nu sînt* independenți.)

Ca și în §§ 5.11 și 6.11, ne vom limita în general la a căuta soluții regulate. Pentru aceasta, este suficient să presupunem că \mathbf{B} , $B_0 \in C^2(\mathcal{V} + \mathcal{S})$. Uneori, vom considera totuși și potențiali cu singularități (vezi de ex. § 8 și §§ 9.5–9.8).

b) Reprezentarea lui Trefftz

Să căutăm soluția ecuațiilor (1) sub forma (2) în așa fel, încît \mathbf{u}_0 să depindă de o singură funcție scalară, și să se anuleze³⁾ pe unul din planele de coordonate, fie el $x_j = 0$:

$$\mathbf{u} = \mathbf{B} + x_j \text{grad } h. \quad (18)$$

³⁾ Pentru sensul acestei condiții, vezi § 9.2.

Vectorul \mathbf{B} satisface aceeași ecuație (3); dar întrucît vectorii de corecție din (5) și (18) sînt diferiți, rezultă că notația \mathbf{B} este folosită în cele două formule pentru vectori de asemenea diferiți.

Ținînd seama că $\text{grad } x_j = \mathbf{i}_j$, deducem din (3) și (18)

$$\begin{aligned}\Delta u &= -\mu^{-1}F + 2(\text{grad } h)_{,j} + x_j \text{grad } \Delta h, \\ \text{div } u &= \text{div } \mathbf{B} + h_{,j} + x_j \Delta h,\end{aligned}\quad (19)$$

$$\text{grad div } u = \text{grad div } \mathbf{B} + \text{grad } h_{,j} + x_j \text{grad } \Delta h + \mathbf{i}_j \Delta h,$$

astfel că ecuația (1), după înmulțire cu $(1-2\nu) \neq 0$, conduce la $(3-4\nu)(\text{grad } h)_{,j} + \text{grad div } \mathbf{B} + 2(1-\nu)x_j \text{grad } \Delta h + \mathbf{i}_j \Delta h = 0$, ceea ce este desigur verificat dacă luăm

$$\Delta h = 0, \quad h_{,j} = -(3-4\nu)^{-1} \text{div } \mathbf{B}. \quad (20)$$

Spre deosebire de cazul reprezentării lui Grodskii, scalarul h care determină vectorul de corecție este soluție a unui sistem de două ecuații. Problema compatibilității sistemului (20) — așadar a posibilității de a reconstitui funcția *armonică* h dacă derivata ei $h_{,j}$ (pentru j dat) e cunoscută, este cercetată de M. Slobodianskii [1]. (Aceasta revine la a rezolva o anumită problemă Dirichlet pentru ecuația lui Laplace.)

Reprezentarea (3), (18), (20) aparține lui E. Trefftz [3]. Și ea poate fi folosită pentru a obține soluții pe linia metodei inverse.

Menționăm încă reprezentarea lui J. Boussinesq [2] — care se obține cerînd ca vectorul u_0 să se anuleze pe frontiera unei bule — și cea a lui A. Korn [1] — care rezultă dacă u_0 este căutat sub forma unui vector echivoluminal. Nu insistăm asupra lor, întrucît ele par a fi deja eliminate din practică de către reprezentarea lui Grodskii, cea mai maleabilă.

O reprezentare foarte generală este propusă de A. Haimovici [1], § 9.2 :

$$u = \mathbf{B} + H \text{grad } \varphi + \mathbf{K} \varphi, \quad (21)$$

$$\Delta \mathbf{B} = \mathbf{L}, \quad \Delta \varphi = L, \quad H = aR^2 + \mathbf{b} \cdot \mathbf{x} + c, \quad \mathbf{K} = (a+k)\mathbf{x} + \mathbf{b},$$

unde $a, c, k, L, \mathbf{b}, \mathbf{L}$, sînt constante și vectori constanți cunoscuți.

Vezi de asemenea reprezentările propuse de V. Bloh [1], [2]; F. Ciurikov [1]; V. Deev [1].

Articole de sinteză asupra diferitelor reprezentări ale soluțiilor aparțin lui C. Marguerre [1]; P. Papkovici [3]; C. Weber [3]. Importanța chestiune a *completitudinii* acestor reprezentări (așadar a condițiilor *necesare* pentru ca soluția să poată fi pusă sub o anumită formă) este cercetată de R. Eubanks și E. Sternberg [1]; M. Gurtin [3]; R. Mindlin [2]; P. Naghdî și C. Hsu [1]; M. Slobodianskii [1], [2]; E. Sternberg și M. Gurtin [1].

Pentru aceeași problemă în elasticitate asimetrică, vezi J. Doyle [1].

c) Proprietăți generale

Vom examina acum pe scurt unele caracteristici ale reprezentărilor lui Grodskii și Trefftz, valabile de altfel și pentru cele ale lui Korn și Boussinesq.

Ideea de bază în utilizarea acestor reprezentări este următoarea: dacă transcriem componentele stării elastice prin intermediul potențialilor de deplasare, *integrarea ecuațiilor lui Lamé este redusă la cea a unor ecuații Poisson (sau Laplace), cu date la limită formulate pentru potențiali*. Desigur, în general nu se mai obțin probleme Dirichlet sau Neumann pentru funcțiile lui Grodskii, Trefftz etc. Totuși, în unele cazuri problema a putut fi redusă chiar la studiul unor probleme Dirichlet sau Neumann pentru ecuația lui Laplace (vezi de ex. §§ 5.11, 8.3, 8.4, 9.2, 9.4, 9.6).

Toate aceste reprezentări sînt valabile numai pentru corpuri izotrope și omogene. Rezultatele puțin numeroase obținute pentru corpuri anizotrope sînt expuse de A. Green și W. Zerna [1], § 5.12; E. Kröner [1], [3]; Z. Mossakowska [1]; A. Seeger [1]. (Vezi și § 4.10, pag. 155–156).

Aceste rezultate nu depind de ordinul de conexiune al domeniului, de faptul dacă el este mărginit sau nu, de natura frontierei sale, sau de eventualele condiții la limită. Singura presupunere necesară este aceea că soluția există, și că $u \in C^2(\mathcal{V})$. Conform cercetărilor asupra completitudinii amintite mai sus, *dacă* soluția există și *dacă* $u \in C^2$, atunci soluția poate fi pusă sub forma propusă de Grodskii, Trefftz etc. — cu unele rezerve asupra faptului dacă \mathcal{V} este mărginit sau nu, precum și asupra frontierei \mathcal{S} (vezi de ex. M. Slobodianskii [1]).

Să ne oprim asupra reprezentării lui Grodskii pentru $F = 0$. Din proprietățile fundamentale ale funcțiilor armonice (vezi de ex. A. Tihonov și A. Samarskii [1], § 4.2), urmează că orice soluție de clasă C^2 a ecuațiilor lui Lamé omogene: a) este de clasă $C^\infty(\mathcal{V})$, așadar indefinit derivabilă, b) este analitică în \mathcal{V} , așadar desfășurabilă în orice punct $x \in \mathcal{V}$ în serie Taylor convergentă; c) depinde continuu de datele la limită, așadar la modificări mici ale datelor la limită corespund modificări mici ale soluției în \mathcal{V} .

Dacă \mathcal{V} este nemărginit, sînt necesare în plus anumite condiții la infinit (vezi mai jos (6.18)). Pentru o analiză amănunțită a acestor chestiuni (mai ales în domenii nemărginite), vezi R. Duffin și W. Noll [1]; M. Gurtin [3]; M. Gurtin și E. Sternberg [2].

Pentru dependența soluției în raport cu domeniul și proprietățile materialului, vezi încă lucrările lui I. Babuška (pe scurt rezumate în [2]), J. Bramble și L. Payne [5], și V. Palmov [5]. Pentru indicații asupra proprietăților soluțiilor în prezența forțelor concentrate, a se vedea indicațiile din § 2.1, pag. 65.

Dacă $F \neq 0$, dar nu există forțe de volum concentrate, trebuie să admitem $F \in C^0(\mathcal{V})$ — ceea ce este evident necesar din considerente mecanice.

Soluția particulară a ecuațiilor (15) este în acest caz construită cu ajutorul unor potențiali newtonieni de volum (2.19), ceea ce nu mai conduce în mod obligatoriu la funcții analitice.

Mărginindu-ne la cazul $F = 0$, din proprietatea de analiticitate rezultă că dacă o parte (de volum nenul) a corpului \mathcal{V} este în stare naturală, atunci întreg corpul este în stare naturală. (În cazul plan, analiticitatea soluției duce la proprietăți suplimentare : vezi N. Mushelişvili [5], § 37.)

Din cele de mai sus nu rezultă că ecuațiile lui Lamé posedă *numai* soluții analitice — ci doar că, *dacă* în anumite condiții aceste ecuații au soluții de clasă C^2 , atunci soluțiile se dovedesc în fapt a fi analitice. Chestiunea de a ști dacă astfel de soluții există și sînt de clasă C^2 aparține desigur domeniului teoremelor de existență.

În cele ce urmează, ne vom limita la a considera numai soluții analitice, exceptînd eventual prezența unor puncte singulare izolate.

Cu anumite precauțiuni, rezultatele de mai sus pot fi extinse la cazul prezenței de singularități (de ex. : date la limită discontinue).

Toate reprezentările prin potențiali de deplasare se deosebesc avantajos de cele prin potențiali de tensiune (Maxwell, Morera), datorită simplității ecuațiilor pe care potențialii le verifică. Toate aceste reprezentări separă din vectorul u o componentă B sub formă întreagă, și prin aceasta se deosebesc avantajos de reprezentarea lui Kelvin (3.2), (3.6). Întrucît ele conduc la ecuații Laplace (sau Poisson), ele se dovedesc în practică considerabil mai eficace decît reprezentările prin funcții *bi*-armonice (de tip Galerkin, și altele).

d) Cazul problemei plane; cazul dinamic

Variantele plane ale acestor reprezentări se obțin cu ușurință.

Expresia (14) rămîne desigur valabilă în \mathcal{L}_2 . Efectuînd calculele în (16) (pentru $j = 1, 2$) și amintind notația (6.7.13) pentru $\kappa = 3 - 4\nu$ (deformație plană), obținem

$$\begin{aligned} 4(1 - \nu) u_1 &= \kappa B_1 - B_{0,1} - x_1 B_{1,1} - x_2 B_{2,1}, \\ 4(1 - \nu) u_2 &= \kappa B_2 - B_{0,2} - x_1 B_{1,2} - x_2 B_{2,2}. \end{aligned} \quad (22)$$

Pe de altă parte notînd $\varphi = p + iq$, $\psi = r + it$, și separînd părțile reală și imaginară în (6.7.12), căpătăm

$$\begin{aligned} 2\mu u_1 &= \kappa p - r - x_1 p_{,1} - x_2 q_{,1}, \\ 2\mu u_2 &= \kappa q + t - x_2 p_{,1} + x_1 q_{,1}. \end{aligned} \quad (23)$$

Înmulțind (22) cu μ și (23) cu $2(1 - \nu)$ și egalînd relațiile, deducem

$$\begin{aligned} 2(1 - \nu) [\kappa p - r - x_1 p_{,1} - x_2 q_{,1}] &= \mu [\kappa B_1 - B_{0,1} - x_1 B_{1,1} - x_2 B_{2,1}], \\ 2(1 - \nu) [\kappa q + t - x_2 p_{,1} + x_1 q_{,1}] &= \mu [\kappa B_2 - B_{0,2} - x_1 B_{1,2} - x_2 B_{2,2}]. \end{aligned} \quad (24)$$

Ținând seama de ecuațiile lui Cauchy-Riemann și de faptul că funcția B_0 este armonică, aceste relații rezultă verificate dacă alegem

$$p = \frac{\mu}{2(1-\nu)} B_1, \quad q = \frac{\mu}{2(1-\nu)} B_2, \quad r = \frac{\mu}{2(1-\nu)} B_{0,1}, \quad t = \frac{-\mu}{2(1-\nu)} B_{0,2}, \quad (25)$$

astfel că reprezentarea lui Kolosov și Mushelișvili se obține din cea a lui Grodskii dacă luăm

$$\varphi(\zeta) = p + iq = \frac{\mu}{2(1-\nu)} (B_1 + iB_2), \quad \psi(\zeta) = r + it = \frac{\mu}{1-\nu} B_{0,\delta}. \quad (26)$$

Un raționament similar poate fi construit pentru reprezentarea lui Capildeo și Milne-Thomson.

Pentru cazul *dinamic*, ne mărginim la a menționa că există reprezentări în parte analoge celor ale lui Grodskii și Korn (vezi de ex. L. Solomon [2]) — dar totuși problema elasto-dinamicii rămâne dominată de reprezentarea lui Clebsch, examinată la finele § 3. Toate aceste reprezentări exprimă deplasările prin potențiali ce satisfac ecuația propagării undelor. Pentru informații, vezi articolul de sinteză al lui E. Sternberg [3]. Vezi și E. Sternberg și M. Gurtin [1].

Problema reprezentării soluțiilor începe a fi studiată sub forme analoage și pentru corpuri care nu mai sînt elastice. Vezi, ca exemplu, W. Edelman și M. Gurtin [2].

§ 5. RELAȚII DE DEPENDENȚĂ ÎNTRE POTENȚIALII DE DEPLASARE. TEOREMA LUI EUBANKS ȘI STERNBERG

Chestiunea independenței funcțiilor B_1, B_2, B_3, B_0 s-a pus încă de mult. P. Papkovici [4], § 4.6, a încercat să demonstreze că (pentru $\nu \neq 0,25$) soluția generală este reprezentabilă prin intermediul vectorului \mathbf{B} . H. Neuber [2], § 3.6, afirmă că oricare din cele patru funcții poate fi neglijată. Problema a fost reluată de R. Mindlin [2] și M. Slobodianskii [1], inclusiv pentru alte reprezentări. O examinare critică a acestor din urmă rezultate a condus pe R. Eubanks și E. Sternberg [1] la rezultate privind reprezentarea lui Grodskii

$$\mathbf{u} = \mathbf{B} - \frac{1}{4} (1-\nu)^{-1} \text{grad} (\mathbf{x} \cdot \mathbf{B} + B_0), \quad (1)$$

unde, în absența forțelor de volum, avem

$$\Delta \mathbf{B} = 0, \quad \Delta B_0 = 0. \quad (2)$$

Presupunerea geometrică fundamentală este aceea că domeniul \mathcal{V} este *stelat* cel puțin în raport cu un punct al său : există un punct cu proprietatea că segmentul ce îl unește cu orice alt punct al domeniului, este în întregime conținut în domeniu. În particular, acesta este cazul pentru orice domeniu *convex* (care este stelat în raport cu *orice* punct al său).

Scopul raționamentului este de a se demonstra că, dacă originea este aleasă într-un punct în raport cu care \mathcal{V} e stelat, și dacă $\nu \neq 0,25$, atunci vectorul u admite și reprezentarea prin trei potențiali armonici

$$u = A - \frac{1}{4}(1 - \nu)^{-1} \text{grad}(x \cdot A), \quad \Delta A = 0. \quad (3)$$

Pentru aceasta, este suficient să se demonstreze că vectorul

$$v = -\frac{1}{4}(1 - \nu)^{-1} \text{grad} B_0, \quad \Delta B_0 = 0, \quad (4)$$

admite reprezentarea

$$v = C - \frac{1}{4}(1 - \nu)^{-1} \text{grad}(x \cdot C), \quad \Delta C = 0; \quad (5)$$

într-adevăr, introducând v din (5) în (1) și notînd $B + C = A$, se obține reprezentarea dorită (3).

Dacă relațiile (4) și (5) sînt adevărate, avem

$$\text{grad} B_0 = -\alpha C + \text{grad}(x \cdot C), \quad (6)$$

unde am notat

$$\alpha = 4(1 - \nu), \quad 2 < \alpha < 4. \quad (7)$$

Aplicînd în ambii membri din (6) operatorul rot, deducem

$$\text{rot} C = 0. \quad (8)$$

Dacă vectorul C definit de (5) există, atunci el e armonic, deci analitic, și urmează că există un scalar f așa fel ca

$$C = \text{grad} f \quad (9)$$

(vezi N. Kocin [1], § 16). Introducînd acum (9) în (6), obținem

$$\text{grad}(x \cdot \text{grad} f) - \alpha \text{grad} f = \text{grad} B_0,$$

sau încă, integrînd

$$x \cdot \text{grad} f - \alpha f = B_0 + c_1, \quad c_1 = \text{const}. \quad (10)$$

Pe de altă parte, aplicînd în (9) operatorul lui Laplace, deducem (utilizînd $\Delta C = 0$) că $\text{grad} \Delta f = 0$, de unde după integrare :

$$\Delta f = c_2, \quad c_2 = \text{const}. \quad (11)$$

Deci, dacă reprezentarea (5) este realizată, trebuie să existe o soluție analitică f a sistemului (10), (11). Reciproc, dacă există soluția analitică a acestui sistem, atunci din (4), (10), (11) urmează

$$v = -\frac{1}{4}(1 - \nu)^{-1} \text{grad} B_0 = \text{grad}(f - \alpha^{-1} x \cdot \text{grad} f). \quad (12)$$

Atunci, dacă vom defini C prin (9) și vom introduce (9) în (12), vom avea

$$v = C - \alpha^{-1} \operatorname{grad} (x \cdot C).$$

Totodată, în virtutea ecuației (11) vom avea și

$$\operatorname{grad} \Delta f = \Delta C = 0,$$

astfel că reprezentarea (5) este o consecință a existenței soluției analitice f a sistemului (10), (11). Problema este astfel redusă la a dovedi că, în condițiile date, sistemul considerat are soluție analitică.

Observând că din (2.6) urmează

$$R_{,j} = x_j / R, \quad x \cdot \operatorname{grad} f = x_j f_{,j} = R f_{,R}, \quad (13)$$

și incluzînd constanta c_1 în B_0 , vom pune (10), (11) sub forma

$$R f_{,R} - \alpha f = B_0, \quad \Delta f = c_2. \quad (14)$$

Întrucît avem evident $(R^{-\alpha} f)_{,R} = -\alpha R^{-\alpha-1} f + R^{-\alpha} f_{,R}$, deducem că prima ecuație (14) ia forma

$$(R^{-\alpha} f)_{,R} = R^{-\alpha-1} B_0. \quad (15)$$

Să transcriem în coordonate sferice (2.5) toate funcțiile ce intervin aci. Întrucît B_0 este armonică în \mathcal{V} , ea este reprezentabilă prin seria

$$B_0 = \sum_{n=0}^{\infty} R^n Y_n(\theta, \varphi), \quad (16)$$

care converge uniform în orice vecinătate sferică a originii conținută în \mathcal{V} (vezi § 2, pct. d). Introducînd (16) în (15), vom separa în membrul al doilea termenii ce rămîn mărginiți, și termenii ce tind către infinit pentru $R \rightarrow 0$. Notînd (*numai* în acest paragraf) cu $[N]$ pe cel mai mare întreg cuprins în N , vom scrie

$$B_0 = B_{01} + B_{02}, \quad (17)$$

unde

$$B_{01} = \sum_{n=0}^{[\alpha+1]} R^n Y_n, \quad B_{02} = \sum_{n=[\alpha+2]}^{\infty} R^n Y_n, \quad (18)$$

cea de a doua dezvoltare fiind valabilă *numai* într-o vecinătate a originii conținută în \mathcal{V} .

Funcția B_{01} este suma unui număr finit (de trei sau patru) funcții armonice. Prin urmare, ea este de asemenea armonică. Din faptul că B_0 este prin ipoteză armonică, rezultă deci că și B_{02} posedă aceeași proprietate în \mathcal{V} .

Introducînd (17), (18) în ecuația (15), o vom transcrie acum sub forma

$$(R^{-\alpha} f)_{,n} = \sum_{n=0}^{[\alpha+1]} R^{n-\alpha-1} Y_n + R^{-\alpha-1} B_{02}. \quad (19)$$

Pentru a găsi de aci funcția f , este suficient să determinăm o primitivă a acestei expresii în raport cu R ; domeniul \mathcal{V} fiind stelat în raport cu originea, orice integrală în raport cu R folosită pentru a găsi o astfel de primitivă are o limită superioară determinată. Pentru a efectua calculele necesare, observăm mai întîi că dezvoltarea în serie (valabilă în vecinătatea originii)

$$R^{-\alpha-1} B_{02} = \sum_{n=[\alpha+2]}^{\infty} R^{n-\alpha-1} Y_n(\theta, \varphi) \quad (20)$$

cuprinde numai puteri pozitive ale lui R . În virtutea faptului că seria (16) converge uniform, de aci rezultă

$$\lim_{R \rightarrow 0} R^{-\alpha-1} B_{02} = 0, \quad (21)$$

și prin urmare integrala

$$\int_0^R B_{02} \rho^{-\alpha-1} d\rho \quad (22)$$

este convergentă, și are o valoare deplin determinată.

Pe de altă parte, calculînd o primitivă pentru suma celor trei sau patru termeni ce apar în B_{01} , avem

$$\int B_{01} \rho^{-\alpha-1} d\rho = \int \sum_{n=0}^{[\alpha+1]} \rho^{n-\alpha-1} Y_n d\rho = \sum_{n=0}^{[\alpha+1]} (n-\alpha)^{-1} R^{n-\alpha} Y_n. \quad (23)$$

Din (19), (22) și (23) căpătăm mai întîi valoarea $R^{-\alpha} f$, de unde

$$f = \sum_{n=0}^{[\alpha+1]} (n-\alpha)^{-1} R^n Y_n + R^\alpha \int_0^R \sum_{n=[\alpha+2]}^{\infty} \rho^{-\alpha-1} B_{02} d\rho, \quad (24)$$

astfel că funcția f (care verifică (19), și deci și prima ecuație (14)) este determinată, dacă se cunoaște dezvoltarea lui B_0 în serie de funcții sferice.

Relația (24) are sens numai dacă $n \neq \alpha$, de unde deducem că singura valoare interzisă este $\nu = 0,25$. Rezultatul coincide cu cel prevăzut de P. Papkovici.

Rămîne de arătat că funcția din (24) verifică și a doua ecuație (14). Întrucît pentru $\nu \neq 0,25$ prima sumă din (24) este evident armonică, rămîne de calculat laplasianul expresiei

$$g = R^\alpha \int_0^R B_{02} \rho^{-\alpha-1} d\rho. \quad (25)$$

Să punem operatorul lui Laplace din (2.8) sub forma

$$\Delta = \frac{1}{R^2} \left[\frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \frac{\partial}{\partial R} \right) + \mathfrak{R} \right], \quad \mathfrak{R} = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}. \quad (26)$$

Din (25) căpătăm mai întâi

$$g_{,R} = \alpha R^{\alpha-1} \int_0^R B_{02} \rho^{-\alpha-1} d\rho + R^\alpha R^{-\alpha-1} B_{02} = R^{-1} (\alpha g + B_{02}),$$

de unde urmează

$$(R^2 g_{,R})_{,R} = (\alpha R g + R B_{02})_{,R} = (\alpha + 1) (\alpha g + B_{02}) + R B_{02,R}. \quad (27)$$

Mai departe, întrucît operatorul \mathfrak{R} nu depinde de R , avem și

$$\mathfrak{R} g = \mathfrak{R} \left(R^\alpha \int_0^R \rho^{-\alpha-1} B_{02} d\rho \right) = R^\alpha \int_0^R \rho^{-\alpha-1} \mathfrak{R} B_{02} d\rho. \quad (28)$$

Or, întrucît B_{02} este o funcție armonică, din (26) deducem

$$\mathfrak{R} B_{02} = - (R^2 B_{02,R})_{,R},$$

astfel că (28) devine

$$\mathfrak{R} g = - R^\alpha \int_0^R \rho^{-\alpha-1} (\rho^2 B_{02,\rho})_{,\rho} d\rho. \quad (29)$$

Integrînd aci prin părți, avem pe rînd

$$\begin{aligned} \int_0^R \rho^{-\alpha-1} (\rho^2 B_{02,\rho})_{,\rho} d\rho &= \rho^{-\alpha-1} \rho^2 B_{02,\rho} \Big|_0^R - \int_0^R \rho^2 B_{02,\rho} (-\alpha-1) \rho^{-\alpha-2} d\rho = \\ &= \rho^{-\alpha+1} B_{02,\rho} \Big|_0^R + (\alpha+1) \int_0^R \rho^{-\alpha} B_{02,\rho} d\rho. \end{aligned} \quad (30)$$

Ținînd seama aci de valoarea B_{02} din (18), obținem

$$\rho^{-\alpha+1} B_{02,\rho} \Big|_{\rho=0} = \sum_{n=[\alpha+2]}^{\infty} n \rho^{n-\alpha} Y_n \Big|_{\rho=0} = 0,$$

astfel că (30) devine

$$\int_0^R \rho^{-\alpha-1} (\rho^2 B_{02,\rho})_{,\rho} d\rho = R^{-\alpha+1} B_{02,R} + (\alpha+1) \int_0^R \rho^{-\alpha} B_{02,\rho} d\rho. \quad (31)$$

În integrala din membrul al doilea și în suma dinaintea ei, exponenții sînt pozitivi, integrala este deci convergentă, și integrarea prin părți are sens. Integrînd mai departe prin părți în (31), obținem (vezi și (30)) :

$$\int_0^R \rho^{-\alpha} B_{02,\rho} d\rho = \rho^{-\alpha} B_{02} \Big|_0^R + \alpha \int_0^R \rho^{-\alpha-1} B_{02} d\rho. \quad (32)$$

Integrala din membrul al doilea din (32) apare și în expresia (25) care definește pe g . Din (20) și (21) știm că ea e convergentă, și chiar că

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} (\rho^{-\alpha} B_{02}) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \rho(\rho^{-\alpha-1} B_{02}) = 0, \quad (33)$$

astfel că (32) se reduce la

$$\int_0^R \rho^{-\alpha} B_{02,\rho} d\rho = R^{-\alpha} B_{02} + \alpha \int_0^R \rho^{-\alpha-1} B_{02} d\rho. \quad (34)$$

Putem introduce acum (34) în (31), și rezultatul astfel obținut, în (29). Ținînd din nou seama de (18) și (25), căpătăm

$$\mathfrak{R}g = -R^\alpha \left\{ \sum_{n=[\alpha+2]}^{\infty} n R^{n-\alpha} Y_n + (\alpha+1) R^{-\alpha} B_{02} + \alpha(\alpha+1) \int_0^R \rho^{-\alpha-1} B_{02} d\rho \right\},$$

de unde

$$\mathfrak{R}g = -\{RB_{02,R} + (\alpha+1) B_{02} + \alpha(\alpha+1) g\}, \quad (35)$$

așadar o cantitate egală și de semn contrar cu cea din (27). Introducînd acum (27) și (35) în (26), deducem mai întîi că $R^2 \Delta g = 0$. Dar ținînd seama de expresiile (18) și (25) în (27) și (35), precum și de faptul că $\alpha > 2$, rezultă că putem împărți peste tot la R^2 , astfel că găsim

$$\Delta g = 0. \quad (36)$$

Amintind încă structura expresiei (24), avem în definitiv

$$\Delta f = 0, \quad (37)$$

și deci funcția f , soluție (analitică) a celei dintîi dintre ecuațiile (14), o satisface și pe cea de a doua (pentru $c_2 = 0$).

Cu aceasta, este demonstrată posibilitatea reprezentării (3) prin intermediul a numai *trei* potențiali armonici.

Cazul de excepție $\nu = 0,25$ nu derivă din tehnica demonstrației, ci din natura problemei. Într-adevăr, Eubanks și Sternberg dau un contra-exemplu, din care urmează că pentru $\nu = 0,25$ și $B_0 = R^3 Y_3$, soluția sistemului (14) nu este analitică în origine.

Menționăm încă faptul că pentru \mathcal{V} *convex*, se demonstrează (loc. cit.) că se poate renunța la oricare din componentele lui B (independent de valoarea lui ν).

Aceste rezultate au fost ulterior reluate de P. Naghdi și C. Hsu [1], care au demonstrat că pentru orice domeniu \mathcal{V} regulat în sensul lui O. Kellog ([1], § 4.8), eventual chiar multiplu conex, și pentru orice valoare $\nu \in \left] -1, \frac{1}{2} \right[$, avem reprezentarea

$$u = B - \frac{1}{2} (1 - \nu)^{-1} b, \quad (38)$$

$$\Delta B = -\mu^{-1} F, \quad b = -(1/4 \pi) \operatorname{grad} \iiint_{\mathcal{V}} R^{-1} \operatorname{div} B \, dV,$$

așadar o reprezentare prin intermediul a *trei* funcții. O modificare a acestei formule rămâne valabilă și pentru $\nu = \frac{1}{2}$. Rezultatul lui Naghdi și Hsu este mai general, și cuprinde și cazul $F \neq 0$. Dar el face uz de descompunerea lui Stokes $u = v + w$, cu $\operatorname{div} v = 0$, $w = \operatorname{grad} \varphi$, iar raționamentele, deși mai scurte, sînt mai puțin directe decît cele ale lui Eubanks și Sternberg.

OBSERVAȚIE. Toate acestea nu trebuie să dea impresia că ar fi bine să se caute soluția prin intermediul a *trei* potențiali. Dimpotrivă, încă P. Papkovici [3] a sugerat, și A. Lurie (vezi mai departe §§ 8.3; 8.4; 9.4) a utilizat cu succes ideea de a se păstra pentru început în raționamente toate cele *patru* funcții ale lui Grodskii, folosindu-se faptul că ele nu sînt independente abia în momentul în care aceasta duce la simplificări esențiale.

§ 6. PROPRIETĂȚI DE RECIPROCITATE ALE OPERATORULUI LUI LAMÉ

Să reluăm sistemul complet de ecuații pentru corpuri eventual anizotrope și ne-omogene (vezi § 4.1) sub forma

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}), \quad (1)$$

$$\sigma_{ij,j} + F_i = 0, \quad (2)$$

$$\sigma_{ij} = c_{ij}^{hk} \varepsilon_{hk}, \quad (3)$$

și să amintim forma (4.8.3) a ecuațiilor lui Lamé

$$\mathfrak{U}u = F, \quad (4)$$

unde operatorul lui Lamé \mathfrak{U} are expresia, echivalentă cu (4.8.4),

$$[c_{ij}^{hk} \varepsilon_{hk}(u)]_{,j} i_i + F = 0. \quad (5)$$

Comparînd (4) cu (2.33), vom pune în evidență un anumit paralelism între operatorii \mathfrak{U} și $-\Delta$.

Să începem prin a stabili analogul formulelor lui Green (2.10) — (2.12). În acest scop, să considerăm doi vectori $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in C^2(\mathcal{V})$, unde \mathcal{V} este mărginit, și să calculăm valoarea integralei ⁴⁾

$$\langle \mathbf{v}, \mathfrak{A} \mathbf{u} \rangle = \iiint_{\mathcal{V}} \mathbf{v} \cdot \mathfrak{A} \mathbf{u} \, dV. \quad (6)$$

Pentru produsul scalar $\mathbf{v} \cdot \mathfrak{A} \mathbf{u}$ avem imediat din (4), (5):

$$\mathbf{v} \cdot \mathfrak{A} \mathbf{u} = -v_i [c_{ij}^{hk} \varepsilon_{hk}(\mathbf{u})]_{,j}, \quad (7)$$

de unde, integrând cu ajutorul formulei lui Gauss-Ostrogradskii (2.9):

$$\langle \mathbf{v}, \mathfrak{A} \mathbf{u} \rangle = - \iint_{\mathcal{S}} v_i c_{ij}^{hk} \varepsilon_{hk}(\mathbf{u}) n_j \, dS + \iiint_{\mathcal{V}} c_{ij}^{hk} \varepsilon_{hk}(\mathbf{u}) v_{i,j} \, dV. \quad (8)$$

Or, din (1.5.6) avem evident

$$v_{i,j} = \varepsilon_{ij}(\mathbf{v}) + \omega_{ij}(\mathbf{v}). \quad (9)$$

Ținând seama de (3) și (2.3.3), integrandul din integrala de suprafață din (8) se scrie sub forma

$$v_i c_{ij}^{hk} \varepsilon_{hk}(\mathbf{u}) n_j = v_i \sigma_{ij}(\mathbf{u}) n_j = v_i \sigma_{ni}(\mathbf{u}) = \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\sigma}_n(\mathbf{u}), \quad (10)$$

unde $\boldsymbol{\sigma}_n(\mathbf{u})$ este dat de (1.9). În integrala de volum din membrul al doilea din (8), ținând seama de (9), de proprietățile de simetrie ale coeficienților c_{ij}^{hk} , și de faptul că matricea ω_{ij} este antisimetrică, obținem

$$c_{ij}^{hk} \varepsilon_{hk}(\mathbf{u}) v_{i,j} = c_{ij}^{hk} \varepsilon_{hk}(\mathbf{u}) \varepsilon_{ij}(\mathbf{v}). \quad (11)$$

În virtutea legii lui Hooke (3) și a proprietăților de simetrie ale coeficienților c_{ij}^{hk} , această formă biliniară poate fi scrisă în două variante:

$$c_{ij}^{hk} \varepsilon_{hk}(\mathbf{u}) \varepsilon_{ij}(\mathbf{v}) = \begin{cases} \sigma_{ij}(\mathbf{u}) \varepsilon_{ij}(\mathbf{v}), \\ \sigma_{hk}(\mathbf{v}) \varepsilon_{hk}(\mathbf{u}). \end{cases} \quad (12)$$

Ambele forme amintesc de expresia (3.7.11) a energiei de deformație ($2\Phi = \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}$), dar se deosebesc de ea prin faptul că aci apar produse contractate de tensori ce corespund la vectori deplasare *diferiți*. Vom nota de aceea

$$2\Phi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sigma_{ij}(\mathbf{u}) \varepsilon_{ij}(\mathbf{v}). \quad (13)$$

Această formă se numește *energia unitară a tensiunilor stării \mathbf{u} , acționând în câmpul deformațiilor stării \mathbf{v}* . Această cantitate are dimensiuni-

⁴⁾ Este limpede că acesta este un *produs scalar în sensul teoriei spațiilor Hilbert*. Mai mult, în spațiul asociat de K. Friedrichs problemei (4), acesta este pur și simplu produsul scalar $[\mathbf{u}, \mathbf{v}]$. Vezi de exemplu S. Mihlin [4], §§ 4.26 și 6.46.

nile energiei (sau lucrului mecanic), dar e alcătuită, hibrid, din date relative la *două* stări elastice distincte ale aceluiași corp. În particular, (3.7.11) se va scrie acum $2\Phi(u, u)$. Relația (12) arată că *forma biliniară* Φ este simetrică:

$$\Phi(u, v) = \Phi(v, u). \quad (14)$$

Forma Φ , ca și relația (14), au fost considerate de E. Betti [2]. Rezultate mai generale, dar de același tip, aparțin lui I. Fredholm [1].

Ținând acum seama în (8) de rezultatele din (10)–(12) și de notația (13), obținem *prima formulă a lui Betti*:

$$\langle v, \mathfrak{A}u \rangle = 2 \iiint_{\mathcal{V}} \Phi(u, v) dV - \iint_{\mathcal{S}} v \cdot \sigma_n(u) dS, \quad (15)$$

analogă cu prima formulă a lui Green (2.1): operatorul $-\Delta$ este înlocuit cu \mathfrak{A} , forma biliniară și simetrică ($\text{grad } u \cdot \text{grad } v$) este înlocuită cu $2\Phi(u, v)$, iar derivata normală $u_{,n}$ — cu vectorul tensiune $\sigma_n(u)$.

Mai departe, luând $u = v$ în (15), obținem *a doua formulă a lui Betti*, analogă cu (2.11):

$$\langle u, \mathfrak{A}u \rangle = 2 \iiint_{\mathcal{V}} \Phi(u, u) dV - \iint_{\mathcal{S}} u \cdot \sigma_n(u) dS. \quad (16)$$

În fine, intervertind u cu v în (15) și scăzând termen cu termen relația astfel obținută din relația (15), deducem, în virtutea relației (14), cea de *a treia formulă a lui Betti*, analogă cu (2.12):

$$\langle u, \mathfrak{A}v \rangle - \langle v, \mathfrak{A}u \rangle = \iint_{\mathcal{S}} [v \cdot \sigma_n(u) - u \cdot \sigma_n(v)] dS. \quad (17)$$

OBSERVAȚIA 1. Ca și formulele lui Green, formulele lui Betti nu sînt legate de proprietățile domeniului \mathcal{V} (în afară de cele pretinse de aplicarea teoremei Gauss-Ostrogradskii), nici de cele ale vectorilor u, v (în afară de apartenența lor la clasa C^2). Ele informează doar asupra unor proprietăți ale *operatorului lui Lamé*, permițînd trecerea ulterioară la studiul proprietăților soluțiilor *ecuațiilor lui Lamé*.

Totuși, notăm aci un rezultat foarte sugestiv, datorat lui C. Truesdell [8]: dacă formulele lui Betti sînt *identice* valabile pentru *orice* pereche de deplasări infinitezimale u și v într-un corp, atunci acest corp este hiperelastice.

Formule similare apar în studiul mișcării fluidelor viscoase (vezi C. Iacob [5], § 4.46).

OBSERVAȚIA 2. Formulele lui Betti rămîn valabile pentru domenii *nemărginite*, dacă u, v satisfac la infinit condiții de regularitate analoge cu (2.13):

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R |u| \leq C, \quad \lim_{R \rightarrow \infty} R^2 |\sigma_n(u)| \leq C. \quad (18)$$

Pentru detalii, vezi M. Gurtin și E. Sternberg [2]. În particular, se vede ușor că dacă funcțiile lui Grodskii sînt regulate la infinit în sensul din (2.13), atunci vectorul deplasare corespunzător este regulat în sensul din (18).

§ 7. TEOREMELE LUI BETTI

Să presupunem acum că u, v sînt soluții diferite ale anumitor ecuații Lamé, corespunzînd unor forțe de volum $F_{(u)}, F_{(v)}$, unor forțe superficiale $f_{(u)}, f_{(v)}$ — dar *aceluiași* domeniu \mathcal{V} și *acelorași* constante elastice. Vom scrie deci

$$\mathfrak{A} u = F_{(u)}, \quad \mathfrak{A} v = F_{(v)}. \quad (1)$$

Proprietățile operatorului \mathfrak{A} puse în evidență în § 6, conduc la proprietăți ale stărilor elastice corespunzătoare vectorilor u, v . Obținem pe rînd:

a) **Teorema lui Betti (forma locală)**: energia potențială (unitară) de deformare corespunzătoare tensiunilor stării u acționînd în câmpul deformațiilor stării v , este egală cu energia corespunzătoare tensiunilor stării v acționînd în câmpul deformațiilor stării u .

Teorema exprimă pur și simplu conținutul relației de simetrie (6.14).

b) **Teorema lucrului forțelor exterioare**: lucrul mecanic formal total al forțelor exterioare ale stării u acționînd în câmpul deplasărilor stării v , este egal cu dublul energiei potențiale totale formal acumulate.

Pentru a explica acest enunț, să considerăm valorile

$$\mathfrak{A} u = F_{(u)}, \quad \sigma_n(u)|_{\mathcal{S}} = f_{(u)}. \quad (2)$$

Introducînd (2) în (6.15) și ținînd seama de (6.6), obținem:

$$\iiint_{\mathcal{V}} v \cdot F_{(u)} dV + \iint_{\mathcal{S}} v \cdot f_{(u)} dS = 2 \iiint_{\mathcal{V}} \Phi(u, v) dV. \quad (3)$$

În membrul al doilea apare energia potențială totală (adică integrată pe \mathcal{V}), formal definită cu ajutorul relației (6.13). În primul membru din (3) apare un hibrid de același tip, și anume un lucru mecanic total formal, care se va nota

$$\mathfrak{L}(u, v) = \iiint_{\mathcal{V}} v \cdot F_{(u)} dV + \iint_{\mathcal{S}} v \cdot f_{(u)} dS. \quad (4)$$

Relația (3), transcrisă cu ajutorul lui (4), dă tocmai enunțul teoremei.

c) **Teorema lui Betti (forma globală)**: lucrul mecanic formal total al forțelor exterioare ale stării u acționînd în câmpul deplasărilor stării v , este egal cu lucrul mecanic formal total al forțelor exterioare ale stării v , acționînd în câmpul deplasărilor stării u .

Într-adevăr, din (6.14), (3) și (4) urmează imediat

$$\mathfrak{L}(u, v) = \mathfrak{L}(v, u). \quad (5)$$

d) **Teorema lui Clapeyron**: lucrul mecanic total al forțelor exterioare acționînd în câmpul deplasărilor *static* corespunzătoare lor, este egal cu dublul energiei potențiale *real* acumulate în corpul elastic.

Aceasta se deduce imediat dacă luăm $u = v$ în (3), (4):

$$\mathfrak{L}(u, u) = 2 \iiint_{\mathcal{V}} \Phi(u, u) dV. \quad (6)$$

În expresia lucrului mecanic $\mathfrak{L}(\mathbf{u}, \mathbf{u})$ (vezi (4)), deplasările \mathbf{u} sînt cele ce corespund forțelor $\mathbf{F}_{(u)}$ și $\mathbf{f}_{(u)}$ prin intermediul ecuațiilor echilibrului elastic. Apariția factorului 2 în (6) se explică prin aceea că forma (6.13) pentru $\mathbf{u} = \mathbf{v}$ a fost obținută prin integrarea formei diferențiale $\delta\Phi = \sigma_{ij} \delta\varepsilon_{ij}$ din (3.6.6), așadar ținînd implicit seama de creșterea deformației de la zero la valoarea sa finală, în cadrul ipotezei dependenței liniare între tensiuni și deformații. Dimpotrivă, lucrul mecanic $\mathfrak{L}(\mathbf{u}, \mathbf{u})$ se obține înmulțind scalar forțele $\mathbf{F}_{(u)}$ și $\mathbf{f}_{(u)}$ cu deplasările \mathbf{u} ce le corespund *static* — așadar la *finele* procesului de deformație — în timp ce lucrul mecanic *realmente* cheltuit de forțele exterioare ar trebui calculat prin înmulțirea acestor forțe cu valori \mathbf{u} ale deplasării ce *cresc în timp* de la zero la valorile lor finale, și prin integrarea în raport cu timpul a cantității astfel deduse.

Acest raționament subliniază caracterul *formal* al mărimii $\mathfrak{L}(\mathbf{u}, \mathbf{u})$, spre deosebire de cel *real* al mărimii $\iiint_{\mathcal{V}} \Phi(\mathbf{u}, \mathbf{u}) dV$. Dacă am presupune că deplasarea crește în primă aproximație ca funcție *liniară* de timp de la 0 la \mathbf{u} , va rezulta și intuitiv că lucrul mecanic real al forțelor exterioare trebuie să fie egal cu $\frac{1}{2} \mathfrak{L}(\mathbf{u}, \mathbf{u})$.

Sub forma lor inițială, aceste teoreme aparțin lui E. Betti [1], [2]. Teorema lui Clapeyron — extrem de importantă în practică — este încă mai veche. (Asupra ei, vezi observațiile lui A. Clebsch și B. de Saint-Venant [1], nota la pag. 871 și 872.)

Toate aceste teoreme pot fi extinse la domenii \mathcal{V} nemărginite, cu respectarea condițiilor de regularitate. În mod evident, *ele sînt independente de proprietățile de omogenitate sau izotropie*, dar depind esențial de caracterul liniar al relațiilor cu care operăm. Astfel, ele au putut fi generalizate în elasto-dinamică, în visco-elasticitate, în termo-elasticitate etc. (Vezi de ex. D. Graffi [1]; V. Ionescu-Cazimir [1].)

§ 8. METODA SURSELOR. SOLUȚIA FUNDAMENTALĂ A ECUAȚIILOR LUI LAMÉ

Pentru a construi un analog al formulei integrale fundamentale (2.18), este necesară o soluție care să joace în teoria ecuațiilor lui Lamé, rolul soluției $1/4\pi R$ din teoria ecuației lui Poisson. Astfel de soluții au putut fi găsite pînă acum numai în două cazuri: pentru corpurile omogene și izotrope, și pentru cristalele sistemului exagonal (cu 5 constante elastice). Pentru cristalele din alte sisteme, se folosesc mijloace aproximative, reprezentîndu-se soluția fundamentală prin serii. (Vezi de ex. E. Kröner [1], [3]; A. Seeger [1], § 53.)

Teoria soluțiilor fundamentale și toate problemele ce derivă de aci sînt amănunțit studiate de C. Miranda [1]. În cazul ecuațiilor cu coeficienți constanți, problema este abordabilă sub o formă simplă și generală cu ajutorul teoriei distribuțiilor (vezi I. Ghelfand și G. Șilov [1], vol. 1, § 3.2).

Ne vom limita în cele ce urmează la cazul corpurilor *izotrope și omogene*.

Căutarea de soluții singulare va fi pusă în legătură cu interpretarea lor ca descriind unele acțiuni mecanice concentrate. Acesta este punctul de pornire al *metodei surselor*, împrumutate din hidrodinamică. Tehnica de lucru e similară celei amintite: punctul singular este izolat cu ajutorul unei suprafețe închise, și se studiază apoi din punct de vedere mecanic comportarea acestei suprafețe și a domeniului mărginit de ea, atunci când diametrul său tinde la zero. Ca și în hidrodinamică — unde se evaluează fluxul de fluid ce traversează suprafața care conține în interior punctul singular — în teoria elasticității sîntem conduși la a determina torsorul tensiunilor pe această suprafață, și valoarea sa limită, cînd suprafața se reduce la un punct.

a) Cîmpul deplasărilor singulare

Să presupunem deci spațiul \mathcal{E}_3 , ocupat de un material elastic *omogen și izotrop*. Forțele de volum sînt nule. Nu există condiții la limită, ci numai condiții de regularitate (6.18). În virtutea teoremei de unicitate, orice soluții ne-identice nule, regulate la infinit, și corespunzînd la forțe de volum nule, *trebuie să posede puncte singulare*.

Vom căuta — pe linia metodei inverse — o soluție care să aibă în origine o singularitate de cea mai simplă natură, și care înafara originii să fie regulată, așadar reprezentabilă sub forma (4.14), (4.15). Întrucît $F = 0$, avem

$$u = B - \frac{1}{4} (1 - \nu)^{-1} \text{grad } (x \cdot B + B_0), \quad (1)$$

unde funcțiile B , B_0 sînt armonice în \mathcal{E}_3 (cu excepția originii), și regulate la infinit. Să luăm $B_0 = 0$, și să căutăm vectorul B sub forma

$$B = Q \varphi, \quad (2)$$

unde Q este un vector constant, iar φ este un scalar armonic. Pentru φ , vom alege soluția fundamentală a ecuației lui Laplace (care posedă în origine și la infinit proprietățile cerute), înmulțită cu un factor de normare A necunoscut

$$\varphi = A/R. \quad (3)$$

Cu aceasta, soluția prezumată a problemei ia forma

$$u = A \left[Q/R - \frac{1}{4} (1 - \nu)^{-1} \text{grad } (x \cdot Q/R) \right], \quad R = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}. \quad (4)$$

În cele ce urmează, vom face de repetate ori uz de diferite relații simple de analiză vectorială (vezi de ex. N. Kocin [1], § 12; V. Smirnov [2], vol. 2, pct. 105 și 112). Ținînd seama că

$$\text{grad } (fg) = f \text{grad } g + g \text{grad } f, \quad (5)$$

deducem imediat

$$\text{grad } (x \cdot Q/R) = R^{-1} \text{grad } (x \cdot Q) + (x \cdot Q) \text{grad } R^{-1}; \quad (6)$$

întrucît Q este un vector constant, avem mai întâi

$$\text{grad } (x \cdot Q) = i_j (x_i Q_j)_{,j} = Q, \quad (7)$$

și pe de altă parte

$$\text{grad } R^{-1} = -R^{-2} \text{grad } R = -R^{-3} x; \quad (8)$$

de aci urmează

$$\text{grad } (x \cdot Q/R) = Q/R - (x \cdot Q) x/R^3. \quad (9)$$

Prin urmare, formula (4) se mai scrie și

$$u = \frac{1}{4} (1 - \nu)^{-1} A [(3 - 4\nu) Q/R + (x \cdot Q) x/R^3]. \quad (10)$$

Acesta va fi cel mai simplu câmp de deplasări, cu o singularitate în origine, și regulat înafara originii (inclusiv la infinit). Pentru a determina câmpul vectorilor tensiune corespunzători, vom aminti aci formula (1.9):

$$\sigma_n(u) = 2\mu \left[\nu (1 - 2\nu)^{-1} n \text{div } u + \frac{1}{2} n \times \text{rot } u + u_{,n} \right]. \quad (11)$$

Aceasta arată că avem de calculat expresiile $\text{div } u$, $\text{rot } u$, și $u_{,n}$ pentru vectorul u din (4) sau (10), construit cu ajutorul vectorilor Q/R și $(x \cdot Q)x/R^3$.

Amintind că avem

$$\text{div } (fv) = f \text{div } v + v \cdot \text{grad } f, \quad (12)$$

și ținînd seama de (8) și de faptul că Q este constant, urmează

$$\text{div } (Q/R) = -x \cdot Q/R^3. \quad (13)$$

Utilizînd (12), (7) și (8), și faptul că $\Delta R^{-1} = 0$ pentru $R \neq 0$, deducem

$$\begin{aligned} \text{div } [(x \cdot Q) x/R^3] &= -\text{div } [(x \cdot Q) \text{grad } R^{-1}] = - \\ &= -(\text{grad } R^{-1}) \cdot \text{grad } (x \cdot Q) = -x \cdot Q/R^3. \end{aligned} \quad (14)$$

Făcînd uz acum de (10), (13) și (14), deducem

$$\text{div } u = -\frac{1}{2} (1 - 2\nu) (1 - \nu)^{-1} A (x \cdot Q)/R^3. \quad (15)$$

Calculul cantității rot u este mai simplu. Pentru a o găsi, vom folosi expresia (4) a deplasării, și vom ține seama că

$$\text{rot grad } f = 0, \quad \text{rot}(f \mathbf{v}) = f \text{ rot } \mathbf{v} - \mathbf{v} \times \text{grad } f. \quad (16)$$

Cu aceasta, căpătăm mai întâi

$$\text{rot } u = A \text{ rot } (Q/R) \quad (17)$$

și apoi, utilizând (8), (16) și faptul că Q este constant :

$$\text{rot } u = A (Q \times \mathbf{x})/R^3. \quad (18)$$

Mai rămîne de calculat $u_{,n}$, pentru care vom face uz de formula

$$(f \mathbf{v})_{,n} = f_{,n} \mathbf{v} + f \mathbf{v}_{,n}. \quad (19)$$

Dat fiind că Q este constant, avem mai întâi

$$(Q/R)_{,n} = Q (R^{-1})_{,n} = -Q R^{-2} R_{,n}, \quad (20)$$

unde

$$R_{,n} = n_j R_{,j} = n_j x_j / R = \mathbf{n} \cdot \mathbf{x} / R, \quad (21)$$

astfel că

$$(Q/R)_{,n} = -(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}) Q / R^3. \quad (22)$$

Pe de altă parte, trebuie să calculăm derivata

$$[\mathbf{x}(\mathbf{x} \cdot Q)/R^3]_{,n} = (\mathbf{x} \cdot Q/R^3) \mathbf{x}_{,n} + \mathbf{x} [\mathbf{x} \cdot Q/R^3]_{,n}. \quad (23)$$

Or, utilizînd și (21), avem pe rînd :

$$\mathbf{x}_{,n} = n_j (\mathbf{i}_i x_i)_{,j} = n_j \delta_{ji} \mathbf{i}_i = \mathbf{n}; \quad (24)$$

$$(\mathbf{x} \cdot Q/R^3)_{,n} = (\mathbf{x} \cdot Q) (R^{-3})_{,n} + R^{-3} (\mathbf{x} \cdot Q)_{,n}; \quad (25)$$

$$(\mathbf{x} \cdot Q)_{,n} = Q \cdot \mathbf{x}_{,n} = \mathbf{n} \cdot Q; \quad (26)$$

$$(R^{-3})_{,n} = -3 R^{-4} R_{,n} = -3 (\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}) / R^5. \quad (27)$$

Cu aceasta, (23) devine

$$[(\mathbf{x} \cdot Q) \mathbf{x} / R^3]_{,n} = (\mathbf{x} \cdot Q) \mathbf{n} / R^3 + \mathbf{x} [-3 (\mathbf{x} \cdot Q) (\mathbf{x} \cdot \mathbf{n}) / R^5 + (\mathbf{n} \cdot Q) / R^3]. \quad (28)$$

Ținînd seama de (10), (22) și (28), deducem deci

$$\begin{aligned} u_{,n} = & \frac{A}{4(1-\nu)} \left[-(3-4\nu) \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}}{R^3} Q + \right. \\ & \left. + \frac{Q \cdot \mathbf{x}}{R^3} \mathbf{n} + \frac{Q \cdot \mathbf{n}}{R^3} \mathbf{x} - 3 \frac{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x})(Q \cdot \mathbf{x})}{R^5} \mathbf{x} \right]. \end{aligned} \quad (29)$$

Pentru a putea face uz de (11), ne mai rămîne să calculăm

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \mathbf{n} \times \operatorname{rot} \mathbf{u} &= \frac{1}{2} (A/R^3) [\mathbf{n} \times (\mathbf{Q} \times \mathbf{x})] = \\ &= \frac{1}{2} (A/R^3) [(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}) \mathbf{Q} - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{Q}) \mathbf{x}]. \end{aligned} \quad (30)$$

Introducînd acum (15), (29) și (30) în (11), obținem relația finală :

$$\begin{aligned} \sigma_n(\mathbf{u}) &= - \frac{\mu(1-2\nu)}{2(1-\nu)} \frac{A}{R^3} \left[-(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{x}) \mathbf{n} + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}) \mathbf{Q} + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{Q}) \mathbf{x} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{1-2\nu} \frac{1}{R^2} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}) (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{x}) \mathbf{x} \right]. \end{aligned} \quad (31)$$

Acesta este cîmpul vectorilor tensiune corespunzător cîmpului deplasărilor din (10). Condiția de regularitate la infinit este vizibil respectată.

b) Soluția fundamentală

Să trasăm acum o suprafață închisă \mathcal{S} care nu conține originea în interior. Întrucît (10) este aci o soluție regulată, torsorul tensiunilor ce acționează pe \mathcal{S} trebuie să fie egal și de semn opus cu cel al forțelor de volum acționînd în domeniul mărginit de \mathcal{S} — așadar egal cu zero. Argumentul își pierde valabilitatea dacă \mathcal{S} conține în interior originea.

În acest ultim caz, este vizibil că torsorul tensiunilor pe o suprafață \mathcal{S} nu depinde de forma acesteia. Într-adevăr, să considerăm două suprafețe \mathcal{S}' și \mathcal{S}'' fără puncte multiple, și dintre care a doua este conținută în interiorul celei dintîi. Torsorul tensiunilor ce iau naștere pe frontiera domeniului definit de \mathcal{S}' , \mathcal{S}'' este evident nul, astfel că

$$\iint_{\mathcal{S}'} \sigma_n dS - \iint_{\mathcal{S}''} \sigma_n dS = 0, \quad \iint_{\mathcal{S}'} \mathbf{x} \times \sigma_n dS - \iint_{\mathcal{S}''} \mathbf{x} \times \sigma_n dS = 0, \quad (32)$$

întrucît aci normala exterioară coincide cu normala exterioară la \mathcal{S}' , și cu cea interioară la \mathcal{S}'' , iar forțele de volum sînt nule. Raționamentul poate fi ușor extins la suprafețe care se intersectează, la suprafețe cu puncte multiple etc. Așadar, rezultanta și momentul resultant al tensiunilor considerate nu depinde de forma lui \mathcal{S} , și este cel mai ușor să le calculăm pe o sferă $S(0, R)$.

Întrucît pe sferă avem $\mathbf{n} = \mathbf{x}/R$, formula (31) poate fi mult simplificată. Făcînd înlocuirea $\mathbf{x} = R\mathbf{n}$, obținem

$$\sigma_n(\mathbf{u}) = - \frac{\mu(1-2\nu)}{2(1-\nu)} \frac{A}{R^2} \left[\mathbf{Q} + \frac{3}{1-2\nu} (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} \right] \quad \text{pe } S(0, R). \quad (33)$$

Rezultanta tensiunilor (33) pe această sferă este

$$\mathcal{R} = \iint_S \sigma_n(u) dS = \iint_S \sigma_n(u) R^2 dS_1 = R^2 \iint_S \sigma_n(u) dS_1, \quad (34)$$

unde am notat cu dS_1 elementul de arie pe sfera unitate S_1 cu centrul în origine. Întrucît avem $R = \text{const.}$, obținem

$$\mathcal{R} = - \frac{\mu(1-2\nu)}{2(1-\nu)} A \iint_{S_1} \left[Q + \frac{3}{1-2\nu} (Q \cdot n) n \right] dS_1. \quad (35)$$

După cum se vede, tocmai faptul că σ_n tinde spre infinit ca $1/R^2$ pentru $R \rightarrow 0$, dă integralei \mathcal{R} o valoare finită și independentă de R . De aceea integrala din (35) poate fi calculată pe sfera S_1 , și nu pe S .

Prima integrală din (35) se obține ușor sub forma

$$\iint_{S_1} Q dS_1 = Q \iint_{S_1} dS_1 = 4\pi Q. \quad (36)$$

Pentru a o găsi pe cea de a doua, să observăm că pe sfera S_1 avem $n = x$, și deci integrandul corespunzător este un vector de lungime $(Q \cdot x)$, dirijat după normala n . Scriind formula lui Gauss-Ostrogradskii (2.9) sub forma

$$\iiint_V \text{grad } f dV = \iint_S f n dS, \quad (37)$$

ceea ce se verifică ușor dacă separăm cele trei componente din (37), deducem din (37) și (7):

$$\iint_{S_1} (Q \cdot n) n dS_1 = \iiint_{B_1} \text{grad } (Q \cdot x) dV = \iiint_{B_1} Q dV = \frac{4}{3} \pi Q, \quad (38)$$

unde B_1 este bula de frontieră S_1 , al cărei volum este desigur $\frac{4}{3} \pi$.

Introducînd acum (36) și (38) în (35), obținem

$$\mathcal{R} = -4\pi \mu A Q, \quad (39)$$

ceea ce dă rezultanta tensiunilor pe orice suprafață închisă care conține originea în interior.

Momentul resultant al tensiunilor (33) față de origine este

$$\mathcal{M} = \iint_S x \times \sigma_n(u) dS = - \frac{\mu(1-2\nu)}{2(1-\nu)} A R \iint_{S_1} n \times \left[Q + \frac{3}{1-2\nu} (Q \cdot n) n \right] dS_1 \quad (40)$$

unde, ca și în (35), am ținut seama că $R = \text{const.}$ și că integrăm pe S_1 . Al doilea termen din integrandul din (40) este nul, iar pentru cel dintâi deducem pe S_1 :

$$\iint_{S_1} n \times Q \, dS_1 = - Q \times \iint_{S_1} x \, dS_1 = 0. \quad (41)$$

Prin urmare, momentul resultant (în raport cu originea) al tensiunilor pe *orice* suprafață care conține originea în interior, este nul.

Domeniul mărginit de o suprafață \mathcal{S} care conține în interior originea va fi în echilibru dacă și numai dacă în interiorul său, *oricât de mici ar fi dimensiunile lui*, acționează forțe al căror moment resultant față de origine este nul, și a căror resultantă este egală cu $-R = 4\pi\mu A Q$. Prin urmare, starea descrisă de (10) este realizată dacă considerăm spațiul elastic nemărginit, solicitat în origine de o forță concentrată $4\pi\mu A Q$, care face echilibru tensiunilor ce apar pe orice suprafață care conține în interior originea.

Prin „forță concentrată” se înțelege tocmai acțiunea mecanică definită prin acest proces de trecere la limită. Din punct de vedere practic, avem de-a face cu un sistem de tensiuni foarte mari, repartizate pe un domeniu de dimensiuni foarte mici, având momentul resultant față de origine nul, iar rezultanta finită și diferită de zero. (Compară cu § 2.1, pag. 65. Vezi și mai jos, Observația 3.)

Putem dispune în sfârșit de constanta încă nedeterminată A . Soluția obținută va corespunde acțiunii unei forțe concentrate Q , dacă avem

$$A = 1/4\pi\mu. \quad (42)$$

Așadar, pe calea unei metode inverse am obținut soluția ecuațiilor lui Lamé omogene pentru o forță concentrată Q în origine, sub forma

$$u = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)} \left[(3-4\nu) \frac{Q}{R} + \frac{Q \cdot x}{R^3} x \right]. \quad (43)$$

Vectorul (43) este *soluția fundamentală a ecuațiilor lui Lamé* și constituie analogul funcției $1/4\pi R$ din teoria ecuației lui Poisson. Rolul constantei (42) este analog celui al factorului $1/4\pi$ din teoria acestei din urmă ecuații.

Cîmpul vectorilor tensiune (31) se scrie acum sub forma definitivă

$$\begin{aligned} \sigma_n(u) = & -\frac{1-2\nu}{8\pi(1-\nu)} \frac{1}{R^3} \left[-(Q \cdot x) n + (n \cdot x) Q + (n \cdot Q) x + \right. \\ & \left. + \frac{3}{1-2\nu} \frac{1}{R^2} (n \cdot x) (Q \cdot x) x \right]. \end{aligned} \quad (44)$$

O soluție de tipul (43) a fost dată de lord Kelvin [1] (retipărit în [4], vol. 1). Ea a fost regăsită și utilizată de C. Somigliana [1] (vezi și [3]). Asupra semnificației sale au revenit E. și F. Cosserat [2], [3]. Vom numi această soluție — sau unele variante ale ei — *soluția lui Kelvin și Somigliana*.

OBSERVAȚIA 1. O soluție de același tip apare în studiul fluidelor viscoase. Rezultatele relative la ea sînt deci legate de rezultatele corespunzătoare de hidrodinamică. (Vezi de ex. C. Iacob [5], § 4.47.)

OBSERVAȚIA 2. Dacă am calcula rezultanta tensiunilor (33) pe o *semi-sferă* cu centrul în origine, am obține — datorită simetriei — valoarea $\mathcal{R} = -2\pi\mu A'Q$, de unde, raționînd la fel ca mai sus :

$$A' = 1/2 \pi \mu. \quad (45)$$

Nu se poate însă afirma nimic despre momentul resultant — afară de cazul unei sarcini *normale* pe planul-frontieră. (Vezi și mai jos § 9.4, pag. 594).

OBSERVAȚIA 3. Raționamentele de mai sus sînt bazate pe un anumit proces de trecere la limită, analog celui considerat în plan în § 6.16, exemplul *d*. Observațiile făcute acolo (pag. 455) rămîn valabile. Pot fi imaginate și procese de trecere la limită mai complicate, pentru sarcini mai puțin particulare, sau în care bula să fie înlocuită cu alt tip de domeniu.

c) Utilizarea funcției lui Dirac

Toate cele de mai sus sînt în fond strîns legate de unele noțiuni de bază din teoria distribuțiilor. În fapt, soluția (43) poate fi reobținută cu ajutorul funcției δ , ceea ce a fost realizat de către N. Șandru [2] (vezi și I. Ghelfand și G. Șilov [1], vol. 1, § 1.2, pct. 3, și § 1.4, pct. 4).

Pentru aceasta, să rezolvăm ecuațiile lui Lamé (1.1) în spațiul elastic \mathcal{E}_3 , supus acțiunii forței concentrate $F(x) = Q\delta(x)$ aplicate în origine (vezi 2.1.4)). Pentru a găsi funcțiile lui Grodskii, trebuie să rezolvăm ecuațiile (4.15), fără nici o condiție la limită. Observînd că (A.2.15) rămîne valabilă în \mathcal{E}_3 , ecuațiile (4.15) devin

$$\Delta B = -(Q/\mu) \delta(x), \quad \Delta B_0 = 0. \quad (46)$$

Ținînd seama de (2.15) pentru $\xi = 0$, urmează imediat

$$B = (Q/4\pi\mu) R^{-1}, \quad B_0 = 0, \quad (47)$$

ceea ce este exact soluția care rezultă din (2), (3) și (42).

Demonstrația este incomparabil mai simplă, dar mai puțin elementară. Mai mult : calculele care duc la expresia (31) rămîn întotdeauna necesare pentru a ne da vectorul tensiune ce corespunde deplasării considerate. Și chiar și cele care duc de la (31) la (42) nu sînt fără rost : tocmai ele arată că soluția (47) dă într-adevăr, pentru orice \mathcal{S} , rezultatul căutat, astfel încît utilizarea funcției δ în reprezentarea forțelor concentrate se găsește justificată.

Este ușor să se obțină acum deplasarea care corespunde acțiunii unui *moment concentrat*. În acest scop este suficient să considerăm două forțe egale și opuse aplicate în puncte apropiate, și să facem ca distanța între aceste puncte să tindă la zero, în timp ce momentul păstrează o valoare constantă. În acest raționament, trebuie avută în vedere necesitatea de a se obține un rezultat independent de punctele de aplicare, și de orientarea forțelor alese.

Toate cele spuse relativ la acțiunile concentrate au semnificație mecanică numai la o oarecare distanță de punctul de aplicare corespunzător. Într-adevăr, întrucât tensiunile și deplasările cresc nemărginit în vecinătatea unor astfel de puncte, urmează că ecuațiile elasticității liniare își pierd aci valabilitatea. Din punctul de vedere al comportării materialelor reale, problema este rezolvată prin apariția de zone de deformare plastică, sau de fisuri.

§ 9. TENSORUL LUI KELVIN ȘI SOMIGLIANA. APLICAȚII

Să ne imaginăm starea de deplasare (8.43) realizată prin suprapunerea a trei stări elementare, corespunzând fiecare acțiunii unei forțe concentrate dirijate după una din axe; să presupunem că acestea sînt forțe unitare. Pentru $Q = i_k$, vom obține

$$v_k = [1/16 \pi \mu (1-\nu)] [(3-4\nu) i_k/R + (i_k \cdot x) x/R^3], \quad (1)$$

de unde, întrucât i_k are componentele δ_{ki} , căpătăm componentele

$$v_{ki} = [1/16 \pi \mu (1-\nu)] [(3-4\nu) \delta_{ki}/R + x_k x_i/R^3]. \quad (2)$$

Vectorul v_k poartă și el numele de *soluția lui Kelvin și Somigliana*. Cele nouă cantități v_{ki} formează un tensor de ordinul al doilea: *tensorul lui Kelvin și Somigliana*. Componentele v_{ki} se măsoară în cm/kgf. Ele pot fi scrise și sub forma

$$v_{ki} = [1/24 \pi \mu (1-\nu)] \left[(5-6\nu) \delta_{ki}/R + \frac{1}{2} R^2 (1/R)_{,ki} \right]. \quad (3)$$

Cunoașterea componentelor v_{ki} permite scrierea soluției corespunzătoare acțiunii *oricărei* forțe concentrate în origine. Dacă aceasta este aplicată într-un punct ξ — *punctul de sursă* — soluția rămîne valabilă după o translație. Notînd, ca și în (2.14), cu R vectorul de componente $x_i - \xi_i$, de la punctul de sursă ξ la cel de observație x , obținem de pildă din (2):

$$v_{ki}(x; \xi) = [1/16 \pi \mu (1-\nu)] [(3-4\nu) \delta_{ki}/R + (x_k - \xi_k)(x_i - \xi_i)/R^3], \quad (4)$$

unde

$$R^2 = (x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 + (x_3 - \xi_3)^2. \quad (5)$$

Formula (1) rămîne și ea valabilă dacă se înlocuiește x prin R .

a) Proprietăți de simetrie

În primul rând, se remarcă simetria soluției (4) în raport cu punctele de sursă și de observație. Notînd cu $v_k(x; \xi)$ vectorul de componente (4), avem

$$v_k(x; \xi) = v_k(\xi; x), \quad (6)$$

astfel că forța unitară aplicată în punctul de sursă și dirijată după Ox_k produce în punctul de observație o deplasare egală cu cea care ar fi produsă în chiar punctul de sursă de aceeași forță, dacă ea ar fi aplicată în punctul de observație.

Această interpretare — valabilă deocamdată numai pentru spațiul nemărginit — stă la baza așa-numitelor teoreme de reciprocitate de tip Maxwell, de care nu ne vom ocupa aci. (Vezi de ex. C. Biezeno și R. Grammel [1], cap. 2, pct. 9; R. Southwell [3], § 12.) Ele au un rol însemnat în calculul practic, mai ales în studiul sistemelor de bare elastice. Caracterul lor de principiu este identic cu cel al teoremelor lui Betti.

În al doilea rând, se mai poate interverti în (4) indicele axei de proiecție cu cel al axei indicînd direcția de acțiune a forței:

$$v_{ki}(x; \xi) = v_{ik}(x; \xi). \quad (7)$$

b) Superpoziția soluțiilor

Din (4) se obține ușor soluția corespunzătoare acțiunii unui sistem *finit* de forțe concentrate. Astfel dacă notăm cu $Q^{(j)}$ forța de componente $Q_k^{(j)}$ aplicată în punctul $\xi^{(j)}$ de coordonate $\xi_k^{(j)}$, căpătăm deplasarea

$$u^{(j)}(x) = \sum_{k=1}^3 Q_k^{(j)} v_k(x; \xi^{(j)}), \quad (8)$$

unde v_k este dat de (4), dar unde R trebuie înlocuit cu $R^{(j)} = x - \xi^{(j)}$. Vectorul deplasare corespunzător acțiunii *tuturor* celor m forțe $Q^{(j)}$ are deci forma

$$u(x) = Q_k^{(j)} v_k(x; \xi^{(j)}), \quad k = 1, 2, 3; \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad (9)$$

unde x este același, iar $R^{(j)}$ variază cu $\xi^{(j)}$ de la termen la termen.

Desigur, pentru ca soluția (9) să aibă sens, trebuie ca principiul superpoziției să nu-și piardă valabilitatea, așadar ca deplasările, deformările și rotațiile *parțiale* și *totale* să fie destul de mici.

c) Potențiali elastici de volum

Expresia (9) sugerează calea de urmat pentru a obține soluția problemei spațiului elastic acționat de forțe de volum repartizate *continuu* la distanță *finită*. Raționamentul e similar celui folosit în hidrodinamică

pentru o repartiție continuă de surse (vezi de ex. N. Kocin [1], § 19; V. Smirnov [2], vol. 2, pct. 200; A. Tihonov și A. Samarskii [1], § 4.5).

Fie deci un sistem de forțe $F(\xi)$, repartizate într-o porțiune mărginită $\mathcal{V} \subset \mathcal{E}_3$. Fiecare element de volum dV cu centrul în ξ este supus acțiunii forței $F(\xi) dV$. Aceasta sugerează să înlocuim suma în raport cu j din (9), prin integrala

$$U(x) = \iiint_{\mathcal{V}} F_k(\xi) v_k(x; \xi) dV, \quad k = 1, 2, 3, \quad (10)$$

(punctul de integrare fiind evident punctul ξ), sau încă

$$U_i(x) = \iiint_{\mathcal{V}} F_k(\xi) v_{ki}(x; \xi) dV, \quad i, k = 1, 2, 3. \quad (11)$$

Soluția (10) e similară cu soluția (2.25) a ecuației lui Poisson, exprimată prin potențialul (2.19). Prin analogie, integralele ce intervin în (10) se numesc *potențiali elastici de volum*, de densități egale cu factorii $F_k(\xi)$.

Acest raționament are caracter pur euristic. Într-adevăr, integralele (10) conțin termeni singulari care, după derivarea necesară pentru a verifica ecuațiile lui Lamé, duc la apariția unor integrale improprii, a căror convergență trebuie demonstrată și a căror valoare trebuie aflată.

Chestiunea se rezolvă ca și în cazul ecuației lui Poisson (vezi de ex. A. Tihonov și A. Samarskii [1], § 4.5). Pentru ecuațiile lui Lamé, calculele corespunzătoare au fost efectuate de G. Lauricella [1], [3], la sugestia lui V. Volterra. Vezi de asemenea M. Haimovici [1], § 11.2; S. Mihlin [3], §§ 21 și 45.

Un raționament bazat pe utilizarea funcției δ poate fi ușor construit, prin asemănare cu cel care conduce la formula (2.27). Anume, întrucât soluția lui (4) verifică ecuațiile omogene pentru $x \neq \xi$, și corespunde acțiunii unei „forțe de volum” $F = i_k \delta(x - \xi)$, putem scrie (vezi și (4.8.3) și (4.8.7)) :

$$\mathfrak{A} v_k(x; \xi) = i_k \delta(x - \xi), \quad (12)$$

ecuație similară cu (2.15). Întrucât $v_k(x; \xi)$ depinde numai de $x - \xi$, potențialul (10) poate fi scris — analog cu (2.26) — sub forma

$$U = F_k * v_k, \quad (13)$$

unde în fapt avem *trei* convoluții, corespunzând celor trei componente v_{ki} . Luând acum în (A.2.23) pentru \mathfrak{D} — operatorul lui Lamé \mathfrak{A} , și făcând uz și de (12) și (A.2.10), avem pe rînd

$$\mathfrak{A} U = \mathfrak{A} (F_k * v_k) = F_k * \mathfrak{A} v_k = F_k * i_k \delta = i_k F_k * \delta = F. \quad (14)$$

Rezultatul rămâne valabil chiar dacă F este o distribuție⁵⁾.

Problema echilibrului spațiului elastic nemărginit izotrop și omogen, acționat la distanță finită de forțe oarecare, și în care apar deplasări și tensiuni regulate la infinit, este deci rezolvată. Mai mult, pentru un corp V mărginit supus acțiunii forțelor F și satisfăcând anumite condiții la limită, integrala (10) este tocmai acea soluție particulară a ecuațiilor lui Lamé *ne-omogene* despre care am vorbit în § 4.10, și care permite să reducem problema la problema *omogenă* corespunzătoare.

§ 10. SOLUȚIA FUNDAMENTALĂ A ECUAȚIILOR LUI LAMÉ BIDIMENSIONALE. CARACTERUL PARADOXAL AL ACESTEI SOLUȚII

a) Soluția fundamentală în \mathcal{L}_2

Toate rezultatele relative la soluția fundamentală rămân valabile în orice \mathcal{L}_m : pentru $m \geq 3$ trebuie să facem uz de funcția R^{-m+2} , în timp ce în \mathcal{L}_2 intervine funcția $\ln R$.

În acest din urmă caz, calculele din § 8 pot fi refăcute pornind de la o reprezentare a lui Grodskii bidimensională (4.14), și înlocuind (8.3) prin

$$\varphi = A \ln(a/\rho), \quad (1)$$

unde — spre deosebire de notația folosită în capitolul 6 — vom scrie

$$\rho = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \quad (2)$$

pentru a nu risca confuzia cu R din (8.4) sau (9.5). Remarcăm prezența constantei a în (1); aceasta are dimensiunea unei lungimi, și este introdusă pentru ca soluția să nu depindă de alegerea unității de măsură.

Făcând uz de (1) în (4.14), momentul resultant este nul, și obținem

$$A = 1/2\pi\mu. \quad (3)$$

Soluția (9.1) se înlocuiește acum prin

$$v_k = [1/8\pi\mu(1-\nu)] [(3-4\nu) i_k \ln(a/\rho) + (i_k \cdot x) x/\rho^2], \quad (4)$$

unde constanta a nu poate fi determinată, întrucât tensiunile nu depind de ea. Pentru o forță unitară aplicată în ξ , trebuie să înlocuim în (4) pe x prin $\rho = x - \xi$.

⁵⁾ Egalitatea este desigur înțeleasă aci într-un sens generalizat, mai slab — astfel că raționamentul din (14) nu poate înlocui raționamentele de tip Lauricella.

Fără a restrînge generalitatea raționamentului, ne vom limita (L. Solomon [13]) la cazul $\xi = 0$, $i_* = i_1$, astfel că din (4) căpătăm :

$$\begin{aligned} v_{11} &= [1/8\pi\mu (1 - \nu)] [(3 - 4\nu) \ln (a/\rho) + x_1^2/\rho^2], \\ v_{12} &= [1/8\pi\mu (1 - \nu)] [x_1 x_2/\rho^2]. \end{aligned} \quad (5)$$

Trecînd la coordonate polare $z = \rho \exp(i\chi)$, aceste expresii devin

$$\begin{aligned} v_{11} &= [1/8\pi\mu (1 - \nu)] [(3 - 4\nu) \ln (a/\rho) + \cos^2 \chi], \\ v_{12} &= [1/8\pi\mu (1 - \nu)] \sin \chi \cos \chi. \end{aligned} \quad (6)$$

Aceleași expresii se obțin dacă facem uz de soluția lui Kolosov și Mushelișvili pentru problema forței concentrate. Anume, luînd în (6.16.17) $R_1 \rightarrow 0$ și $X^{(1)} = 1$ (forță unitară concentrată dirijată în lungul axei Ox_1), obținem

$$\varphi(z) = - [1/2\pi (\kappa + 1)] \ln z, \quad \psi(z) = [\kappa/2\pi (\kappa + 1)] \ln z, \quad (7)$$

astfel că deplasarea rezultă din (6.7.12) sub forma

$$2\mu U = - [\kappa/2\pi (\kappa + 1)] \ln (z\bar{z}) + [1/2\pi (\kappa + 1)] (z/\bar{z}), \quad (8)$$

sau încă, ținînd seama de valoarea (6.7.13) a constantei $\kappa = 3 - 4\nu$ (deformație plană) :

$$U = - [(3 - 4\nu)/16\pi\mu (1 - \nu)] \ln \rho^2 + [1/16\pi\mu (1 - \nu)] \exp(2i\chi), \quad (9)$$

ceea ce conduce tocmai la componentele din (5) sau (6).

Să examinăm în detaliu comportarea componentei v_{11} (deplasarea în lungul liniei de acțiune a sarcinii). Cu acest scop, să considerăm curba

$$F(x_1, x_2; a) \equiv \cos^2 \chi + (3 - 4\nu) \ln (a/\rho) = 0, \quad (10)$$

pe care avem $v_{11} = 0$. Este vizibil că

$$F(ax_1, ax_2; a) \equiv F(x_1, x_2; 1), \quad (11)$$

și curbele care corespund la valori diferite ale constantei a sînt deci omotetice. Alegînd $c = \exp[-C/(3 - 4\nu)]$, se vede că curbele $F(x_1, x_2; a) = C$ coincid cu curbele $F(x_1, x_2; ac) = 0$. Liniile de egală deplasare $v_{11} = \text{const.}$ sînt deci omotetice cu liniile $F(x_1, x_2; 1) = 0$. Ne rămîne să le examinăm pe acestea din urmă; din ecuația lor urmează

$$\rho = \exp[(\cos^2 \chi)/(3 - 4\nu)], \quad (12)$$

ceea ce definește o curbă închisă, cu două axe de simetrie. Pentru diferite valori ale lui ν , aspectul acestor curbe este cel dat în figura 7.10.1.

Soluția (4) sau (7) pune deci în evidență o curbă închisă pe care avem $v_{11} = 0$. În interiorul acesteia avem $v_{11} > 0$, iar în exterior, $v_{11} < 0$. Așadar, componenta deplasării după linia de acțiune a sarcinii se anulează la o anumită distanță de origine, apoi își schimbă semnul, și tinde la infinit, descriind deplasări tot mai mari și opuse direcției de acțiune a sar-

cinii pe măsură ce ne depărtăm de punctul de aplicare al acesteia. Dimpotrivă, componenta v_{12} nu depinde de ρ .

Rezultatul e un non-sens. Modificarea constantei a modifică prin omotetie aspectul acestui „tub” de deplasări egale, dar nu schimbă caracterul paradoxal al celor de mai sus.

Faptul că funcția $\ln \rho$ posedă două puncte singulare, în timp ce funcția $1/R$ folosită în \mathcal{L}_3 are numai un singur astfel de punct, explică deosebirea de comportare a soluției în cazul bidimensional și în cel tridimensional.

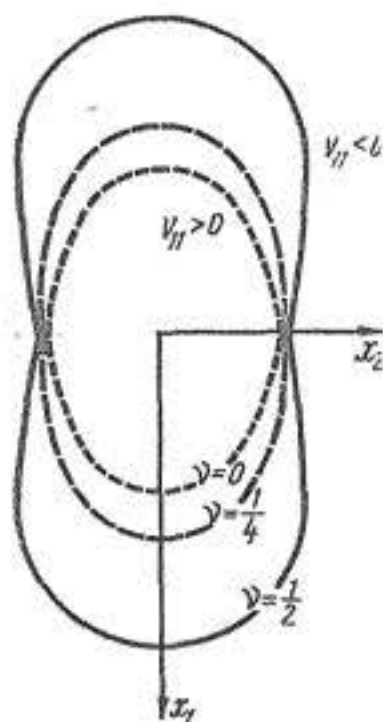


Fig. 7.10.1

E drept că în plan dispunem de două funcții armonice cu ajutorul cărora putem construi două soluții de tip Kelvin-Somigliana: $\operatorname{Re} \ln z$, și $\operatorname{Im} \ln z$, așadar $\ln \rho$ și $\chi = \arctg(x_2/x_1)$. Alegând în (4.14)

$$B_1 = 0, \quad B_2 = A\chi, \quad B_0 = 0, \quad (13)$$

raționamentul din § 8 poate fi repetat; dar a doua soluție care se obține este de asemenea inacceptabilă, întrucât deplasările nu depind de ρ , și înafară de aceasta ele sînt funcții multiforme.

Alte posibilități de a construi soluții de tipul lui Kelvin și Somigliana în plan, nu există. Caracterul paradoxal al celor de mai sus interzice utilizarea necritică a soluțiilor în deplasări ale problemei plane, dacă se face uz de componentele tensorului lui Kelvin și Somigliana sub formă în-

treagă, așa cum este cazul de pildă în construcția soluțiilor particulare de tip (9.10). Din același motiv, nu are sens să calculăm componentele deplasării în probleme în care funcțiile lui Kolosov și Muskhelishvili conțin termeni logaritmici sau polari la infinit (vezi § 6.10). Dimpotrivă, toate calculele relative la componentele tensiunii rămîn justificate — dat fiind că derivatele termenilor în $\ln(a/\rho)$ sînt regulate la infinit și nu depind de constanta nedeterminată a .

b) Soluția fundamentală dedusă din soluția fundamentală în \mathcal{L}_3

Caracterul paradoxal al soluției lui Kelvin și Somigliana în plan poate fi înțeles, dacă amintim că problema stării de deformare plană este în fapt o problemă tridimensională, cu monotonie în raport cu variabila x_3 .

Să revenim aci la notațiile în x, y, z , și să presupunem că în lungul axei Oz sînt distribuite sarcini de intensitate constantă, dirijate paralel cu Ox .

Vom nota cu x punctul de observație, și cu $\xi(0,0,\zeta)$ pe cel de sursă. Presupunînd că sarcinile $q(\zeta)$ i au rezultanta i pe orice interval de lungime unitară de pe Oz , rezultă că trebuie să luăm $q(\zeta) = \text{const.} = 1$.

Vom face uz de soluția (9.4) pentru $k = 1$, ceea ce dă acum

$$v_{11} = c(\kappa + x^2/R^3), \quad v_{12} = cxy/R^3, \quad v_{13} = cx(z - \zeta)/R^3, \quad (14)$$

unde am notat

$$R = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - \zeta)^2}, \quad c = 1/16\pi\mu(1 - \nu), \quad \kappa = 3 - 4\nu. \quad (15)$$

Amplificînd în (15) cu $d\zeta$ și integrînd de la o valoare ζ_1 la ζ_2 , obținem deplasările spațiului \mathcal{L}_3 , sub acțiunea unui „fir” de sarcini repartizate continuu în lungul axei Oz , și avînd rezultanta $(\zeta_2 - \zeta_1)i$.

Efectuînd schimbarea de variabilă

$$Z = z - \zeta, \quad dZ = -d\zeta, \quad (16)$$

și notînd cu V_{1i} integralele componentelor v_{1i} din (14), obținem

$$\begin{aligned} V_{11} &= c \left[\kappa \int_{Z_2}^{Z_1} R^{-1} dZ + x^2 \int_{Z_2}^{Z_1} R^{-3} dZ \right], \\ V_{12} &= cxy \int_{Z_2}^{Z_1} R^{-3} dZ, \quad V_{13} = cx \int_{Z_2}^{Z_1} Z dZ. \end{aligned} \quad (17)$$

Or, din (15), (16) avem evident

$$xR^{-3} = -(R^{-1})_{,1}, \quad yR^{-3} = -(R^{-1})_{,2}, \quad ZR^{-3} = -(R^{-1})_{,3}, \quad (18)$$

(unde indicele 3 marchează acum derivarea în raport cu Z). În acest fel, formulele (17) devin

$$\begin{aligned} V_{11} &= c \left[\kappa \int_{Z_2}^{Z_1} R^{-1} dZ - x \frac{\partial}{\partial x} \int_{Z_2}^{Z_1} R^{-1} dZ \right], \\ V_{12} &= -cx \frac{\partial}{\partial y} \int_{Z_2}^{Z_1} R^{-1} dZ, \quad V_{13} = -cx \int_{Z_2}^{Z_1} \frac{\partial}{\partial Z} (R^{-1}) dZ. \end{aligned} \quad (19)$$

Să notăm pe scurt, pentru $j = 1, 2$:

$$R = \sqrt{x^2 + y^2 + Z^2} = \sqrt{\rho^2 + Z^2}; \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad R_j = \sqrt{\rho^2 + Z_j^2}, \quad (20)$$

și să amintim și formula cunoscută

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \ln \left[\frac{(x + \sqrt{a^2 + x^2})}{a} \right]. \quad (21)$$

Presupunând că $\zeta_1 < \zeta_2$, astfel că pentru orice $z \in]\zeta_1, \zeta_2[$ avem $Z_1 = z - \zeta_1 > 0$, $Z_2 = z - \zeta_2 < 0$, vom calcula integrala

$$\begin{aligned} \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} R^{-1} dZ &= \ln \frac{Z + R}{\rho} \Big|_{\zeta_1}^{\zeta_2} = \ln \frac{R_1 + Z_1}{\rho} + \ln \frac{\rho (R_2 - Z_2)}{(R_2 + Z_2)(R_2 - Z_2)} = \\ &= \ln \frac{R_1 + Z_1}{\rho} + \ln \frac{R_2 - Z_2}{\rho}, \end{aligned}$$

unde $Z_1 > 0$, $-Z_2 > 0$. Introducând aci și constanta arbitrară a , avînd dimensiunea unei lungimi, putem scrie deci

$$\int_{\zeta_1}^{\zeta_2} R^{-1} d\zeta = \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} R^{-1} dZ = \ln \frac{(R_1 + Z_1)(R_2 - Z_2)}{a^2} + 2 \ln \frac{a}{\rho}. \quad (22)$$

Pentru a introduce (22) în (19), avem de calculat derivatele

$$[2 \ln (a/\rho)]_{,i} = -2 (x_i/\rho^2), \quad (23)$$

$$\left[\ln \frac{(R_1 + Z_1)(R_2 - Z_2)}{a^2} \right]_{,i} = \left[\frac{1}{R_1(R_1 + Z_1)} + \frac{1}{R_2(R_2 - Z_2)} \right] x_i, \quad (24)$$

pentru $x_1 \equiv x$, $x_2 \equiv y$, $i = 1, 2$. Cu aceasta, soluția (19) capătă forma

$$\begin{aligned} V_{11} &= 2c \left[\frac{x^2}{\rho^2} + (3 - 4\nu) \ln \frac{a}{\rho} \right] + c(3 - 4\nu) \ln \frac{(R_1 + Z_1)(R_2 - Z_2)}{a^2} - \\ &\quad - cx^2 \left[\frac{1}{R_1(R_1 + Z_1)} + \frac{1}{R_2(R_2 - Z_2)} \right], \\ V_{12} &= 2c \frac{xy}{\rho^2} - cxy \left[\frac{1}{R_1(R_1 + Z_1)} + \frac{1}{R_2(R_2 - Z_2)} \right], \quad (25) \\ V_{13} &= cx \left[\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right]. \end{aligned}$$

După cum se vede, primii termeni din V_{11} și V_{12} coincid cu componentele v_{11} , respectiv v_{12} din (5).

Desigur, ar fi de dorit ca pentru $Z_1, -Z_2 \rightarrow \infty$, să căpătăm din (25) tocmai soluția lui Kelvin și Somigliana în \mathcal{E}_2 . În fapt, se constată ușor că în acest caz termenii ultimi din V_{11} și V_{12} , precum și componenta V_{13} , se anulează. În schimb, termenul mijlociu din V_{11} tinde acum către infinit.

Tocmai acesta este motivul pentru care componenta v_{11} din (5) tinde la infinit pentru $\rho \rightarrow \infty$, în contradicție cu sensul mecanic al problemei: lucrurile se petrec astfel, numai pentru că în soluția problemei plane — care ar fi trebuit să fie obținută din (25) — a fost *dinainte* neglijat acel termen logaritm, care tinde și el spre infinit. (Acest termen descrie o stare cu tensiuni nule la infinit, astfel că prezența sa nu influențează tensiunile la mari distanțe.)

Să regrupăm acum termenii în $\cos^2 \chi$, $\cos \chi \sin \chi$, și termenii logaritmici. După calcule elementare, obținem din (25)

$$V_{11}(x, y, z) = 2c \left\{ \left[1 - \frac{1}{2\sqrt{1 + Z_1^2/\rho^2}(\sqrt{1 + Z_1^2/\rho^2} + Z_1/\rho)} - \frac{1}{2\sqrt{1 + Z_2^2/\rho^2}(\sqrt{1 + Z_2^2/\rho^2} - Z_2/\rho)} \right] \cos^2 \chi + \right. \\ \left. + \frac{1}{2}(3 - 4\nu) [\ln(\sqrt{1 + Z_1^2/\rho^2} + Z_1/\rho) + \ln(\sqrt{1 + Z_2^2/\rho^2} - Z_2/\rho)] \right\} \quad (26)$$

$$V_{12}(x, y, z) = 2c \left[1 - \frac{1}{2\sqrt{1 + Z_1^2/\rho^2}(\sqrt{1 + Z_1^2/\rho^2} + Z_1/\rho)} - \frac{1}{2\sqrt{1 + Z_2^2/\rho^2}(\sqrt{1 + Z_2^2/\rho^2} - Z_2/\rho)} \right] \cos \chi \sin \chi,$$

$$V_{13}(x, y, z) = c \left[\frac{1}{\sqrt{1 + Z_1^2/\rho^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 + Z_2^2/\rho^2}} \right] \cos \chi,$$

(unde variabila z apare prin intermediul cantităților Z_1, Z_2).

Atât coeficientul termenului în $\cos^2 \chi$, cât și termenul logaritmice din V_{11} , sînt pozitivi pentru orice valori ale lui ρ, χ, Z_1, Z_2 , astfel că avem peste tot $V_{11} > 0$. Calculînd limitele expresiilor (26) pentru $\rho \rightarrow \infty$, obținem, pentru orice valori finite ale lui Z_1, Z_2 :

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} V_{11}(x, y, z) = \lim_{\rho \rightarrow \infty} V_{12}(x, y, z) = \lim_{\rho \rightarrow \infty} V_{13}(x, y, z) = 0. \quad (27)$$

Prin urmare soluția (26) dă deplasări care păstrează un semn constant pe direcția sarcinii, și tind la zero la infinit — în concordanță cu sensul mecanic al problemei.

Dimpotrivă pentru ρ finit, obținem din (26)

$$\lim_{Z_1, -Z_2 \rightarrow \infty} V_{11} = (3 - 4\nu)c \lim_{Z_1, -Z_2 \rightarrow \infty} \ln(Z_1 Z_2 / \rho^2) = \infty, \quad (28) \\ \lim_{Z_1, -Z_2 \rightarrow \infty} V_{12} = 2c \sin \chi \cos \chi, \quad \lim_{Z_1, -Z_2 \rightarrow \infty} V_{13} = 0.$$

Accasta este de asemenea ușor de înțeles: rezultanta sarcinii aplicate în lungul liniei Oz tinde și ea la infinit, odată cu diferența $Z_1 - Z_2$, și e de așteptat că deplasările nu pot rămîne finite. Prin urmare, condiția de finitudine a deplasărilor la infinit impusă în § 6.10, pag. 413—414, este în fond străină naturii problemei.

În practică, nu vom întîlni desigur nici cazul $Z_1, -Z_2 \rightarrow \infty$, nici cazul $\rho \rightarrow \infty$. Dar valorile deplasării nu vor trebui căutate sub forma (5) — lipsită de sens mecanic — ci numai pornind de la formulele (26), și apreciind în ce măsură aceste formule — stabilite pentru spațiul nemărginit solicitat în lungul axei Oz — pot fi acceptate în problema studiată.

§ 11. FORMULA INTEGRALĂ FUNDAMENTALĂ A ELASTOSTATICII

a) Reprezentarea prin potențiali elastici

Această formulă reprezintă soluția ecuațiilor lui Lamé ne-omogene pentru un corp izotrop și omogen, ca sumă de integrale definite care depind de forțele de volum și de valorile la limită ale deplasării și tensiunii.

Să considerăm un corp mărginit \mathcal{V} , de frontieră \mathcal{S} (suprafață care posedă arie), supus acțiunii forțelor F și f , care realizează în \mathcal{V} starea elastică regulată u_i, σ_{ij} .

Vom face uz de cea de a treia formulă Betti și de soluția fundamentală (9.4), alegînd în (6.17) drept vector u chiar soluția căutată, iar drept vector v , un vector v_k (k fix, dar oarecare) de componente v_{ki} din (9.4). Vom izola punctul singular $x = \xi$ al funcției v_k printr-o sferă notată S_ε , de rază ε . Formula (6.17) — unde în primul membru facem uz de (6.6) — va putea fi deci folosită pentru domeniul $\mathcal{V} - B_\varepsilon$ de frontieră $\mathcal{S} + S_\varepsilon$:

$$\begin{aligned} \iiint_{\mathcal{V}-B_\varepsilon} [u \cdot \mathfrak{A} v_k - v_k \cdot \mathfrak{A} u] dV &= \iint_{\mathcal{S}} [v_k \cdot \sigma_n(u) - u \cdot \sigma_n(v_k)] dS + \\ &+ \iint_{S_\varepsilon} [v_k \cdot \sigma_n(u) - u \cdot \sigma_n(v_k)] dS. \end{aligned} \quad (1)$$

Întrucît v_k este o soluție a ecuațiilor Lamé omogene, avem

$$\mathfrak{A} v_k = 0 \quad \text{în} \quad \mathcal{V} - B_\varepsilon. \quad (2)$$

Al doilea termen din integrala de volum este un potențial elastic de volum de densitate $\mathfrak{A} u$, definit în $\mathcal{V} - B_\varepsilon$. Întrucît $u \in C^2(\mathcal{V})$, urmează că $\mathfrak{A} u \in C^0(\mathcal{V})$. Integrala corespunzătoare este deci convergentă (vezi indicațiile din § 9, pag. 551), limita pentru $\varepsilon \rightarrow 0$ a acestei integrale există și este desigur egală tocmai cu potențialul elastic de volum de densitate $\mathfrak{A} u$, definit în \mathcal{V} .

Prima integrală din membrul al doilea din (1) nu depinde de ε , astfel că și cea de-a doua are o limită pentru $\varepsilon \rightarrow 0$. Ne propunem să găsim această limită.

Cu acest scop, să începem prin a calcula integrala

$$I'_k = \iint_{S_\varepsilon} v_k \cdot \sigma_n(u) dS. \quad (3)$$

Ținând seama de (9.4), avem pe rînd

$$I'_k = [1/16 \pi \mu (1 - \nu)] \varepsilon \iint_{S_\varepsilon} [(3 - 4\nu) \delta_{ki} + (x_k - \xi_k)(x_i - \xi_i) \varepsilon^{-2}] \sigma_{ni}(\mathbf{u}) dS_1. \quad (4)$$

Al doilea termen al integrandului conține un produs de cosinuși directori, care rămîne finit pentru $\varepsilon \rightarrow 0$. Din (3) și (4) urmează atunci

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint_{S_\varepsilon} \mathbf{v}_k \cdot \boldsymbol{\sigma}_n(\mathbf{u}) dS = 0. \quad (5)$$

Să trecem acum la calculul celei de-a doua integrale pe S_ε din (1):

$$I''_k = \iint_{S_\varepsilon} \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\sigma}_n(\mathbf{v}_k) dS. \quad (6)$$

Tensiunea $\boldsymbol{\sigma}_n(\mathbf{v}_k)$ se calculează din (8.44), înlocuind \mathbf{x} prin \mathbf{R} , și punînd $R = \varepsilon$, $\mathbf{Q} = \mathbf{i}_k$ și $\mathbf{R} = -R\mathbf{n}$ (spre deosebire de calculele care au condus la (8.33), normala exterioară domeniului $\mathcal{V} = B_\varepsilon$ e aci dirijată spre interiorul sferei S_ε). Obținem astfel

$$\boldsymbol{\sigma}_n(\mathbf{v}_k)|_{R=\varepsilon} = [(1 - 2\nu)/8\pi(1 - \nu)] \varepsilon^{-2} [\mathbf{i}_k + 3(1 - 2\nu)^{-1} \varepsilon^{-2} (\mathbf{i}_k \cdot \mathbf{R}) \mathbf{R}], \quad (7)$$

și deci (6) devine

$$I''_k = [(1 - 2\nu)/8\pi(1 - \nu)] \varepsilon^{-2} \iint_{S_\varepsilon} \mathbf{u} \cdot [\mathbf{i}_k + 3(1 - 2\nu)^{-1} \varepsilon^{-2} (x_k - \xi_k) \mathbf{R}] ds, \quad (8)$$

sau încă, întrucît avem

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{i}_k = u_k, \quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{R} = u_i(x_i - \xi_i), \quad dS_\varepsilon = \varepsilon^2 dS_1,$$

(unde dS_1 este elementul de arie pe sfera unitate):

$$I''_k = \frac{1 - 2\nu}{8\pi(1 - \nu)} \left[\iint_{S_\varepsilon} u_k dS_1 + \frac{3}{1 - 2\nu} \varepsilon^{-2} \iint_{S_\varepsilon} u_i(x_i - \xi_i)(x_k - \xi_k) dS_1 \right]. \quad (9)$$

Prima integrală din (9) reprezintă media funcției $u_k(\mathbf{x})$ pe $S(\boldsymbol{\xi}, \varepsilon)$. Componentele u_k fiind continue, prima teoremă a mediei dă

$$\iint_{S_\varepsilon} u_k(\mathbf{x}) dS_1 = u_k(\boldsymbol{\xi}) \iint_{S_\varepsilon} dS_1 + \eta' = 4\pi u_k(\boldsymbol{\xi}) + \eta', \quad (10)$$

unde $\eta' \rightarrow 0$ pentru $\varepsilon \rightarrow 0$.

Pentru a calcula a doua integrală din (9), aceeași teoremă conduce la

$$\iint_{S_\varepsilon} u_i(x_i - \xi_i)(x_k - \xi_k) dS_1 = u_i(\xi) \iint_{S_\varepsilon} (x_i - \xi_i)(x_k - \xi_k) dS_1 + \eta'', \quad (11)$$

unde $\eta'' \rightarrow 0$ pentru $\varepsilon \rightarrow 0$.

Pentru $i \neq k$ avem evident

$$\iint_{S_\varepsilon} (x_i - \xi_i)(x_k - \xi_k) dS_1 = 0. \quad (12)$$

Ne rămâne să calculăm această integrală pentru $i = k$. Valoarea ei nu depinde de indice. Făcînd uz de (2.5), vom scrie

$$x_1 - \xi_1 = \varepsilon \sin \theta \cos \varphi, \quad x_2 - \xi_2 = \varepsilon \sin \theta \sin \varphi, \quad x_3 - \xi_3 = \varepsilon \cos \theta, \quad (13)$$

$$dS_1 = \sin \theta d\theta d\varphi,$$

astfel că pentru $i = k = 3$ de pildă, avem

$$\iint_{S_\varepsilon} (x_3 - \xi_3)^2 dS_1 = \varepsilon^2 \left[-\frac{1}{3} \int_0^\pi d(\cos^3 \theta) \right] \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{4}{3} \pi \varepsilon^2. \quad (14)$$

Relațiile (12) și (14) se scriu împreună sub forma

$$\iint_{S_\varepsilon} (x_i - \xi_i)(x_k - \xi_k) dS_1 = \frac{4}{3} \pi \varepsilon^2 \delta_{ik}, \quad (15)$$

astfel că (11) devine

$$\iint_{S_\varepsilon} u_i(x_i - \xi_i)(x_k - \xi_k) dS_1 = \frac{4}{3} \pi \varepsilon^2 u_k(\xi) + \eta''. \quad (16)$$

Introducînd (16) și (10) în (9), obținem după calcule elementare $I_k'' = u_k(\xi) + \eta$, de unde

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint_{S_\varepsilon} \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\sigma}_n(\mathbf{v}_k) dS_\varepsilon = u_k(\xi). \quad (17)$$

Să luăm acum $\varepsilon \rightarrow 0$ în (1), ținînd seama de (2), (5) și (17). Regrupînd termenii și intervertind \mathbf{x} cu $\boldsymbol{\xi}$, căpătăm în definitiv *formula integrală fundamentală a elastostaticii liniare* (pentru corpuri izotrope și omogene):

$$u_k(\mathbf{x}) = \iiint_V \mathbf{v}_k \cdot \mathfrak{A} \mathbf{u} dV + \iint_S [\mathbf{v}_k \cdot \boldsymbol{\sigma}_n(\mathbf{u}) - \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\sigma}_n(\mathbf{v}_k)] dS, \quad (18)$$

unde ξ este punctul curent de integrare. Analogia cu (2.18) este evidentă. Semnul *plus* în integrala de volum se datorește faptului că operatorul \mathfrak{U} preia aici locul operatorului $-\Delta$ (vezi și § 6, pag. 539). Locul operatorului de derivare normală e preluat de operatorul-tensiune din (1.9).

Această formulă a fost obținută de C. Somigliana [3] pentru domenii mărginite. Tot el, în [4], a extins valabilitatea formulei la domenii nemărginite, dacă $F \equiv 0$ în exteriorul unei sfere, și starea elastică este regulată la infinit.

Ca și (2.18), relația (18) exprimă numai o proprietate de structură a operatorului lui Lamé \mathfrak{U} (compară cu § 2, pag. 514).

Să considerăm acum vectorul deplasare u pentru care

$$\mathfrak{U}u = F, \quad u|_{\mathcal{S}} = g, \quad \sigma_n(u)|_{\mathcal{S}} = f. \quad (19)$$

Introducând (19) în (18), obținem

$$u_k(x) = \iiint_{\mathcal{V}} v_k \cdot F \, dV + \iint_{\mathcal{S}} [v_k \cdot f - g \cdot \sigma_n(v_k)] \, dS, \quad (20)$$

ceea ce dă explicit vectorul deplasare prin intermediul a trei integrale definite. Condițiile la limită impuse de necesitățile practicii, și deja considerate, sînt deci tocmai acele condiții pe care însăși structura operatorului lui Lamé le scoate în evidență, prin intermediul formulei integrale fundamentale.

Pe lângă potențialul de volum introdus în § 9, formula (20) conține încă două integrale care — prin analogie cu cele considerate în § 2 — se numesc *potențiali elastici* (superficiali) *de simplu*, respectiv *de dublu strat*. Acești potențiali au fost studiați tot de către G. Lauricella [3], care a demonstrat pentru ei teoreme deplin analoge cu (2.28)–(2.32), derivarea normală fiind sistematic înlocuită de o operație de tipul operatorului-tensiune definit în (1.9). Vezi încă E. și F. Cosserat [3].

Ca și pentru ecuația lui Poisson, datele incluse în (20) sînt supra-abundente; teorema de unicitate din § 4.5 ne arată că *nu putem* da în mod independent valorile la limită ale deplasării și ale tensiunii. De aceea, formula (20) *nu definește* o soluție a ecuațiilor lui Lamé pentru valori *arbitrare* ale deplasării și tensiunii pe frontieră — ci dă numai o legătură obligatorie între diferitele mărimi elastice (cunoscute și necunoscute).

Formula (18) este esențial bazată pe presupunerea $x \in \mathcal{V}$. O formulă analogă poate fi scrisă și pentru $x \notin \mathcal{V} + \mathcal{S}$ — dar nu și pentru $x \in \mathcal{S}$ (cînd un analog al sferei S_ϵ nu poate fi construit). Prin urmare, abia studiul proprietăților la limită ale potențialilor elastici permite clarificarea proprietăților la limită ale sumei din membrul al doilea din (20), și deci și a valorilor pe care funcțiile u sau $\sigma_n(u)$, construite prin intermediul acestei sume, le iau pe \mathcal{S} . (Vezi problema asemănătoare pentru ecuația lui Poisson, de exemplu în L. Sretenskii [1], §§ 3.2 și 4.3.).

b) Aplicații. Indicații bibliografice

Cu toate aceste observații limitative, formula (18) sau (20) este de o excepțională importanță. Ea permite obținerea de rezultate generale relative la proprietățile soluțiilor ecuațiilor lui Lamé: proprietăți de medie (vezi S. Mihlin [3], § 44), proprietățile de stabilitate a soluției în raport cu modificarea datelor la limită (vezi similar A. Tihonov și A. Samarskii [1], § 4.2, referitor la ecuația lui Laplace) etc.

În afară de aceasta, ea poate conduce la reprezentări efective ale soluției, prin considerarea unui analog al funcției lui Green. (Vezi, pentru o teorie generală, R. Courant și D. Hilbert [1], vol. 1, § 5.16; C. Miranda [1], § 10; V. Smirnov [2], vol. 4, pct. 240.)

În sfârșit, reprezentarea soluțiilor ecuațiilor lui Lamé omogene prin potențiali elastici superficiali, și studiul proprietăților lor la limită, permite reducerea problemei la studiul anumitor ecuații integrale. În cazul general al sistemelor de tip eliptic, chestiunea e studiată de C. Miranda [1], cap. 3 și 7; V. Smirnov [2], volumul 4, pct. 239–240. În ce privește problemele mecanicii, drumul a fost deschis de cercetările lui E. și F. Cosserat [2], [3] și G. Lauricella [3]–[5], care, bazați pe lucrările mai vechi ale școlii italiene de teoria elasticității (E. Betti, C. Somigliana) au obținut în acest mod demonstrarea teoremelor de existență. Metoda ecuațiilor integrale a fost utilizată și de A. Korn [1]–[3] și L. Lichtenstein [2]. Unele din aceste rezultate sînt pe scurt reluate de M. Haimovici [1], capitolele 11 și 12; E. Trefftz [3], §§ 49–51. Aceleași puncte de vedere sînt studiate, cu aplicații la fluidele viscoase, de F. Odqvist [1].

Ecuațiile lui G. Lauricella au fost regăsite, generalizate și simplificate (pentru problema lui Dirichlet) de către D. Șerman [5]. (Vezi și lucrările [1]–[4] ale aceluiași autor.) Pentru problema lui Neumann, vezi H. Weyl [1]. Bibliografia amănunțită a chestiunii (inclusiv aplicații) este prezentată de D. Șerman [8] (vezi și [9]).

Pe linia concepțiilor lui G. Giraud, vezi studiul sistematic al ecuațiilor elasticității, realizat de V. Kupradze [2], [3].

Pentru raporturile între teoria elasticității și diferitele reprezentări integrale posibile, vezi I. Arjanih [1]. Pentru ecuațiile dinamice, vezi și S. Kaliski [1].

Toate aceste puncte de vedere încep să-și găsească aplicații și în studiul unor corpuri caracterizate de legi fizice mai complicate. Cităm astfel lucrarea lui E. Sternberg și S. Al-Khozaie [1] asupra *visco-elasticității*, unde se introduc matrice Green, soluții fundamentale, formule integrale fundamentale adecvate.

§ 12. MATRICEA LUI GREEN PENTRU ECUAȚIILE LUI LAMÉ

a) Matricea lui Green

Să revenim la formula fundamentală (11.18) sau (11.20), și să presupunem că avem de rezolvat una oarecare din problemele la limită (4.2.1)–(4.2.3). Dacă am putea determina un vector G_k care să ia într-un anume sens locul vectorului v_k în formula fundamentală, în așa fel încît termenii

din integrala de suprafață care nu sînt cunoscute să dispară—atunci (11.20) ar da soluția explicită a acestor probleme. Astfel de pildă, dacă cunoaștem

$$u|_{\mathcal{S}} = g, \quad (1)$$

va trebui ca termenul care conține $\sigma_n(u)|_{\mathcal{S}}$ să se anuleze. Dimpotrivă, dacă cunoaștem

$$\sigma_n(u)|_{\mathcal{S}} = f, \quad (2)$$

atunci va trebui să dispară termenul în care apare $u|_{\mathcal{S}}$. În fine, dacă cunoaștem

$$u|_{\mathcal{S}'} = g, \quad \sigma_n(u)|_{\mathcal{S}''} = f, \quad (3)$$

vor trebui să se anuleze termenii care conțin $\sigma_n(u)|_{\mathcal{S}'}$ și $u|_{\mathcal{S}''}$.

Să căutăm vectorul G_k sub forma sumei

$$G_k = v_k + V_k, \quad (4)$$

unde v_k este soluția lui Kelvin și Somigliana, iar $V_k \in C^2(\mathcal{V})$ și

$$\mathfrak{A}V_k = 0. \quad (5)$$

Matricea celor 9 funcții G_{ki} se notează Γ , și se numește *matricea lui Green*.

Scriind a treia formulă a lui Betti (6.17) pentru u și V_k , ținînd seama de (6.6) și de (5) și grupînd termenii în membrul al doilea, obținem

$$0 = \iiint_{\mathcal{V}} V_k \cdot \mathfrak{A}u \, dV + \iint_{\mathcal{S}} [V_k \cdot \sigma_n(u) - u \cdot \sigma_n(V_k)] \, dS. \quad (6)$$

Să adunăm acum termen cu termen (11.18) și (6), ținînd seama de notația (4), precum și de liniaritatea operatorilor \mathfrak{A} și σ_n . Obținem astfel relația

$$u_k(x) = \iiint_{\mathcal{V}} G_k \cdot \mathfrak{A}u \, dV + \iint_{\mathcal{S}} [G_k \cdot \sigma_n(u) - u \cdot \sigma_n(G_k)] \, dS, \quad (7)$$

care va înlocui formula (11.18) în considerațiile ce vor urma.

Alegînd acum în diferite moduri matricea Γ , așadar în fond soluțiile regulate V_k , putem face să dispară din (7) acele integrale de suprafață care cuprind valorile la limită necunoscute.

Primele rezultate de acest tip aparțin lui G. Lauricella [3]. Menționăm și că I. Fredholm [1] utilizează funcții de tipul lui G_{ki} , sub numele de „funcții compensatoare”.

b) Problema lui Dirichlet

Să considerăm așadar ecuațiile lui Lamé, cu condiția la limită (1). Valorile necunoscute $\sigma_n(u)|_{\mathcal{S}}$ dispar din (7), dacă avem

$$G_k|_{\mathcal{S}} = 0, \quad (8)$$

astfel că soluția se obține sub forma explicită

$$u_k(x) = \iiint_{\mathcal{V}} G_k \cdot F \, dV - \iint_{\mathcal{S}} g \cdot \sigma_n(G_k) \, dS. \quad (9)$$

În virtutea definiției (4), relația (8) conduce la condiția

$$V_k|_{\mathcal{S}} = -v_k|_{\mathcal{S}}. \quad (10)$$

Prin urmare, pentru a găsi matricea lui Green, trebuie să determinăm acea soluție *regulată* (deci unică) a ecuațiilor lui Lamé omogene, care ia valori la limită egale și de semn contrar cu valorile componentelor tenzorului lui Kelvin și Somigliana⁶⁾. Vectorul G_k are deci următoarele proprietăți:

- 1° ca funcție de x_i , este soluție regulată a ecuațiilor lui Lamé omogene în \mathcal{V} , exceptînd punctul ξ ;
- 2° are în punctul ξ o singularitate de același tip cu v_k ;
- 3° se anulează pe frontiera \mathcal{S} a domeniului \mathcal{V} ⁷⁾.

Vectorul G_k este deci soluția problemei echilibrului corpului *mărginit* \mathcal{V} , solicitat de forța unitară i_k aplicată în ξ , avînd frontiera fixată (vezi (8)), și ne-supus acțiunii vreunei forțe de volum. În alcătuirea lui G_k intră vectorul V_k , al cărui rol este de a „corecta” pe v_k (soluția regulată la infinit a aceleiași probleme, formulate însă pentru spațiul nemărginit \mathcal{E}_3).

Evident, vectorul V_k — ca și v_k — este o funcție de *două* puncte: x și ξ . Prin urmare, trebuie să scriem

$$G_k = G_n(x; \xi), \quad \Gamma = \Gamma(x; \xi). \quad (11)$$

Se poate demonstra că acestea sînt funcții *simetrice* de x și ξ , ceea ce permite a se construi teoreme de reciprocitate de tip Maxwell pentru domenii mărginite. (Compară cu § 9, pag. 550; mai general, vezi C. Miranda [1], § 10.)

⁶⁾ Faptul că realizăm cu ajutorul unei soluții regulate, valori ale deplasării egale pe frontieră (abstracție făcînd de semn) cu cele ce rezultă din acțiunea unei forțe unitare concentrate, nu contrazice teorema de unicitate: soluția lui Kelvin și Somigliana nu este regulată, și teorema lui Kirchhoff nu poate ține seama de ea.

⁷⁾ Vectorul G_k nu este o soluție regulată a ecuațiilor lui Lamé, și de aceea omogenitatea ecuațiilor și a condițiilor la limită *nu* atrage după sine anularea soluției.

Relația (9) dă așadar *prin integrale definite* soluția problemei lui Dirichlet pentru *orice* domeniu mărginit \mathcal{V} , cu *orice* constante elastice λ, μ , și cu *orice* date la limită în deplasări, — dacă cunoaștem matricea lui Green $\Gamma(x; \xi)$. Rezolvarea oricărei probleme Dirichlet pentru ecuațiile lui Lamé se poate deci efectua (în principiu) în două etape:

1° rezolvarea unei *anumite* probleme Dirichlet (vezi (10)) pentru corpul considerat, cu date la limită ce depind *numai* de forma sa și de material;

2° calcularea unor *integrale definite*, ce depind de datele F și g , și de soluția problemei particulare anterior rezolvate.

c) Problema lui Neumann

Să considerăm acum ecuațiile lui Lamé cu condiția la limită (2). Valorile necunoscute $\sigma_n|_{\mathcal{S}}$ dispar din expresia (7), dacă avem

$$\sigma_n(G_k)|_{\mathcal{S}} = 0, \quad (12)$$

ceea ce conduce la soluția problemei sub formă explicită

$$u_k(x) = \iiint_{\mathcal{V}} G_k \cdot F \, dV + \iint_{\mathcal{S}} f \cdot G_k \, dS, \quad (13)$$

de același tip cu (9). (Matricele lui Green pentru diferitele probleme fundamentale sînt desigur diferite.) Ținînd seama de (12) și (4), se obține condiția

$$\sigma_n(V_k)|_{\mathcal{S}} = -\sigma_n(v_k)|_{\mathcal{S}}, \quad (14)$$

analogă cu (10). Dar o astfel de soluție regulată a ecuațiilor lui Lamé nu poate exista. Într-adevăr, dacă G_k este soluția ecuațiilor Lamé omogene cu condiția la limită omogenă (12), aceasta înseamnă că corpul mărginit \mathcal{V} trebuie să fie în echilibru sub acțiunea *unei singure* forțe unitare, corespunzătoare singularității ce intervine în v_k — ceea ce este cu neputință.

Dificultatea poate fi ocolită în două moduri.

Pe de o parte, se poate presupune că un punct oarecare al corpului este fixat, ceea ce duce la apariția unei forțe de reacțiune care echilibrează forța unitară corespunzătoare soluției v_k (vezi de ex. E. Trefftz [3], § 49).

Pe de altă parte, se poate urma același drum ca în studiul problemei similare pentru ecuația lui Laplace (vezi de ex. S. Sobolev [3], § 31.2). Anume, se presupune (L. Solomon [4]) că G_k verifică condiția omogenă (12) (care permite să se scrie soluția sub forma (13)), dar e soluție a unei ecuații Lamé *ne-omogene*, al cărei membru al doilea e ales în așa fel, încît \mathcal{V} să fie în echilibru. Se constată atunci că aceste forțe de volum pot fi întotdeauna determinate, astfel încît vectorul G_k este caracterizat de următoarele proprietăți:

1° ca funcție de x_i , este soluție regulată a ecuațiilor Lamé ne-omogene în \mathcal{V} , excep-tînd punctul ξ ;

2° are în punctul ξ o singularitate de același tip cu v_k ;

3° conduce la tensiuni $\sigma_n(G_k)$ nule pe frontiera \mathcal{S} a domeniului \mathcal{V} .

Cele spuse mai sus prîvitor la posibilitatea de a rezolva problema în două etape succesive, rămîn și aci valabile.

d) Problema mixtă

Dificultățile suplimentare legate de condițiile lui Neumann nu mai apar, datorită prezenței reacțiunilor (fictive) în punctele frontieră cu deplasare reală dată u , reacțiuni care echilibrează tensiunile (fictive) corespunzătoare vectorului G_k .

Din condiția la limită (3) urmează că trebuie să cerem

$$G_k|_{\mathcal{S}'} = 0, \quad \sigma_n(G_k)|_{\mathcal{S}''} = 0, \quad (15)$$

astfel că soluția problemei mixte se scrie sub forma explicită

$$u_k(x) = \iiint_{\mathcal{V}} G_k \cdot F \, dV - \iint_{\mathcal{S}'} g \cdot \sigma_n(G_k) \, dS + \iint_{\mathcal{S}''} f \cdot G_k \, dS. \quad (16)$$

e) Concluzii

Pentru toate problemele considerate, dificultatea constă în determinarea efectivă a matricii lui Green. (Se știe de altfel că nici în cazul ecuației lui Laplace în \mathcal{E}_3 , funcția lui Green nu a putut fi construită decât pentru foarte puține domenii.)

De aceea, acest punct de vedere are în primul rînd importanță teoretică. Printre altele, pe această cale poate fi abordată chestiunea existenței soluției. De asemenea, se pot cerceta proprietățile soluției pentru diferite proprietăți ale frontierei, ale datelor la limită etc.

Una din problemele cele mai interesante de studiat pornind de la aceste reprezentări, este cea a marginilor (a_α se vedează § 1, pag. 512).

În legătură cu teoria matricilor lui Green și a soluțiilor fundamentale, cităm încă B. Boley [1]; V. Hristoforov [1] (relativ la cazul plan); N. Kinoshita și T. Mura [1]; — dar mai ales V. Kupradze [2], [3].

OBSERVAȚIE. Pentru a încheia, să remarcăm că toate cele prezentate în acest capitol subliniază strînsa legătură dintre ecuația lui Laplace și ecuațiile lui Lamé — dar totodată și caracterul considerabil mai complicat al acestora din urmă. Pentru a ne convinge de aceasta, este suficient să amintim structura operatorului $\sigma_n(u)$ din (1.9): să comparăm formulele lui Green din § 2 cu formulele lui Betti din § 6; soluțiile fundamentale (2.16) și (8.43); formulele integrale fundamentale (2.18) și (11.18); reprezentările prin funcții Green din (2.37) și (7).

CAPITOLUL 8

PROBLEMA BULEI ELASTICE

§ 1. GENERALITĂȚI

G. Lamé [2] a fost primul care a rezolvat problema lui Neumann pentru domeniul mărginit de două sfere concentrice. El a transcris ecuațiile elasticității în coordonate sferice, și a dezvoltat datele la limită în serii duble de funcții trigonometrice și polinoame Legendre generalizate, ajungând prin identificare la un șir de sisteme de câte 12 ecuații liniare pentru 12 necunoscute, din care se obțin coeficienții dezvoltărilor în serie pentru soluție.

Un pas esențial înainte a fost făcut de către lord Kelvin [3] (retipărit în [4], vol. 3), și în același timp de către A. Clebsch [1]. Kelvin renunță la folosirea coordonatelor sferice, și caută soluția sub forma unor serii de polinoame armonice omogene, dezvoltând totodată datele la limită în serii de funcții sferice superficiale și determinând coeficienții prin identificare. Ideea este similară celei folosite în §§ 5.20 și 6.14 pentru coroana circulară. Aceasta a fost prima problemă concretă în rezolvarea căreia s-a făcut uz de reprezentarea soluției prin potențiali armonici de deplasare.

Mai târziu, J. Boussinesq [2] folosește o reprezentare a lui u care prezintă avantajul că vectorul de corecție (vezi § 7.4) se anulează pe sfera-frontieră. În acest mod, problema lui Dirichlet pentru u se reduce la o problemă Dirichlet pentru B , așadar la trei probleme Dirichlet pentru trei ecuații Laplace separate. În cazul problemei lui Neumann, se ajunge tot la un număr finit de probleme Dirichlet pentru ecuația Laplace — dar calculele sînt extrem de greoaie. Pentru detalii vezi A. Love [1], capitolul 11; O. Tedone și A. Timpe [1], § 4; E. Trefftz [3], §§ 37 și 38. Vezi și soluția mai veche a lui C. Somigliana [2].

Primele două probleme fundamentale pentru bula elastică, pentru spațiul cu o cavitate sferică, și pentru domeniul mărginit de două sfere concentrice, au primit o rezolvare unitară abia relativ de curînd, în lucrarea lui A. Lurie [3] (vezi și [4], cap. 6 și 8). Ideea de bază rămîne cea a lui Kelvin și Clebsch, dar Lurie utilizează reprezentarea lui Grodskii (în aparență mai puțin adecvată problemei!) și faptul că cea de a patra funcție a lui Grodskii nu este independentă de primele trei. Soluția obținută pentru problema lui Dirichlet nu e esențial nouă. În schimb, soluția problemei lui Neumann apare principial tot atît de simplă, și de același tip cu cea dintîi. (Pentru domeniul mărginit de două sfere excentrice, vezi R. Kaufman [1].)

În această soluție nu sînt de efectuat operații de integrare, cu excepția celor necesare pentru dezvoltarea în serie a datelor la limită. Acesta este încă un avantaj al metodei lui Lurie.

Menționăm încă și problema bulei supuse la sarcini concentrate, examinată de E. Sternberg și F. Rosenthal [1] (vezi și F. Field [1]) și reluată de A. Lurie [4], § 6.7.

Spre deosebire de problema plană, ne vom mărgini la a expune cazul bulei, îndestulător pentru a înțelege metoda. Pentru celelalte două cazuri, și pentru exemple mai dificile, trimitem la lucrările citate.

§ 2. OPERATORII LUI LURIE

Să considerăm un vector B_k , de componente armonice și omogene de grad (întreg) k . Pentru $k \geq 0$, aceste componente sînt polinoame.

Ne propunem să determinăm anumiți operatori care să asocieze vectorului B_k — alți vectori, de asemenea armonici și de grad k . (Utilitatea acestor operatori se va evidenția în paragrafele următoare.)

Amintim că orice funcție armonică și omogenă de grad k are forma $R^k Y_k(\theta, \varphi)$, unde constantele arbitrare din (7.2.53) sînt presupuse ca incluse în expresia funcției $Y_k(\theta, \varphi)$.

Dar funcției Y_k i se poate asocia și funcția armonică $R^{-k-1} Y_k(\theta, \varphi)$. Prin urmare, împărțind o funcție armonică și omogenă de grad k la R^{2k+1} , se obține o funcție de asemenea armonică, și de grad $-k-1$. Tot astfel, înmulțind o funcție armonică și omogenă de grad $-k-1$ cu R^{2k+1} , căpătăm o funcție armonică și omogenă de grad k . Vom insista permanent asupra conservării simultane a *armonicității* și *omogenității* funcțiilor cu care operăm.

În particular, remarcăm că prin aplicarea unuia dintre operatorii grad, div sau rot, proprietățile de armonicitate și omogenitate se conservă (gradul reducîndu-se cu o unitate).

Să considerăm acum vectorul B_k , pe care îl vom scrie

$$B_k(x_1, x_2, x_3) = R^k Y_k(\theta, \varphi), \quad (1)$$

unde am notat cu Y_k un vector ale cărui componente Y_{ki} sînt funcții sferice superficiale de ordin k .

Împărțind pe B_k la R^{2k+1} , obținem vectorul armonic

$$R^{-2k-1} B_k = R^{-k-1} Y_k = B_{-k-1}. \quad (2)$$

Mai departe, expresia $\text{div}(R^{-2k-1} B_k)$ este un scalar armonic de grad $-k-2$; produsul $R^{2k+3} \text{div}(R^{-2k-1} B_k)$ este un scalar armonic de grad $k+1$; în fine

$$K(B_k) = \text{grad}[R^{2k+3} \text{div}(R^{-2k-1} B_k)] \quad (3)$$

este un vector armonic și omogen de grad k .

Pe de altă parte, scalarul $\operatorname{div} \mathbf{B}_k$ este armonic și de grad $k-1$. Împărțindu-l la $R^{2(k-1)+1} = R^{2k-1}$, obținem un scalar armonic de grad $-k$, al cărui gradient este armonic și de grad $-k-1$; în fine, înmulțindu-l pe acesta cu R^{2k+1} , obținem vectorul armonic și omogen de grad k :

$$\mathbf{T}(\mathbf{B}_k) = R^{2k+1} \operatorname{grad} (R^{-2k+1} \operatorname{div} \mathbf{B}_k). \quad (4)$$

Cei doi operatori (3) și (4) asociază deci lui \mathbf{B}_k , niște vectori de asemenea armonici și omogeni, de același grad k . Acești operatori au fost introduși de către A. Lurie [3] ca un mijloc de calcul comod în problema bulei. Pentru a-i explicita, vom folosi unele formule elementare de analiză vectorială, deja utilizate în § 7.8. Avem pe rînd

$$\begin{aligned} K(\mathbf{B}_k) &= \operatorname{grad} [R^{2k+3} (R^{-2k-1} \operatorname{div} \mathbf{B}_k + \mathbf{B}_k \cdot \operatorname{grad} R^{-2k-1})] \\ &= \operatorname{grad} [R^2 \operatorname{div} \mathbf{B}_k - (2k+1) \mathbf{x} \cdot \mathbf{B}_k] \\ &= -(2k+1) \operatorname{grad} (\mathbf{x} \cdot \mathbf{B}_k) + R^2 \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{B}_k + 2 \mathbf{x} \operatorname{div} \mathbf{B}_k, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(\mathbf{B}_k) &= R^{2k+1} [R^{-2k+1} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{B}_k - (2k-1) R^{-2k-1} \mathbf{x} \operatorname{div} \mathbf{B}_k] \\ &= -(2k-1) \mathbf{x} \operatorname{div} \mathbf{B}_k + R^2 \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{B}_k. \end{aligned} \quad (6)$$

Luați separat, termenii din expresiile finale (5), (6) sînt tot omogeni și de grad k , dar nu mai sînt în general armonici. În particular, se vede că unii din ei se regăsesc în ambele expresii.

Să calculăm și rotaționalul și divergența vectorilor definiți în (3) și (4). Din (3) deducem imediat:

$$\operatorname{rot} K(\mathbf{B}_k) = 0, \quad (7)$$

$$\operatorname{div} K(\mathbf{B}_k) = \Delta [R^{2k+3} \operatorname{div} (R^{-2k-1} \mathbf{B}_k)] = 0. \quad (8)$$

Mai departe, avem

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{T}(\mathbf{B}_k) &= (\operatorname{grad} R^{2k+1}) \cdot \operatorname{grad} (R^{-2k+1} \operatorname{div} \mathbf{B}_k) + \\ &+ R^{2k+1} \operatorname{div} \operatorname{grad} (R^{-2k+1} \operatorname{div} \mathbf{B}_k), \end{aligned}$$

unde ultimul termen este evident nul. În primul termen din al doilea membru, sîntem conduși să facem uz de teorema lui Euler pentru funcții omogene ¹⁾:

$$\mathbf{x} \cdot \operatorname{grad} f_k = \sum_{i=1}^3 x_i f_{k,i} = k f_k, \quad (9)$$

de unde urmează

$$\operatorname{div} \mathbf{T}(\mathbf{B}_k) = -k(2k+1) \operatorname{div} \mathbf{B}_k. \quad (10)$$

¹⁾ Se înțelege că nu avem nici un fel de sumare în raport cu k . Acolo unde este cazul, o astfel de sumare se indică cu semnul \sum_k .

În sfârșit avem și

$$\operatorname{rot} T(B_k) = (\operatorname{grad} R^{2k+1}) \times \operatorname{grad} (R^{-2k+1} \operatorname{div} B_k),$$

(întrucât un al doilea termen, conținând în factor rotaționalul unui gradient, e nul). De aci urmează (deoarece avem $x \times x = 0$):

$$\operatorname{rot} T(B_k) = (2k + 1) x \times \operatorname{grad} \operatorname{div} B_k. \quad (11)$$

§ 3. PROBLEMA LUI DIRICHLET PENTRU BULA ELASTICĂ

Soluția va fi căutată sub forma reprezentării lui Grodskii

$$u = B - \frac{1}{4(1-\nu)} \operatorname{grad} (x \cdot B + B_0). \quad (1)$$

Pentru $F = 0$, funcțiile B și B_0 sînt armonice, și vor fi căutate sub forma unor serii de polinoame armonice. Prin analogie cu tehnica folosită în capitolele 5 și 6, și conform celor spuse în § 7.4, pag. 529, vom încerca să transferăm informațiile de care dispunem (în speță, deplasările la limită) asupra potențialilor armonici B și B_0 . Prima problemă constă în determinarea coeficienților seriilor pentru B și B_0 ; cea de-a doua, în studiul convergenței seriilor astfel construite.

Să începem prin a pune potențialii lui Grodskii sub forma

$$B = \sum_{k=0}^{\infty} B_k, \quad B_0 = \sum_{k=0}^{\infty} B_k^0, \quad (2)$$

unde componentele lui B_k , precum și B_k^0 , sînt polinoame armonice de grad k . Introducînd (2) în (1), vom scrie

$$u = \sum_{k=0}^{\infty} u_k, \quad (3)$$

$$u_k = B_k - \frac{1}{4(1-\nu)} \operatorname{grad} (x \cdot B_k) - \frac{1}{4(1-\nu)} \operatorname{grad} B_{k-1}^0. \quad (4)$$

În formula (4), primii doi termeni din membrul al doilea sînt omogeni și de grad k , iar ultimul este omogen și de grad $k-2$. Această deosebire va fi justificată ulterior. Termenul mijlociu din membrul al doilea nu este un vector armonice.

Să izolăm în u_k termenii armonici și omogeni — operație pregătită prin raționamentele din § 2. Întrucît singurul termen nearmonic din (4)

apare în ambele expresii (2.5), (2.6), valoarea lui se capătă eliminând $x \operatorname{div} B_k$ din aceste două relații. După calcule elementare, obținem

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} (x \cdot B_k) = & - \frac{1}{2k+1} \left[K(B_k) + \frac{2}{2k-1} T(B_k) \right] + \\ & + \frac{1}{2k-1} R^2 \operatorname{grad} \operatorname{div} B_k, \end{aligned} \quad (5)$$

unde paranteza dreaptă din membrul al doilea este o componentă armonică și omogenă de grad k a vectorului $\operatorname{grad} (x \cdot B_k)$. Introducînd (5) în (4), vom scrie acum

$$u_k = U_k - \frac{1}{4(1-\nu)} \left[\frac{R^2}{2k-1} \operatorname{grad} \operatorname{div} B_k + \operatorname{grad} B_{k-1}^0 \right], \quad (6)$$

unde am notat

$$U_k = B_k + \frac{1}{4(1-\nu)} \left[\frac{1}{2k+1} K(B_k) + \frac{2}{4k^2-1} T(B_k) \right]. \quad (7)$$

Evident, U_k este un vector armonic de grad k . Dacă am cunoaște valoarea sa la limită, ar rămîne de rezolvat o problemă Dirichlet pentru ecuația lui Laplace pentru bulă — problemă a cărei soluție este cunoscută (vezi indicația de la finele § 7.2, pag. 523; pentru detalii, vezi de ex. V. Smirnov [2], vol. 3, partea 2, pct. 136).

Pentru a transfera datele la limită — formulate pentru u_k — asupra componentei sale armonice U_k , este suficient să alegem B_0 în așa fel, încît paranteza din membrul al doilea din (6) să se anuleze pe frontiera bulei, fie ea $R = R_0$. În principiu, lucrul este posibil, întrucît bula este un domeniu convex (vezi § 7.5).

Primul termen din paranteza dreaptă considerată este omogen și de grad k , dar nu și armonic. Pentru $R = R_0$, el ia valoarea $(2k-1)^{-1} R_0^2 (\operatorname{grad} \operatorname{div} B_k)|_{R=R_0}$, care poate fi privită drept valoare la limită a vectorului armonic $(2k-1)^{-1} R_0^2 \operatorname{grad} \operatorname{div} B_k$, de componente de grad $k-2$. Anularea parantezei drepte impune condiția

$$\operatorname{grad} B_{k-1}^0|_{R=R_0} = - (2k-1)^{-1} R_0^2 \operatorname{grad} \operatorname{div} B_k|_{R=R_0}. \quad (8)$$

Întrucît ambii membri din (8) sînt valori la limită ale unor funcții armonice în bula considerată, rezultă (în virtutea unicității soluției problemei lui Dirichlet pentru ecuația lui Laplace) că cele două funcții coincid și în bula de rază R_0 , așadar că, integrînd, avem

$$B_{k-1}^0 = - (2k-1)^{-1} R_0^2 \operatorname{div} B_k. \quad (9)$$

Aceasta este o consecință evidentă a înlocuirii lui R^2 prin R_0^2 în condiția la limită. Rezultatul justifică alegerea făcută în (4) pentru gradul polinomului provenit din B_0 .

Acest raționament constituie un exemplu de utilizare a rezultatului general al lui Eubanks și Sternberg. El arată totodată justetea ideii lui Papkovici (vezi § 7.5, pag. 537).

Să introducem acum (9) în (6). Obținem astfel

$$u_k = U_k - [1/4 (1 - \nu) (2k - 1)] (R^2 - R_0^2) \text{grad div } B_k. \quad (10)$$

Acum este momentul să facem uz de datele la limită :

$$u|_{R=R_0} = g(\theta, \varphi). \quad (11)$$

În acest scop, să dezvoltăm vectorul g în serie de vectori sferici superficiali

$$g(\theta, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} Y_k(\theta, \varphi). \quad (12)$$

Desigur, pentru fiecare din cele 3 componente ale vectorului g și pentru fiecare indice k , obținem $2k + 1$ coeficienți, (vezi (7.2.55)). Vom considera acești coeficienți ca incluși în expresiile $Y_k(\theta, \varphi)$.

Pe de altă parte, luând $R = R_0$ în (10), obținem

$$u_k|_{R=R_0} = U_k|_{R=R_0}, \quad (13)$$

astfel că din (3) și (11)–(13) conchidem că

$$\sum_{k=0}^{\infty} U_k|_{R=R_0} = \sum_{k=0}^{\infty} Y_k(\theta, \varphi). \quad (14)$$

În primul membru, apare o dezvoltare în serie de vectori armonici omogeni polinomiali pe sfera frontieră. Din proprietățile cunoscute ale sistemelor de funcții sferice superficiale (vezi de ex. A. Tihonov și A. Samarskii [1], anexa 2, § 2), egalitatea (14) este posibilă dacă și numai dacă termenii corespunzători sînt egali :

$$U_k|_{R=R_0} = Y_k(\theta, \varphi). \quad (15)$$

Soluția acestei probleme la limită interioare este evident

$$U_k(x_1, x_2, x_3) = (R/R_0)^k Y_k(\theta, \varphi), \quad (16)$$

astfel că primul termen al expresiei (10) este acum efectiv cunoscut.

Pentru a-l găsi pe cel de-al doilea, s-ar părea că trebuie să cunoaștem vectorul B_k , așadar să rezolvăm relația (7) ca ecuație în B_k . În fapt, în (10) intervine numai $\text{div } B_k$. Aplicînd operatorul div în ambii membri din (7), și ținînd seama de (2.8) și (2.10), obținem ușor

$$\text{div } B_k = \{[2(2k - 1)(1 - \nu)]/[2(2k - 1)(1 - \nu) - k]\} \text{div } U_k. \quad (17)$$

Introducînd această expresie în (10) și făcînd uz de (3), deducem

$$u = \sum_{k=0}^{\infty} U_k - \frac{1}{2} (R^2 - R_0^2) \sum_{k=0}^{\infty} [2(2k - 1)(1 - \nu) - k]^{-1} \text{grad div } U_k,$$

unde a doua sumă are termeni ne-nuli numai pentru $k \geq 2$. Înlocuind aci pe k prin $k + 2$ și ținând seama de (16), obținem soluția problemei sub forma (compară cu § 6.14 relativ la coroana circulară)

$$u = \sum_{k=0}^{\infty} (R/R_0)^k Y_k(\theta, \varphi) - \frac{1}{2} (R^2 - R_0^2) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\text{grad div} [(R/R_0)^{k+2} Y_{k+2}(\theta, \varphi)]}{2(2k+3)(1-\nu) - k - 2}. \quad (18)$$

OBSERVAȚIA. 1. Pentru ca seria (18) să fie efectiv soluția problemei, trebuie să se demonstreze că ea converge și că suma ei este de clasă C^2 , rezultat fără de care algoritmul de mai sus rămîne formal. Problema este similară celei din § 6.14, pp. 442 — 445.

Convergența seriei din (12) este aci asigurată dacă $\mathbf{g} = \mathbf{g}(\theta, \varphi)$ satisface condițiile din § 7.2, pag. 522. Aceasta asigură mai departe convergența primei serii din (18) pentru $R \leq R_0$. Dar pentru a demonstra convergența celei de a doua, sînt necesare noi condiții pentru vectorul \mathbf{g} , de unde să urmeze evaluări analoge cu (6.14.42) — (6.14.49). Chestiunea nu e încă elucidată.

Merită totuși de remarcat că metoda conduce la o soluție convergentă chiar pentru date la limită ce nu satisfac nici pe departe astfel de condiții de regularitate. (Vezi de ex. A. Lurie [4], §§ 6.7 și 6.8; compară mai sus cu observația din § 6.14, pag. 444.)

OBSERVAȚIA 2. Odată demonstrată convergența seriei de mai sus, orice sumă parțială a ei poate fi privită ca soluție aproximativă a aceleiași probleme.

OBSERVAȚIA 3. În § 7.2 am văzut că aceeași funcție Y_k permite să construim două funcții armonice: $R^k Y_k$ și $R^{-k-1} Y_k$, dintre care a doua este analitică în exteriorul oricărei sfere cu centrul în origine. Aceasta permite rezolvarea problemei lui Dirichlet pentru spațiul elastic cu o cavitate sferică, prin simpla înlocuire a lui k prin $-k-1$ în toate relațiile de mai sus. Pentru domeniul mărginit de două sfere concentrice S_0, S_1 , rămîne de suprapus o soluție corespunzînd exteriorului sferei interioare S_1 și una care corespunde interiorului sferei exterioare S_0 ; coeficienții se determină din cele două condiții la limită, scrise pe S_0 și S_1 .

§ 4. PROBLEMA LUI NEUMANN PENTRU BULA ELASTICĂ

Spre deosebire de cazul plan, problema lui Neumann în \mathcal{E}_3 trebuie rezolvată de obicei pe căi deosebite de cele urmate în problema lui Dirichlet. Soluția lui Lurie în problema pentru bulă prezintă tocmai avantajul unei strînse analogii cu cea din problema lui Dirichlet: și în acest caz soluția se caută sub forma (3.1) — (3.4), se separă componenta armonică a expresiei ale cărei valori la limită sînt date, și aceasta conduce din nou la anumite probleme Dirichlet pentru ecuația lui Laplace. Dar această separare nu se mai efectuează în expresia relativ simplă (3.4): aci trebuie să scriem vectorul tensiune prin intermediul funcțiilor \mathbf{B} și B_0 , și abia în expresia acestuia să izolăm componenta armonică.

Să începem prin a exprima σ_n prin intermediul lui B_k și B_{k-1}^0 . Vom face uz de (7.1.9), unde este comod să ținem seama de (7.2.4):

$$\sigma_n(u) = 2\mu \left[\nu(1 - 2\nu)^{-1} n \operatorname{div} u + (n \cdot \operatorname{grad}) u + \frac{1}{2} n \times \operatorname{rot} u \right]. \quad (1)$$

Va fi suficient să calculăm vectorul tensiune *pe o sferă*, așadar pentru $n = x/R$, astfel că (1) devine:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\mu} R \sigma_n(u) = & \nu(1 - 2\nu)^{-1} x \operatorname{div} u + (x \cdot \operatorname{grad}) u + \\ & + \frac{1}{2} x \times \operatorname{rot} u. \end{aligned} \quad (2)$$

Ținând seama de (3.1) — (3.4), ne vom mărgini la a efectua calculele pentru

$$u_k = B_k - \frac{1}{4(1 - \nu)} \operatorname{grad} (x \cdot B_k + B_{k-1}^0). \quad (3)$$

Pentru a introduce (3) în (2), vom calcula mai întâi

$$\operatorname{div} u_k = \frac{1}{2} (1 - 2\nu) (1 - \nu)^{-1} \operatorname{div} B_k \quad (4)$$

(unde am ținut seama de (7.4.9)). Mai departe, din (3) urmează

$$\operatorname{rot} u_k = \operatorname{rot} B_k. \quad (5)$$

Cantitatea $(x \cdot \operatorname{grad}) u_k$ se calculează ținând seama de (2.9) și de faptul că primii doi termeni din membrul al doilea din (3) sînt funcții de grad k , iar al treilea este de grad $k - 2$:

$$\begin{aligned} (x \cdot \operatorname{grad}) u_k = & k B_k - \frac{1}{4(1 - \nu)} k \operatorname{grad} (x \cdot B_k) - \\ & - \frac{1}{4(1 - \nu)} (k - 2) \operatorname{grad} B_{k-1}^0. \end{aligned} \quad (6)$$

Introducînd acum (3) — (6) în (2), obținem pentru $n = x/R$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\mu} R \sigma_n(u_k) = & \frac{\nu}{2(1 - \nu)} x \operatorname{div} B_k + k B_k - \frac{1}{4(1 - \nu)} k \operatorname{grad} (x \cdot B_k) - \\ & - \frac{1}{4(1 - \nu)} (k - 2) \operatorname{grad} B_{k-1}^0 + \frac{1}{2} x \times \operatorname{rot} B_k. \end{aligned} \quad (7)$$

Pentru a izola aci componentele armonice, vom observa că (2.6) duce la

$$x \operatorname{div} B_k = - (2k-1)^{-1} T(B_k) + (2k-1)^{-1} R^2 \operatorname{grad} \operatorname{div} B_k. \quad (8)$$

Mai departe, pentru termenul $\operatorname{grad} (x \cdot B_k)$ dispunem de relația (3.5). În fine, pentru a calcula ultimul termen din (7), vom ține seama că

$$\operatorname{grad} (x \cdot B_k) = (x \cdot \operatorname{grad}) B_k + (B_k \cdot \operatorname{grad}) x + x \times \operatorname{rot} B_k + B_k \times \operatorname{rot} x \quad (9)$$

(vezi de ex. N. Kocin [1], § 17, pct. 1). Or, avem pe rînd

$$(x \cdot \operatorname{grad}) B_k = x_i B_{k,i} = k B_k, \quad \operatorname{rot} x = 0,$$

$$(B_k \cdot \operatorname{grad}) x = B_{ki} (i_j x_j)_{,i} = B_{kj} i_j = B_k,$$

astfel că (9) conduce la

$$x \times \operatorname{rot} B_k = \operatorname{grad} (x \cdot B_k) - (k+1) B_k. \quad (10)$$

Introducînd acum (8), (10) și (3.5) în (7), obținem

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\mu} R \sigma_n(u_k) = H_k - \frac{1}{4(1-\nu)} (k-2) [(2k-1)^{-1} R^2 \operatorname{grad} \operatorname{div} B_k + \\ + \operatorname{grad} B_{k-1}^0], \end{aligned} \quad (11)$$

unde am notat

$$\begin{aligned} H_k = \frac{1}{2} (k-1) B_k + \frac{k-2+2\nu}{4(1-\nu)(2k+1)} K(B_k) + \\ + \frac{k(1-2\nu)-2+\nu}{2(1-\nu)(4k^2-1)} T(B_k). \end{aligned} \quad (12)$$

Evident, H_k este un vector armonic de grad k , iar descompunerea (11), (12) este analogă cu (3.6), (3.7), și poate fi utilizată în același mod. Mai mult, se vede că paranteza dreaptă din (11) coincide cu cea din (3.6), astfel că toate raționamentele din § 3, pag. 571, relative la determinarea scalarului B_{k-1}^0 , rămîn valabile.

Putem face uz acum de datele la limită de care dispunem :

$$\sigma_n(u)|_{R=R_0} = f(\theta, \varphi). \quad (13)$$

În acest scop, vom dezvolta vectorul $R_0 f(\theta, \varphi)/2\mu$ (compară cu primul membru din (11)) în serie de vectori sferici superficiali

$$\frac{1}{2\mu} R_0 f(\theta, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} Y_k(\theta, \varphi). \quad (14)$$

Mai departe, alegînd pe B_{k-1}^0 sub forma (3.9), din (11) urmează

$$\frac{1}{2\mu} R \sigma_n(u_k)|_{R=R_0} = H_k|_{R=R_0}, \quad (15)$$

astfel că din (3.3) și (13) — (15) deducem

$$\sum_{k=0}^{\infty} H_k|_{R=R_0} = \sum_{k=0}^{\infty} Y_k(\theta, \varphi). \quad (16)$$

În deplină analogie cu (3.15), putem scrie $H_k|_{R=R_0} = Y_k$, și deci :

$$H_k(x_1, x_2, x_3) = (R/R_0)^k Y_k(\theta, \varphi). \quad (17)$$

Cu aceasta, componenta armonică H_k a expresiei (11) este determinată. Pentru a o găsi pe cea ne-armonică, este suficient — ca și în § 3 — să calculăm $\operatorname{div} B_k$. În acest scop, vom aplica operatorul div în ambii membri din (12). Ținând seama de (2.8) și (2.10), deducem ușor

$$\operatorname{div} B_k = \{[2(1-\nu)(2k-1)]/[k^2 - (1-2\nu)k + 1 - \nu]\} \operatorname{div} H_k. \quad (18)$$

Introducând în fine (3.9), (17) și (18) în (11), înmulțind cu $2\mu/R$ și sumând în raport cu k , obținem

$$\begin{aligned} \sigma_n(u) = & 2\mu R^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} (R/R_0)^k Y_k(\theta, \varphi) - \\ & - \frac{1}{2} \mu (R^2 - R_0^2) \sum_{k=0}^{\infty} \{[k-2]/[k^2 - (1-2\nu)k + 1 - \nu]\} \times \\ & \times \operatorname{grad} \operatorname{div} [(R/R_0)^k Y_k(\theta, \varphi)]. \end{aligned} \quad (19)$$

Cu aceasta, dispunem deci de valorile $\sigma_n(u)$ pentru $n = x/R$, așadar numai pe sfere concentrice de raze $R \leq R_0$. Cunoașterea componentelor tensiunii nu rezultă de aci, astfel că ecuațiile fizico-geometrice nu pot fi integrate.

De aceea, vectorul armonic H_k odată determinat în (17), să ne fixăm atenția asupra rezolvării relației (12), privită ca o ecuație în raport cu B_k .

Formula (18) dă imediat $\operatorname{div} B_k$ ca funcție de H_k .

Aplicând operația rot în ambii membri din (12) și ținând seama de (2.7) și (2.11), căpătăm mai întâi

$$\frac{1}{2} (k-1) \operatorname{rot} B_k + \frac{k(1-2\nu) - 2 + \nu}{2(1-\nu)(2k-1)} x \times \operatorname{grad} \operatorname{div} B_k = \operatorname{rot} H_k \quad (20)$$

și mai departe, introducând aci $\operatorname{div} B_k$ din (18) :

$$\operatorname{rot} B_k = \frac{2}{k-1} \left[\operatorname{rot} H_k - \frac{k(1-2\nu) - 2 + \nu}{k^2 - (1-2\nu)k + 1 - \nu} x \times \operatorname{grad} \operatorname{div} H_k \right]. \quad (21)$$

Formulele (18) și (21) dau divergența și rotaționalul vectorului B_k prin intermediul vectorului cunoscut H_k , ceea ce ar permite să se exprime B_k sub forma unei sume de potențiali newtonieni (vezi de ex. N. Kocin [1], § 19).

În fapt însă, vectorul B_k poate fi obținut fără nici o operație de integrare. În acest scop, să introducem în (12) expresiile $K(B_k)$ din (2.5) (unde vom fi înlocuit pe $\text{grad} (x \cdot B_k)$ cu ajutorul formulei (10)), și $T(B_k)$ din (2.6). În felul acesta, vectorul H_k va apare ca sumă a unor termeni de forma B_k , $x \times \text{rot } B_k$, $x \text{ div } B_k$ și $R^2 \text{ grad div } B_k$. Calculînd al doilea termen $x \times \text{rot } B_k$ cu ajutorul relației (21), vor apare mai departe termeni de forma $x \times \text{rot } H_k$ și $x \times (x \times \text{grad div } H_k)$ ceea ce, după efectuarea dublului produs (vezi de pildă (7.8.30)), conduce la termeni de forma $x(x \cdot \text{grad div } H_k) = (k-1) x \text{ div } H_k$ (întrucît $\text{div } H_k$ este un polinom omogen de grad $k-1$), și la termeni de forma $R^2 \text{ grad div } H_k$. Calculînd al treilea termen $x \text{ div } B_k$, obținem cu ajutorul relației (18) un termen de forma $x \text{ div } H_k$. În fine, cel de al patrulea termen $R^2 \text{ grad div } B_k$ va da, în virtutea aceleiași relații (18), un termen de forma $R^2 \text{ grad div } H_k$.

În definitiv, relația (12) capătă astfel forma unei expresii liniare de legătură între vectorii

$$H_k, B_k, x \times \text{rot } H_k, x \text{ div } H_k, \text{ și } R^2 \text{ grad div } H_k.$$

Efectuînd calculele — obositoare, dar elementare — deducem

$$\begin{aligned} B_k = & \frac{2(1-\nu)}{k(3-4\nu-k)} \left[2H_k - \frac{2-2\nu-k}{(1-\nu)(k-1)} x \times \text{rot } H_k + \right. \\ & + \frac{(2k-1)(k-4+4\nu)\nu + (k-2)(2-2\nu-k)}{(1-\nu)[k^2-(1-2\nu)k+1-\nu]} x \text{ div } H_k + \\ & \left. + \frac{(k\nu-1+\nu)(k-2) + (2k-1)(2-2\nu-k)\nu}{(1-\nu)(k-1)[k^2-(1-2\nu)k+1-\nu]} R^2 \text{ grad div } H_k \right]. \quad (22) \end{aligned}$$

Dat fiind că vectorii H_k sînt cunoscuți sub forma (17), am obținut — fără nici o operație de integrare în plus — vectorii B_k .

Introducînd acum (3.9) în (3.4) vom avea (compară cu (3.10)!)

$$u_k = B_k - \frac{1}{4(1-\nu)} \text{grad} (x \cdot B_k) + \frac{1}{4(1-\nu)} (2k-1)^{-1} R_0^2 \text{grad div } B_k. \quad (23)$$

Să punem aci termenul $\text{grad} (x \cdot B_k)$ sub forma ce rezultă din (10), așadar conținînd un termen de forma $x \times \text{rot } B_k$ și un altul de forma B_k . Mai departe, să introducem în (23) vectorul B_k din (22), vectorul $x \times \text{rot } B_k$ rezultînd din (21), și $\text{grad div } B_k$ ce decurge din (18). În expresia finală a vectorului u_k vor apare deci aceiași termeni ca cei din expresia lui B_k , plus un termen de forma $R_0^2 \text{grad div } H_k$, provenit din ultimul termen din

(23). Calculînd coeficienții cu care toți acești termeni intervin în expresia finală a vectorului u_k , se obține

$$\begin{aligned} u_k = & \frac{1}{k} H_k - \frac{1}{k(k-1)} x \times \text{rot } H_k + \frac{(1-4\nu)k - 2(1-\nu)}{k[k^2 - (1-2\nu)k + 1 - \nu]} x \text{div } H_k + \\ & + \frac{2k\nu - \nu + 1}{k(k-1)[k^2 - (1-2\nu)k + 1 - \nu]} R^2 \text{grad div } H_k - \\ & - \frac{R^2 - R_0^2}{2[k^2 - (1-2\nu)k + 1 - \nu]} \text{grad div } H_k. \end{aligned} \quad (24)$$

Cu aceasta, soluția este efectiv cunoscută sub forma

$$u = \sum_{k=0}^{\infty} u_k, \quad (25)$$

unde H_k sînt dați de (17), iar Y_k — de (14). Singurele operații de integrare sînt cele necesare pentru dezvoltarea în serie a datelor la limită.

OBSERVAȚIE. Ca și pentru problema lui Dirichlet, chestiunea convergenței rămîne deschisă. Reținînd în (25) un număr finit de termeni, se obține și aci o soluție aproximativă a problemei lui Neumann.

Aceeași tehnică poate fi folosită pentru a rezolva problema lui Neumann pentru spațiul elastic cu o cavitate sferică (pentru aceasta, trebuie să înlocuim peste tot indicele k cu $-k-1$), precum și pentru domeniul mărginit de două sfere concentrice (așa numita „problemă a lui Lamé”, a cărei variantă plană a fost examinată la finele § 6.14).

Făcînd raza sferei interioare să tindă la zero, și a celei exterioare, la infinit, se pot obține soluții ale problemei spațiului elastic supus unor acțiuni mecanice concentrate de natură mai complicată decît forța concentrată. (Vezi de ex. A. Lurie [4], finele cap. 8.)

Aceeași soluție rezolvă și problema concentrării tensiunilor în vecinătatea unei cavități sferice (vezi § 6, exemplul *b*).

Analogia dintre modul de rezolvare al problemei lui Dirichlet și al problemei lui Neumann este evidentă; totuși ea nu merge atît de departe ca în cazul problemei plane, pentru a permite studiul de probleme mixte cu date de tip Dirichlet pe una din sfere, și de tip Neumann pe cealaltă.

§ 5. CONDIȚII NECESARE DE EXISTENȚĂ A SOLUȚIEI PROBLEMEI LUI NEUMANN

a) Condiții de existență

Aparent, formulele (4.24), (4.25) determină pe deplin vectorul deplasare u . Dar soluția problemei lui Neumann este cunoscută numai abstracție făcînd de o roto-translație rigidă; iar pentru ca această soluție

să existe, trebuie ca (dacă $F = 0$) forțele superficiale să formeze un sistem static echivalent cu zero. (Vezi § 4.4.)

Să examinăm condițiile impuse datelor la limită (deci funcțiilor Y_k) pentru ca soluția să aibă sens, și să găsim acele componente ale deplasării pe care relațiile din § 4 nu le determină.

Pentru $F = 0$, condițiile necesare de existență au forma

$$\iint_{\mathcal{S}} \sigma_n(u) dS = 0, \quad (1)$$

$$\iint_{\mathcal{S}} x \times \sigma_n(u) dS = 0. \quad (2)$$

Întrucît din (4.13) și (4.14) urmează

$$\sigma_n(u)|_{R=R_0} = 2\mu R_0^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} Y_k(\theta, \varphi), \quad (3)$$

relația (1) devine

$$2\mu R_0^{-1} \iint_{\mathcal{S}} \sum_{k=0}^{\infty} Y_k(\theta, \varphi) dS = 2\mu R_0 \iint_{S_1} \sum_{k=0}^{\infty} Y_k(\theta, \varphi) dS_1 = 0, \quad (4)$$

unde S_1 este sfera unitate $S(0,1)$. Datorită ortogonalității sistemului funcțiilor sferice superficiale, și întrucît $Y_0(\theta, \varphi) = \text{const.}$, putem scrie

$$\iint_{S_1} Y_{ki}(\theta, \varphi) dS_1 = 1/Y_{0j}(\theta, \varphi) \iint_{S_1} Y_{ki}(\theta, \varphi) Y_{0j}(\theta, \varphi) dS_1 = 0 \quad (5)$$

pentru orice $k \neq 0$, și $i, j = 1, 2, 3$. Prin urmare, (4) se reduce la

$$\iint_{S_1} Y_0(\theta, \varphi) dS_1 = 0, \quad (6)$$

de unde, întrucît integrandul este constant, urmează

$$Y_0(\theta, \varphi) = 0. \quad (7)$$

Această relație are o primă consecință importantă: introducînd (7) în (4.19), se vede că componentele tensiunii rămîn mărginite în origine.

Mai departe, introducînd (3) în (2), obținem

$$2\mu R_0^{-1} \iint_{\mathcal{S}} x \times \sum_{k=0}^{\infty} Y_k(\theta, \varphi) dS = 2\mu R_0^2 \iint_{S_1} x \times \sum_{k=0}^{\infty} Y_k(\theta, \varphi) dS_1 = 0. \quad (8)$$

Dar pe sfera S_1 vectorul \mathbf{x} este, evident, un vector sferic superficial de ordinul 1, astfel că (8) se reduce la

$$\iint_{S_1} \mathbf{x} \times Y_1(\theta, \varphi) dS_1 = 0. \quad (9)$$

Mai departe, întrucît pe S_1 avem $\mathbf{x} = \mathbf{n}$, din (7.2.9) urmează :

$$\iint_{S_1} \mathbf{x} \times Y_1 dS_1 = \iint_{S_1} \mathbf{n} \times Y_1 dS_1 = \iiint_{B_1} \text{rot} [(R/R_0) Y_1] dV = 0, \quad (10)$$

unde $(R/R_0) Y_1$ este una dintre funcțiile regulate în bula unitate B_1 și care iau pe frontiera acesteia valoarea Y_1 . Întrucît din (4.17) avem

$$\mathbf{H}_1 = (R/R_0) Y_1, \quad (11)$$

relația (10) conduce la condiția

$$\iiint_{B_1} \text{rot} \mathbf{H}_1 dV = 0. \quad (12)$$

Or, vectorul \mathbf{H}_1 este un vector omogen de grad 1, așadar de rotațional constant, astfel că (12) conduce la

$$\text{rot} \mathbf{H}_1 = 0, \quad (13)$$

ceea ce este echivalent cu

$$\mathbf{H}_1 = \text{grad } h(x_1, x_2, x_3), \quad (14)$$

unde h trebuie să fie un polinom omogen de gradul al doilea :

$$h(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2} h_{ij} x_i x_j, \quad h_{ij} = h_{ji}. \quad (15)$$

Relațiile (7), (11) și (14) arată astfel că datele la limită trebuie să satisfacă condițiile

$$Y_0 = 0, \quad Y_1 = (R_0/R) \text{grad } h|_{R=R_0}. \quad (16)$$

Orice vector Y_k fiind definit de $3(2k+1)$ constante, urmează că prima relație (16) este o condiție de anulare a trei constante; polinomul h fiind la rîndul său definit de 6 coeficienți, a doua relație (16) revine la a reduce cele 9 constante ce definesc pe Y_1 , la numai 6. Relațiile (16) reprezintă deci 6 condiții impuse coeficienților termenilor constant și liniar ai dezvoltării în serie a datelor la limită.

Să trecem acum la studiul expresiilor (4.22) ce definesc vectorii \mathbf{B}_k (L. Solomon [7]). Evident, ele nu au sens pentru $k=0$, $k=1$. Ne vom opri ulterior asupra determinării vectorilor \mathbf{B}_0 , \mathbf{B}_1 .

Pentru $k > 1$, dacă am avea $k^2 - (1 - 2\nu)k + 1 - \nu = 0$, ar urma $\nu = -(k^2 - k + 1)/(2k - 1)$, ceea ce ar conduce la valori $\nu < 0$ lipsite de sens. Pe de altă parte, dacă am avea $3 - 4\nu - k = 0$, am obține $\nu = \frac{3}{4} - \frac{1}{4}k$, unde singura valoare posibilă este $\nu = 0,25$, corespunzătoare lui $k = 2$. Prin urmare, în acest caz vectorul B_2 nu poate fi determinat.

Aceasta nu este o nedeterminare aparentă în (4.22): factorul $(3 - 4\nu - k)$ apare la numitorul *întregii* expresii din membrul al doilea, așadar el este coeficientul lui B_k în expresia liniară despre care am vorbit înainte de (4.22), expresie din care B_2 *lipsește* dacă $\nu = 0,25$. Întrucît paranteza dreaptă din (4.22) *nu e* identic nulă pentru $\nu = 0,25$ și $k = 2$, rezultă că este imposibil de a găsi soluția *pe această cale*. Faptul nu e surprinzător: teorema lui Eubanks și Sternberg își pierde valabilitatea pentru $\nu = 0,25$, și nu mai garantează posibilitatea de a reduce numărul funcțiilor lui Grodskii de la 4 la 3 — reducere admisă odată cu (3.9).

Fie acum $\nu \neq 0,25$. În acest caz relația (4.22) are sens pentru toți $k \geq 2$, și ne rămîne să găsim B_0, B_1 . Scriind (2.5), (2.6) pentru $k = 0, k = 1$, găsim

$$\begin{aligned} K(B_0) &= -\operatorname{grad}(x \cdot B_0) = -B_0, \\ K(B_1) &= -3 \operatorname{grad}(x \cdot B_1) + 2x \operatorname{div} B_1, \\ T(B_0) &= 0, \quad T(B_1) = -x \operatorname{div} B_1. \end{aligned} \quad (17)$$

Introducînd aceste valori în expresia (4.12) scrisă de asemenea pentru $k = 0, k = 1$, obținem

$$-\frac{1}{2}B_0 - \frac{1}{2}K(B_0) = H_0, \quad (18)$$

$$-[(1 - 2\nu)/12(1 - \nu)]K(B_1) - [(1 + \nu)/6(1 - \nu)]T(B_1) = H_1. \quad (19)$$

Ținînd seama de relațiile (4.17) și (7), avem desigur

$$H_0 = 0; \quad (20)$$

introducînd acum prima relație (17) și valoarea (20) în (18), obținem identitatea $0 \equiv 0$. Prin urmare, vectorul B_0 *nu poate fi determinat* din cunoașterea lui $H_0 = 0$, corespunzător la rîndul său condițiilor necesare de existență a soluției. Altfel spus, oricare ar fi datele la limită în tensiuni, vectorul B_0 nu intervine în aceste date, și deci *el poate fi ales arbitrar*.

Pentru a determina vectorul B_1 , să introducem a doua și a patra relație (17) în (19); ținînd seama aci de (4.18) și de (14), deducem

$$[(1 - 2\nu)/4(1 - \nu)]\operatorname{grad}(x \cdot B_1) = \operatorname{grad} h - [\nu/(1 + \nu)]x \operatorname{div} \operatorname{grad} h. \quad (21)$$

Întrucît vectorul B_1 este cunoscut (ca și V_1) prin darea a 9 constante, iar în membrul al doilea din (21) apar numai 6 constante cunoscute, rezultă că B_1 nu poate fi determinat pe deplin.

Într-adevăr, din (15) avem

$$\text{grad } h = h_{ij} x_i \mathbf{i}_j, \quad \text{div grad } h = h_{ii}. \quad (22)$$

Pe de altă parte, vectorul \mathbf{B}_1 are forma

$$\mathbf{B}_1 = b_{ij} x_i \mathbf{i}_j \quad (23)$$

(coeficienții b_{ij} nu sînt simetrici). Obținem deci pe rînd

$$\text{grad } (\mathbf{x} \cdot \mathbf{B}_1) = \mathbf{i}_i (b_{ij} x_i x_j)_{,i} = (b_{ii} + b_{ii}) x_i \mathbf{i}_i, \quad (24)$$

astfel că ecuația (21) devine

$$(b_{ij} + b_{ji}) x_i \mathbf{i}_j = [4(1 - \nu)/(1 - 2\nu)] [h_{ij} x_i \mathbf{i}_j - \nu(1 + \nu)^{-1} h_{ii} x_i \mathbf{i}_i], \quad (25)$$

ceea ce dă imediat cele 6 sume $b_{ij} + b_{ji}$. Acestea sînt *singurele* relații între \mathbf{B}_1 și \mathbf{H}_1 . Prin urmare, constantele b_{ij} sînt determinate numai pentru $i = j$; constantele b_{ij} ($i \neq j$) rămîn necunoscute, și supuse numai condiției ca sumele $b_{ij} + b_{ji}$ să aibă valori date. Acestea din urmă nu se schimbă dacă adăugăm lui \mathbf{B}_1 un vector \mathbf{B}'_1 de componente

$$B'_{11} = -q_3 x_2 + q_2 x_3, \quad B'_{12} = q_3 x_1 - q_1 x_3, \quad B'_{13} = -q_2 x_1 + q_1 x_2, \quad (26)$$

ceea ce, notînd cu \mathbf{q} vectorul de componente (q_1, q_2, q_3) , se scrie

$$\mathbf{B}'_1 = \mathbf{q} \times \mathbf{x}. \quad (27)$$

Prin urmare, \mathbf{B}_1 poate fi determinat numai abstracție făcînd de un termen \mathbf{B}'_1 , care poate fi adăugat lui \mathbf{B}_1 , fără a altera datele la limită. Mai remarcăm că cunoașterea sumelor $b_{ij} + b_{ji}$ fără cunoașterea termenilor b_{ij} în parte, face imposibilă calcularea expresiei rot \mathbf{B}_1 — ceea ce era de prevăzut, întrucît (4.21) nu are sens pentru $k = 1$.

Să facem acum uz de expresiile lui \mathbf{B}_0 și \mathbf{B}_1 pentru a determina \mathbf{u}_0 și \mathbf{u}_1 . Se înțelege că trebuie să revenim acum la (4.23). Întrucît \mathbf{B}_0 este constant, deducem mai întîi

$$\mathbf{u}_0 = [(3 - 4\nu)/4(1 - \nu)] \mathbf{B}_0, \quad (28)$$

astfel că \mathbf{u}_0 rezultă a fi un vector constant *arbitrar*.

Pentru $k = 1$, vom calcula aci numai componenta corespunzătoare vectorului \mathbf{B}'_1 . (Componenta care rămîne efectiv în expresia finală \mathbf{u}_1 se găsește pornind de la formula (23) pentru \mathbf{B}_1 , unde sumele $b_{ij} + b_{ji}$ decurg din (25).) Din (4.23) și (27) obținem deci

$$\mathbf{u}'_1 = \mathbf{q} \times \mathbf{x} - \frac{1}{4(1 - \nu)} \text{grad } [\mathbf{x} \cdot (\mathbf{q} \times \mathbf{x}) + \text{grad div } \mathbf{B}'_1];$$

întrucît produsul $[\mathbf{x} \cdot (\mathbf{q} \times \mathbf{x})]$ și scalarul $\text{div } \mathbf{B}'_1$ sînt nuli, deducem

$$\mathbf{u}'_1 = \mathbf{q} \times \mathbf{x}. \quad (29)$$

Dacă $\nu \neq 0,25$, soluția este deci determinată abstracție făcînd de o roto-translație rigidă.

b) Gradul de arbitrar al funcțiilor lui Grodskii

Cele de mai sus clarifică chestiunea gradului de determinare a celor 3 funcții ale lui Grodskii într-un corp mărginit \mathcal{V} , pentru $\nu \neq 0,25$ (compară cu § 6.9). Anume, fie că în \mathcal{V} este realizată starea de tensiune nulă. Considerând o bulă cu centrul în x și conținută în \mathcal{V} , și rezolvînd pentru ea problema lui Neumann cu date la limită nule, conchidem că B este suma unui vector constant B_0 cu un vector $q \times x$, unde q este constant. Alegînd o altă bulă conținută în \mathcal{V} și avînd puncte în comun cu cea dintîi, rezultă că vectorii B_0 și q sînt *aceiași* pentru ambele bule. Întrucît în virtutea teoremei lui Borel și Lebesgue (vezi § A.3, pag. 694) putem întotdeauna uni două puncte interioare ale oricărui domeniu \mathcal{V} , situate la distanță finită, printr-un lanț *finit* de asemenea bule, rezultă că vectorii B_0 și q sînt *aceiași* peste tot în \mathcal{V} , așadar vectorul B care realizează starea de tensiune nulă are forma prescrișă mai sus.

Vectorii ce realizează starea de deplasare nulă trebuie aleși evident printre cei de mai înainte, așadar printre vectorii ce caracterizează roto-translații rigide. De aci rezultă că ei sînt nuli.

Prin urmare, în cazul $\nu \neq 0,25$, vectorul lui Grodskii A ce realizează reprezentarea (7.5.3) prin trei funcții armonice este determinat în cazul problemei lui Neumann numai abstracție făcînd de o componentă $B_0 + q \times x$. În cazul problemei lui Dirichlet, el este deplin determinat.

Deosebirea față de cele spuse relativ la gradul de determinare al funcțiilor lui Kolosov și Mushelișvili se explică prin deosebirea de structură dintre reprezentările deplasărilor (7.5.3) și (6.7.12). În particular, gradul de arbitrar de care dispunem în această din urmă formulă se datorează prezenței a două funcții complexe sub formă nediferențială, de unde rezultă apariția a 4 constante reale disponibile, pentru numai 2 componente ale deplasării.

§ 6. PROBLEMA LUI NEUMANN PENTRU DOMENII MĂRGINITE DE O SFERĂ. EXEMPLE

Întrucît calculele efective, după formulele din §§ 3—5, sînt în general voluminoase, ne vom mărgini la a prezenta două exemple simple, suficiente totuși pentru a clarifica rezultatele generale. Pentru mai multe detalii și pentru alte exemple, de natură mai complexă, vezi A. Lurie [4], capitolele 6 și 8.

a) Bula elastică supusă la presiune normală pe frontieră

Condiția la limită a problemei este evident

$$\sigma_n(u)|_{R=R_0} = -Pn = -P(x/R_0)|_{R=R_0}. \quad (1)$$

Din formulele (4.13) – (4.17) avem mai întâi

$$\frac{1}{2\mu} R_0 \sigma_n(\mathbf{u})|_{R=R_0} = -\frac{1}{2\mu} P R_0 (\mathbf{x}/R_0)|_{R=R_0}, \quad (2)$$

astfel că datele la limită se reduc la un singur termen de forma $Y_1(\theta, \varphi)$. Prin urmare, avem

$$\mathbf{H}_1 = (R/R_0) Y_1 = -\frac{1}{2\mu} P \mathbf{x}. \quad (3)$$

Intrucât din (5.14) rezultă că $\mathbf{H}_1 = \text{grad } h$, și ținând seama că $2\mathbf{x} = \text{grad } (\mathbf{x} \cdot \mathbf{x})$, deducem

$$h = -\frac{1}{4\mu} P (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2), \quad (4)$$

de unde, în notațiile din (5.15):

$$h_{ij} = -\frac{1}{2\mu} P \delta_{ij}. \quad (5)$$

Introducând aceste valori în (5.25), obținem

$$(b_{ij} + b_{ji}) x_i \mathbf{i}_j = -2 [(1-\nu)/(1+\nu)\mu] P x_j \mathbf{i}_j,$$

de unde

$$b_{ij} = -[(1-\nu)/(1+\nu)\mu] P \delta_{ij}, \quad (6)$$

astfel că vectorul \mathbf{B}_1 se scrie sub forma (5.23):

$$\mathbf{B}_1 = -[(1-\nu)/(1+\nu)\mu] P \mathbf{x}. \quad (7)$$

Introducând această expresie în (4.23), obținem soluția

$$\mathbf{u} \equiv \mathbf{u}_1 = -[(1-2\nu)/2(1+\nu)\mu] P \mathbf{x}. \quad (8)$$

Dacă — cu titlu de verificare — introducem (8) în (4.1), căpătăm — pentru $n = \mathbf{x}/R_0$ — tocmai valoarea din (1).

Remarcăm că utilizarea formulei (4.24) — valabilă numai pentru $k \geq 2$ — ar duce la un rezultat greșit, independent de faptul că din (3) urmează rot $\mathbf{H}_1 = 0$.

b) Spațiul elastic cu o cavitate sferică cu frontiera liberă. Concentrarea tensiunilor

Acesta este analogul tridimensional al problemei din § 6.16, exemplul *f*. Ne vom mărgini la un singur caz de solicitare la infinit, de pildă cazul $\sigma_{11}^\infty = P$.

După cum am arătat la finele §§ 3 și 4, soluția problemei exterioare se obține direct din cea a problemei interioare, înlocuind indicele k prin $-k-1$, și ținând seama că $Y_k = Y_{-k-1}$.

În absența cavității, starea de tensiune inițială în \mathcal{L}_3 este dată evident de componentele (notate cu un indice (i))

$$\sigma_{11}^{(i)} = P, \quad \sigma_{22}^{(i)} = \sigma_{33}^{(i)} = \sigma_{12}^{(i)} = \sigma_{23}^{(i)} = \sigma_{31}^{(i)} = 0. \quad (9)$$

Pe frontiera cavității de rază $R = R_1$, avem $\sigma_{ni}^{(i)} = \sigma_{ij}^{(i)} n_j$, de unde

$$\sigma_{n1}^{(i)}|_{R=R_1} = P n_1 = P (x_1/R_1)|_{R=R_1}, \quad \sigma_{n2}^{(i)}|_{R=R_1} = \sigma_{n3}^{(i)}|_{R=R_1} = 0. \quad (10)$$

Pentru ca această frontieră să fie liberă, trebuie deci să rezolvăm problema spațiului nemărginit cu o cavitare sferică de rază $R = R_1$, solicitat de sarcina

$$\sigma_n|_{R=R_1} = -P(x/R_1)|_{R=R_1} i_1 = -P i_1 \sin \theta \cos \varphi, \quad (11)$$

și să adăugăm soluția corespunzătoare acestei stări perturbatoare, notată cu un indice (p) , la soluția (9).

Ca și în exemplul precedent, al doilea membru din (11) conține numai funcția Y_1 , astfel că soluția va depinde de determinarea funcției H_{-2} . Avem mai întâi

$$\frac{1}{2\mu} R \sigma_n^{(p)}|_{R=R_1} = -\frac{1}{2\mu} P R_1 i_1 \sin \theta \cos \varphi = Y_1, \quad (12)$$

de unde, folosind formula (4.17) (în care am înlocuit k prin $-k-1$ și am luat apoi $k=1$), obținem

$$H_{-2} = (R_1^2/R^2) \left[-\frac{1}{2\mu} P R_1 i_1 \sin \theta \cos \varphi \right] = -\frac{1}{2\mu} P (R_1^3/R^3) i_1 x_1,$$

ceea ce se va nota

$$H_{-2} = -\frac{1}{2\mu} P R_1^3 q, \quad q = (x_1/R^3) i_1. \quad (13)$$

În felul acesta, formula (4.24) (unde k este înlocuit prin $-k-1$, pentru $k=1$) devine

$$\begin{aligned} u^{(p)} \equiv u_{-2}^{(p)} = & \frac{1}{4\mu} P R_1^3 \left[q + \frac{1}{3} x \times \text{rot } q - (4-10\nu)(7-5\nu)^{-1} x \text{div } q + \right. \\ & \left. + \frac{1}{3} (5\nu-1)(7-5\nu)^{-1} R^2 \text{grad div } q + (7-5\nu)^{-1} (R^2-R_1^2) \text{grad div } q \right]. \end{aligned} \quad (14)$$

Pentru a efectua calculele, din (13) obținem pe rînd

$$\begin{aligned} \text{div } q &= R^{-3} - 3x_1^2 R^{-5}, \quad \text{rot } q = -3R^{-5} (x_1 x_3 i_2 - x_1 x_2 i_3), \\ \text{grad div } q &= 3R^{-7} [(2x_1^2 - 3x_2^2 - 3x_3^2) x_1 i_1 + (4x_1^2 - x_2^2 - x_3^2) (x_2 i_2 + x_3 i_3)], \\ x \times \text{rot } q &= 3R^{-5} [x_1 (x_2^2 + x_3^2) i_1 - x_1^2 x_2 i_2 - x_1^2 x_3 i_3], \end{aligned} \quad (15)$$

ceea ce conduce la soluția

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{(p)} = & \frac{1}{4\mu} P R_1^3 \{ R^{-3} x_1 \mathbf{i}_1 + R^{-5} [x_1 (x_2^2 + x_3^2) \mathbf{i}_1 - x_1^2 x_2 \mathbf{i}_2 - x_1^2 x_3 \mathbf{i}_3] - \\ & - (4 - 10\nu) (7 - 5\nu)^{-1} (R^{-3} - 3R^{-5} x_1^2) (x_1 \mathbf{i}_1 + x_2 \mathbf{i}_2 + x_3 \mathbf{i}_3) + \\ & + [(5\nu - 1) (7 - 5\nu)^{-1} R^{-5} + 3(7 - 5\nu)^{-1} R^{-7} (R^2 - R_1^2)] [(2x_1^2 - 3x_2^2 - 3x_3^2) x_1 \mathbf{i}_1 + \\ & + (4x_1^2 - x_2^2 - x_3^2) (x_2 \mathbf{i}_2 + x_3 \mathbf{i}_3)] \}. \end{aligned} \quad (16)$$

Separind componentele după direcțiile $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$, se obțin deplasările $u_1^{(p)}, u_2^{(p)}, u_3^{(p)}$.

Să calculăm acum componentele tensiunii, mărginindu-ne pentru simplitate la a determina componenta $\sigma_{11}^{(p)}$ în punctele $x_1 = x_3 = 0$, așadar în punctele situate pe axa Ox_2 , care este intersecția planului orizontal (ecuatorial) cu planul perpendicular pe direcția sarcinii la infinit (Compară cu § 6.16, pag. 458). În acest scop, vom calcula cu ajutorul formulei (7.1.9) vectorul tensiune pentru un element de normală $\mathbf{n} = \mathbf{i}_1$. Formulele (4.4) și (4.5) rămân valabile, astfel că avem

$$\operatorname{div} \mathbf{u}_{-2}^{(p)} = \frac{1}{2} (1 - 2\nu) (1 - \nu)^{-1} \operatorname{div} \mathbf{B}_{-2}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{u}_{-2}^{(p)} = \operatorname{rot} \mathbf{B}_{-2}. \quad (17)$$

Mai departe, făcînd uz de formulele (4.18), (4.21) (pentru k înlocuit prin $-k-1$ și unde luăm $k = 1$), obținem

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{B}_{-2} &= -10(1 - \nu)(7 - 5\nu)^{-1} \operatorname{div} \mathbf{H}_{-2}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{B}_{-2} &= -\frac{2}{3} [\operatorname{rot} \mathbf{H}_{-2} + (4 - 5\nu)(7 - 5\nu)^{-1} \mathbf{x} \times \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{H}_{-2}], \end{aligned} \quad (18)$$

astfel că (17) devine

$$\operatorname{div} \mathbf{u}_{-2}^{(p)} = -5(1 - 2\nu)(7 - 5\nu)^{-1} \operatorname{div} \mathbf{H}_{-2}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{u}_{-2}^{(p)} = \operatorname{rot} \mathbf{B}_{-2}. \quad (19)$$

☞ Rămîne de calculat derivata normală $\mathbf{u}_{\mathbf{n}}^{(p)}$, așadar derivata $\mathbf{u}_{\mathbf{i}_1}^{(p)}$ în punctele $x_1 = x_3 = 0$. Toți termenii din (16) ce conțin x_1^2 sau x_3 în factor dispar aci, astfel că, ținînd seama că acum avem $x_2 = R$, căpătăm

$$\mathbf{u}_{\mathbf{i}_1}^{(p)}|_{x_1=x_3=0} = \frac{1}{4\mu} (7 - 5\nu)^{-1} P (R_1^3/R_2) [(4 - 15\nu) + 9(R_1^2/R^2)] \mathbf{i}_1. \quad (20)$$

Introducînd (13), (15), (19) și (20) în (7.1.9) scris pentru $\mathbf{n} = \mathbf{i}_1$, avem în definitiv

$$\sigma_{11}(\mathbf{u}_{-2}^{(p)})|_{x_1=x_3=0} = P (R_1^3/R^3) \left[\frac{1}{2} (4 - 5\nu)(7 - 5\nu)^{-1} + \frac{9}{2} (7 - 5\nu)^{-1} (R_1^2/R^2) \right] \mathbf{i}_1, \quad (21)$$

ceea ce dă imediat pe $\sigma_{11}^{(p)}$ (și desigur și valorile $\sigma_{12}^{(p)} = \sigma_{13}^{(p)} = 0$).

Tensiunea σ_{11} totală care apare în punctele axei Ox_2 se obține prin suprapunerea valorilor inițiale din (9) și a celor perturbatoare din (21):

$$\sigma_{11} = P \left\{ 1 + (R_1^3/R^3) \left[\frac{1}{2} (4 - 5\nu)(7 - 5\nu)^{-1} + \frac{9}{2} (7 - 5\nu)^{-1} (R_1^2/R^2) \right] \right\}. \quad (22)$$

Calculind valorile raportului σ_{11}/P în diferite puncte ale axei Ox_2 , obținem (pentru $\nu = 1/3$) tabelul :

R/R_1	1,0	1,5	2,0	3,0
σ_{11}/P	2,06	1,18	1,06	1,01

Comparind acest tabel cu cel din § 6.16, pag. 459, vedem că coeficientul de concentrare al tensiunilor este mai mic, iar fenomenul are un caracter mai localizat decât în analogul bidimensional al aceleiași probleme. Acest din urmă fapt rezultă și din compararea formulelor (22) și (6.16.38) : termenul perturbator scade cu puterea a *treia* a razei în \mathcal{L}_3 și numai cu puterea a *doua* în \mathcal{L}_2 . (Vezi și § 7.1, pag. 512)

CAPITOLUL 9

PROBLEMA SEMISPAȚIULUI ELASTIC

§ 1. GENERALITĂȚI

Problema *echilibrului* semispațiului solicitat de o sarcină aplicată pe planul său frontieră are o mare importanță practică, ca punct de pornire în studiul fundațiilor, în problema contactului corpurilor elastice și altele. O primă soluție (prin dezvoltări în serie) a acestei probleme a fost dată încă în 1828 de către G. Lamé și B. Clapeyron. La finele secolului XIX, ea a fost reluată de către J. Boussinesq [2] (vezi și A. Clebsch și B. de Saint-Venant [1], nota finală la § 46), V. Cerruti [1] și H. Hertz [1]. Au fost astfel obținute soluții pentru sarcini concentrate și repartizate, normale sau nu la frontieră, pentru diferite tipuri de domenii de solicitare. G. Lauricella [2] a studiat în detaliu problemele la limită fundamentale, inclusiv două variante ale celei de a patra probleme fundamentale. V. Cerruti [2] a considerat chestiuni similare pentru domenii infinite a căror frontieră este o suprafață deschisă, dar nu un plan. (Pentru transmiterea forțelor concentrate pe frontiera unor astfel de domenii, vezi lucrările citate la finele § 2.1, pag. 65). Metoda lui C. Somigliana [5] a permis să se treacă la studiul problemei semispațiului solicitat în puncte interioare. Pentru generalizarea la cazul semispațiului a unor anumite metode utilizate în problema plană, vezi E. Obolașvili [1].

În ce privește chestiunile de *dinamică*, menționăm aci problema deosebit de importantă a propagării undelor care se amortizează spre interiorul semispațiului (unde Rayleigh). Asupra acestui subiect, vezi de exemplu W. Nowacki [1], capitolul 11; C. Pearson [2], capitolul 9; vezi încă indicațiile din § 4.12, pag. 163–164.

În cele ce urmează vom prezenta pe scurt problema (teoretic simplă, și de mai redusă importanță) a lui Dirichlet pentru semispațiul elastic, unde soluția se obține cu ajutorul reprezentării lui Trefftz. Vom trece apoi la studiul problemei lui Neumann, unde această reprezentare a fost împinsă pe al doilea plan de către cea a lui Grodskii. (Vezi A. Lurie [4], cap. 2.)

Nu putem decît să menționăm aci rezultatele importante obținute datorită metodelor operaționale (vezi I. Sneddon [1], cap. 9 și 10; I. Sneddon și D. Berry [1], §§ 64–66 — pentru variantele plane și axial-simetrice ale chestiunii; vezi și R. Muki [1], [2] pentru cazuri în care simetria axială este absentă).

Amintim încă problema *stratului* elastic (domeniu mărginit de două plane paralele), care folosește ca punct de plecare rezultatele din problema semispațiului, și conduce la studiul importante probleme a *plăcilor groase*. (Vezi A. Lurie [4], cap. 3 și 4; vezi de asemenea I. Ufliand

[2], cap. 7 și 8 pentru stratul elastic, și cap. 9—15 pentru semispațiu, cu utilizare sistematică a transformărilor integrale ale lui Hankel și Meller-Fock.)

§ 2. PROBLEMA LUI DIRICHLET PENTRU SEMISPAȚIUL ELASTIC

Ținând seama de rolul special al uneia din coordonate, vom folosi în general pentru coordonate notațiile x, y, z , iar pentru versorii axelor, notațiile i, j, k (Vezi și § 1.1, pag. 33).

Să căutăm soluția regulată a problemei lui Dirichlet pentru semispațiul $z > 0$, pentru $F = 0$, sub forma ce rezultă din (7.4.18) :

$$u = B + z \operatorname{grad} h, \quad (1)$$

unde, după cum urmează din (7.4.3) și (7.4.20), avem

$$\Delta B = 0, \quad (2)$$

$$\Delta h = 0, \quad h_{,3} = -\kappa^{-1} \operatorname{div} B, \quad \kappa = 3 - 4\nu, \quad (3)$$

iar vectorul deplasare ia valori cunoscute pe planul frontieră $z = 0$:

$$u(x, y, 0) = g(x, y). \quad (4)$$

Analiticitatea soluției impune continuitatea funcției g . Pentru ca relațiile de regularitate (7.6.18) să fie verificate, componentele lui g , precum și ale derivatelor sale cu ajutorul cărora se construiesc componentele tensiunii pe frontieră, trebuie să le verifice de asemenea.

Introducând expresia (1) în condiția (4), obținem

$$B(x, y, 0) = g(x, y), \quad (5)$$

astfel că fiecare din componentele lui $B(x, y, z)$ este soluția câte unei probleme Dirichlet pentru ecuația lui Laplace. Acest mod de a aborda problema justifică alegerea făcută în § 7.4, pag. 527, pentru vectorul de corecție.

Pentru ca soluțiile problemelor (2), (5) să existe, este suficient ca funcțiile g_1, g_2, g_3 să fie continue și absolut integrabile pe planul frontieră. Vectorul B poate fi considerat deci cunoscut.

Mai departe, ecuațiile (3) conduc la problema determinării unei funcții armonice h dacă valoarea derivatei sale $h_{,3}$ este cunoscută. Călea cea mai simplă de urmat constă în a scrie $\operatorname{div} B$ sub forma derivatei în raport cu z a unei funcții armonice, după care funcția h se obține imediat. Aceasta este principial posibil numai pentru anumite tipuri de domenii, printre care însă și semispațiul. (Vezi M. Slobodianskii [1].)

Să căutăm deci soluția regulată (în sensul din (7.2.13)) a unei probleme Dirichlet pentru ecuația lui Laplace în semispațiul $z > 0$, sub forma unui potențial de dublu strat (7.2.38) :

$$B(x, y, z) = \int_{-\infty}^{\infty} (\cos \varphi / R^2) H(\xi, \eta) dD. \quad (6)$$

Amintim că x este punctul de observație, aparținând semispațiului $z > 0$ iar ξ și x_0 sînt puncte aparținînd frontierei sale $z = 0$. Normala exterioară n coincide aci cu sensul negativ ale axei Oz . Mai departe, avem din (7.2.14) :

$$R = x - \xi, \quad R^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z^2, \quad \varphi = (\widehat{n, -R}),$$

$$R_0 = x_0 - \xi, \quad R_0^2 = (x_0 - \xi)^2 + (y_0 - \eta)^2, \quad \varphi_0 = (\widehat{n, -R_0}) = \frac{1}{2} \pi. \quad (7)$$

Întrucît avem $\cos \varphi_0 = 0$, ecuația integrală (7.2.40) se reduce la

$$2\pi H(x_0, y_0) = g(x_0, y_0), \quad (8)$$

astfel că soluția (6) se scrie

$$B(x, y, z) = (1/2\pi) \int_{-\infty}^{+\infty} (\cos \varphi / R^2) g(\xi, \eta) dD. \quad (9)$$

Remarcînd că avem

$$z = R \cos \varphi, \quad (10)$$

(vezi și ultima relație (7.2.23) pentru $\xi_3 \equiv \zeta = 0$), expresia (9) devine

$$B(x, y, z) = (1/2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} [z g(\xi, \eta) / R^3] dD. \quad (11)$$

Soluția are desigur același aspect pentru toate cele trei componente ale vectorului B , astfel că, ținînd seama de (5), căpătăm

$$B(x, y, z) = (1/2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} [z g(\xi, \eta) / R^3] dD, \quad (12)$$

ceea ce se poate scrie și sub forma

$$B(x, y, z) = -(1/2\pi) \frac{\partial}{\partial z} \int_{-\infty}^{\infty} [g(\xi, \eta) / R] dD. \quad (13)$$

Pentru a determina $h(x, y, z)$ ne rămîne să introducem (13) în (3), de unde

$$h(x, y, z) = (1/2 \pi \kappa) \operatorname{div} \int_{-\infty}^{\infty} [g(\xi, \eta) / R] dD. \quad (14)$$

Integrala (14) are forma (7.2.20) a unui potențial de simplu strat, de densitate continuă și absolut integrabilă pe frontieră. Prin urmare, h este cu siguranță armonică.

Problema este deci rezolvată. Soluția (1) ia în fapt forma (7.12.9) pentru $F = 0$.

Dacă s-ar căuta soluția problemei (2), (5) cu ajutorul funcției lui Green, s-ar ajunge la aceleași expresii. Într-adevăr, funcția lui Green pentru operatorul lui Laplace pentru semispațiu este

$$G(x; \xi) = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z+\zeta)^2}} \right] \quad (15)$$

(vezi de ex. A. Tihonov și A. Samarskiĭ [1], § 4.4). Ținând seama că pe frontieră avem $G(x, y, z; \xi, \eta, 0) = 0$, calculând derivata normală în punctul de sursă $\partial G / \partial n = -\partial G / \partial \zeta$ pe frontieră (așadar pentru $\zeta = 0$), și introducând în (7.2.37), obținem din nou expresia (12).

Din punctul de vedere al teoriei elasticității, problema este deci rezolvată. Dificultatea e redusă la a se calcula efectiv potențialul din (12) — ceea ce nu se poate realiza însă sub o formă simplă decât în unele cazuri particulare.

§ 3. PROBLEMA LUI DIRICHLET PENTRU SEMISPAȚIUL ELASTIC. METODA INTEGRALELOR FOURIER

Vom expune aici o a doua soluție a problemei, care permite scrierea funcțiilor B și h prin intermediul unor integrale Fourier. Ideea de bază (vezi de ex. E. Trefftz [3], § 33) stă în a găsi vectorul armonic B cu ajutorul formulei de inversiune a integralei duble Fourier (vezi (A.9.61)) :

$$f(x, y) = (1/4\pi^2) \iiint_{-\infty}^{+\infty} f(\xi, \eta) \exp [i\alpha(\xi-x) + i\beta(\eta-y)] d\alpha d\beta d\xi d\eta. \quad (1)$$

Vectorul B se caută sub forma

$$B(x, y, z) = \iiint_{-\infty}^{+\infty} \tilde{b}(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) \exp(\tilde{\alpha}x + \tilde{\beta}y + \tilde{\gamma}z) d\tilde{\alpha} d\tilde{\beta}, \quad (2)$$

unde funcțiile $\tilde{b}_j(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$, ($j = 1, 2, 3$), sînt integrabile în orice porțiune mărginită a planului, și absolut integrabile pe tot planul. Un calcul simplu dă

$$B_{j,11} = \tilde{\alpha}^2 B_j, \quad B_{j,22} = \tilde{\beta}^2 B_j, \quad B_{j,33} = \tilde{\gamma}^2 B_j. \quad (3)$$

Pentru ca B_j să fie armonică, e deci suficient să avem

$$\tilde{\alpha}^2 + \tilde{\beta}^2 + \tilde{\gamma}^2 = 0. \quad (4)$$

Alegînd (pentru α, β reali)

$$\tilde{\alpha} = i\alpha, \quad \tilde{\beta} = i\beta, \quad \tilde{\gamma} = \gamma = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}, \quad (5)$$

condiția (4) este automat satisfăcută, iar (2) devine

$$B(x, y, z) = \iint_{-\infty}^{+\infty} b(\alpha, \beta) \exp[i(\alpha x + \beta y) + \gamma z] d\alpha d\beta, \quad (6)$$

unde vectorul B este armonic, oricare ar fi $b(\alpha, \beta) \equiv \tilde{b}(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$.

Condiția la limită de tip Dirichlet (2.4) se scrie acum

$$g(x, y) = \iint_{-\infty}^{+\infty} b(\alpha, \beta) \exp(i\alpha x + i\beta y) d\alpha d\beta. \quad (7)$$

Întrucît (6) determină pe deplin vectorul B prin intermediul lui b , aflarea acestuia din urmă din relațiile (7) rezolvă problema.

Înmulțind ambii membri din (7) cu $\exp(-i\lambda x - i\mu y)$ și integrînd în raport cu x, y între limitele $-\infty, +\infty$, obținem

$$\begin{aligned} \iint_{-\infty}^{+\infty} g(x, y) \exp(-i\lambda x - i\mu y) dx dy &= \iiint_{-\infty}^{+\infty} b(\alpha, \beta) \exp[ix(\alpha - \lambda) + \\ &+ iy(\beta - \mu)] d\alpha d\beta dx dy. \end{aligned} \quad (8)$$

Ținînd seama de (1), membrul al doilea din (8) rezultă egal cu $4\pi^2 b(\lambda, \mu)$. Schimbînd acum variabilele λ, μ cu α, β , și x, y cu ξ, η , deducem

$$b(\alpha, \beta) = (1/4\pi^2) \iint_{-\infty}^{+\infty} g(\xi, \eta) \exp(-i\alpha\xi - i\beta\eta) d\xi d\eta. \quad (9)$$

Introducînd (9) în (6) și schimbînd apoi α cu $-\alpha$ și β cu $-\beta$, obținem în definitiv vectorul armonic (vezi (5))

$$\begin{aligned} B(x, y, z) &= (1/4\pi^2) \iiint_{-\infty}^{+\infty} g(\xi, \eta) \exp[i\alpha(\xi - x) + \\ &+ i\beta(\eta - y) + \gamma z] d\alpha d\beta d\xi d\eta. \end{aligned} \quad (10)$$

Ținînd seama de (1), se vede imediat că, pentru $z = 0$, condiția (6) este verificată.

Să trecem la determinarea funcției armonice $h(x, y, z)$ din ecuațiile (2.3). Pentru aceasta avem mai întâi din (10)

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{B} = & - (i/4\pi^2) \iiint_{-\infty}^{+\infty} g_0(\xi, \eta) \exp [i\alpha(\xi - x) + \\ & + i\beta(\eta - y) + \gamma z] d\alpha d\beta d\xi d\eta, \end{aligned} \quad (11)$$

unde am notat

$$g_0(\xi, \eta) = \alpha g_1(\xi, \eta) + \beta g_2(\xi, \eta) + i\gamma g_3(\xi, \eta). \quad (12)$$

Introducând (11) în (2.3), avem

$$\begin{aligned} h_{,3} = & (i/4\pi^2 \kappa) \iiint_{-\infty}^{\infty} g_0(\xi, \eta) \exp [i\alpha(\xi - x) + \\ & + i\beta(\eta - y) + \gamma z] d\alpha d\beta d\xi d\eta, \end{aligned} \quad (13)$$

de unde, integrând în raport cu parametrul z în membrul al doilea :

$$\begin{aligned} h(x, y, z) = & (i/4\pi^2 \kappa \gamma) \iiint_{-\infty}^{\infty} g_0(\xi, \eta) \exp [i\alpha(\xi - x) + \\ & + i\beta(\eta - y) + \gamma z] d\alpha d\beta d\xi d\eta. \end{aligned} \quad (14)$$

Orice eventuală funcție de x, y ce ar apare după integrarea relației (13), este nulă, întrucât numai așa se asigură regularitatea funcției h pentru x, y finiți, și $z \rightarrow \infty$.

Ținând seama de relațiile (5) se vede ușor că funcția h este armonică. Date fiind proprietățile lui g , se poate demonstra și că h este regulată la infinit. Vectorul grad h se calculează atunci din (14): anume, avem

$$\begin{aligned} \frac{h_{,1}}{\alpha} = \frac{h_{,2}}{\beta} = & \frac{1}{4\pi^2 \kappa \gamma} \iiint_{-\infty}^{\infty} g_0(\xi, \eta) \exp [i\alpha(\xi - x) + \\ & + i\beta(\eta - y) + \gamma z] d\alpha d\beta d\xi d\eta, \end{aligned} \quad (15)$$

în timp ce pentru $h_{,3}$ dispunem de (13). În definitiv, reprezentarea (2.1) dă acum soluția problemei sub forma

$$\begin{aligned} u(x, y, z) = & (1/4\pi^2) \iiint_{-\infty}^{\infty} G(\xi, \eta; z) \exp [i\alpha(\xi - x) + \\ & + i\beta(\eta - y) + \gamma z] d\alpha d\beta d\xi d\eta, \end{aligned} \quad (16)$$

unde

$$\begin{aligned} G_1(\xi, \eta; z) &= g_1(\xi, \eta) + (\alpha/\kappa\gamma) z g_0(\xi, \eta), \\ G_2(\xi, \eta; z) &= g_2(\xi, \eta) + (\beta/\kappa\gamma) z g_0(\xi, \eta), \\ G_3(\xi, \eta; z) &= g_3(\xi, \eta) + (i/\kappa) z g_0(\xi, \eta). \end{aligned} \quad (17)$$

Problema e deci explicit rezolvată în funcție de datele la limită $g(\xi, \eta)$. (La fel ca în (1), partea pur imaginară a tuturor acestor expresii e nulă.) Totuși, integralele ce intervin în (16) nu pot fi decât arareori calculate sub formă finită.

§ 4. PROBLEMA LUI NEUMANN PENTRU SEMISPAȚIUL ELASTIC (I)

Problema lui Neumann pentru semispațiu poate fi abordată cu ajutorul unor soluții cu singularități.

Calculare similare celor din § 7.8 permit să se determine o astfel de soluție care să descrie acțiunea unei forțe concentrate aplicate în origine, normal pe frontiera semispațiului. Aceasta, numită *soluția de al doilea tip a lui Boussinesq*, introduce încă și o anumită repartitie de sarcini pe planul-frontieră. Din fericire, se constată că aceasta din urmă este proporțională cu cea corespunzătoare soluției lui Kelvin și Somigliana, privită ca soluție pentru semispațiu (vezi § 7.8, observația 2, pag. 548). Se poate deci construi o combinație liniară a celor două soluții care să lase planul frontieră liber de orice sarcină, cu excepția unei forțe *concentrate* unitare aplicate în origine normal pe planul-frontieră. Un procedeu de suprapunere similar celui din § 7.9, pag. 551, conduce la soluția problemei pentru o sarcină normală *repartizată*, exprimată prin integrale în care intervine soluția corespunzătoare sarcinii normale unitare concentrate, și densitatea sarcinii reale considerate.

Modul acesta clasic de a raționa prezintă însă dezavantajul de a lăsa fără răspuns întrebările dacă soluția obținută verifică ecuațiile lui Lamé, satisface condițiile la limită, și este regulată. De aceea este preferabil punctul de vedere al lui A. Lurie [2] (vezi și [4], § 2.5), care construiește *direct* soluția corespunzătoare sarcinii normale repartizate. Cu ajutorul funcției δ a lui Dirac, se poate obține de aci și soluția problemei semispațiului supus unei forțe concentrate.

a) Sarcină normală repartizată

Fie deci semispațiul $z > 0$ supus unei sarcini normale $p(\xi, \eta)$ repartizate pe o porțiune \mathcal{D} a frontierei sale $z=0$. Considerente de ordin mecanic impun să admitem că \mathcal{D} este *mărginit*. Se presupune că $p(\xi, \eta) \in C^0(\mathcal{D})$, ceea ce asigură existența potențialului de simplu strat corespunzător, și verificarea proprietăților enumerate în § 7.2 (inclusiv regularitatea). Este de presupus că deplasările și tensiunile ce corespund unei astfel de

solicitări sînt nule la infinit, ceea ce impune căutarea numai de soluții regulate în sensul din (7.6.18).

Întrucît normala exterioară n este paralelă cu axa Oz și dirijată în sensul valorilor z negative, condiția la limită în tensiuni se scrie

$$\sigma_{-3}|_{z=0} = f, \quad (1)$$

unde f este sarcina efectiv aplicată. Întrucît sarcina este normală, (1) se mai poate scrie (reținînd pentru j numai valorile 1 și 2) :

$$\sigma_{3j}|_{z=0} = 0, \quad \sigma_{33}|_{z=0} = -p(\xi, \eta), \quad (2)$$

cu $p(\xi, \eta)$ definită pe tot planul frontieră, și identic nulă în afara lui \mathcal{D} . Soluția se caută sub forma reprezentării lui Grodskii.

Primele două condiții la limită (2) ($j = 1, 2$) se scriu

$$(u_{j,3} + u_{3,j})|_{z=0} = 0, \quad j = 1, 2. \quad (3)$$

Introducînd aci (7.4.16), avem de calculat cantitățile

$$\begin{aligned} u_{j,3} + u_{3,j} &= B_{j,3} + [(1 - 2\nu)/2(1 - \nu)] B_{3,j} - \\ &- [1/2(1 - \nu)] (x B_{1,3} + y B_{2,3} + z B_{3,3} + B_{0,3})_{,j}. \end{aligned} \quad (4)$$

Luînd acum $z = 0$, obținem din (3) și (4) :

$$\left[B_{j,3} + \frac{1 - 2\nu}{2(1 - \nu)} B_{3,j} \right] \Big|_{z=0} = \frac{1}{2(1 - \nu)} (x B_{1,3} + y B_{2,3} + B_{0,3})_{,j} \Big|_{z=0}, \quad (5)$$

ceea ce va fi cu siguranță îndeplinit dacă vom cere verificarea relațiilor

$$B_{j,3}|_{z=0} = -[(1 - 2\nu)/(2(1 - \nu))] B_{3,j}|_{z=0}, \quad j = 1, 2; \quad (6)$$

$$B_{0,3}|_{z=0} = -[x B_{1,3} + y B_{2,3}]|_{z=0}. \quad (7)$$

Cele două relații (6) sînt egalități între valorile la limită ale unor funcții armonice în $z > 0$, și — prin ipoteză — regulate la infinit. În virtutea teoremei de unicitate pentru soluția — regulată la infinit — a problemei lui Dirichlet pentru ecuația lui Laplace în semispațiu (vezi de ex. A. Tihonov și A. Samarskii [1], § 4.2), egalitatea se păstrează și în interiorul semispațiului :

$$B_{j,3} = -[(1 - 2\nu)/2(1 - \nu)] B_{3,j}, \quad j = 1, 2. \quad (8)$$

Relația (7) poate fi pusă acum sub forma

$$B_{0,3}|_{z=0} = [(1 - 2\nu)/2(1 - \nu)] [x B_{3,1} + y B_{3,2}]|_{z=0}. \quad (9)$$

Membrul întîi din (9) este valoarea la limită a unei funcții armonice în $z > 0$. Scriind paranteza din membrul al doilea sub forma

$$[x B_{3,1} + y B_{3,2} + z B_{3,3}]|_{z=0} = [x \cdot \text{grad } B_3]|_{z=0},$$

(ceea ce desigur nu-i schimbă valoarea), și ținînd seama (vezi (7.4.9)) că

$$\Delta(x \cdot \text{grad } B_3) = 2 \text{ div grad } B_3 = 2 \Delta B_3 = 0,$$

urmează că și membrul al doilea din (9) este valoarea la limită a unei funcții armonice. Aceeași teoremă de unicitate conduce astfel la relația

$$B_{0,3} = [(1 - 2\nu)/2(1 - \nu)] (x B_{3,1} + y B_{3,2} + z B_{3,3}). \quad (10)$$

Derivatele funcțiilor B_0, B_1, B_2 în raport cu z se exprimă deci prin intermediul *unei singure* funcții, armonice și regulate la infinit : funcția B_3 . Să notăm provizoriu

$$B_3 = c \Omega, \quad (11)$$

(unde Ω este o funcție armonică, iar c este o constantă) și să introducem și funcția armonică ω care verifică relația

$$\omega_{,3} = \Omega, \quad (12)$$

Orice eventuale funcții de x, y care ar apare în integrarea impusă de (12), se vor determina din condiția ca funcția ω să fie armonică, și comportarea ei la infinit să decurgă într-un anumit mod din comportarea la infinit a funcției Ω .

Ținând seama de (11), (12), relațiile (8) și (10) devin

$$B_{j,3} = - [(1 - 2\nu)/2(1 - \nu)] c \Omega_{,j} = - [(1 - 2\nu)/2(1 - \nu)] c \omega_{,3j}, \quad (13)$$

$$B_{0,3} = [(1 - 2\nu)/2(1 - \nu)] c (x \omega_{,31} + y \omega_{,32} + z \omega_{,33}).$$

Pentru a satisface aceste egalități, este suficient să luăm

$$B_j = - [(1 - 2\nu)/2(1 - \nu)] c \omega_{,j}, \quad j = 1, 2, \quad (14)$$

$$B_0 = [(1 - 2\nu)/2(1 - \nu)] c (x \omega_{,1} + y \omega_{,2} + z \omega_{,3} - \omega).$$

Mai rămîne acum să determinăm funcția Ω din ultima condiție (2). În acest scop, amintim mai întîi relația

$$\sigma_{33} = \lambda \theta + 2 \mu u_{3,3}. \quad (15)$$

Din ultima relație (7.4.17) urmează

$$\theta = \operatorname{div} \mathbf{u} = [(1 - 2\nu)/2(1 - \nu)] \operatorname{div} \mathbf{B}. \quad (16)$$

Or, ținînd seama de (11), (12), de primele două relații (14), precum și de faptul că $\Delta \omega = 0$, obținem

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = [(3 - 4\nu)/2(1 - \nu)] c \omega_{,33}. \quad (17)$$

Pe de altă parte, din (7.4.16) și folosind (11)–(13), căpătăm

$$u_{3,3} = c \Omega_{,3} - [1/4(1 - \nu)] c \{ \Omega + [(3 - 4\nu)/2(1 - \nu)] z \Omega_{,3} \}_{,3}. \quad (18)$$

Introducând acum (16) — (18) în (15), și ținând seama că $\lambda/\mu = 2\nu/(1 - 2\nu)$ (vezi (3.4.16)), căpătăm

$$\sigma_{33} = [(3 - 4\nu)/4(1 - \nu)^2] \mu c (\Omega_{,3} - z \Omega_{,33}). \quad (19)$$

Luînd aci $z = 0$, obținem valoarea la limită

$$\sigma_{33}|_{z=0} = \mu c [(3 - 4\nu)/4(1 - \nu)^2] \Omega_{,3}|_{z=0}. \quad (20)$$

Prin urmare, funcția Ω trebuie găsită ca soluție (regulată) a unei probleme Neumann pentru ecuația lui Laplace în semispațiul $z > 0$. Scriind ultima condiție (2) sub forma

$$\sigma_{33}(\xi, \eta, +0) = -p(\xi, \eta), \quad (21)$$

(vezi și (1.1.6.)—(1.1.8)), obținem din (20) condiția la limită

$$[(3 - 4\nu)/4(1 - \nu)^2] \mu c \Omega_{,3}|_{z=+0} = -p(\xi, \eta). \quad (22)$$

Soluția acestei probleme se caută sub forma unui potențial de simplu strat, de densitate $-(1/4\pi\mu) q(\xi, \eta)$, repartizată pe un domeniu \mathcal{D}' :

$$V(x, y, z) = -(1/4\pi\mu) \iint_{\mathcal{D}'} [q(\xi, \eta)/R] dD. \quad (23)$$

Scriind relațiile (7.2.31) și (7.2.32) pentru acest potențial, remarcăm că avem $\cos \psi_0 = 0$. Comparînd (23) cu (7.2.20) și atribuind desigur indicele $+$ valorilor la limită pentru $z \rightarrow +0$, obținem:

$$V_{+,n} = -V_{-,n} = 2\pi G(x_0) = -(1/2\mu) q(\xi, \eta), \quad (24)$$

(unde $q(\xi, \eta) \equiv 0$ înafara domeniului \mathcal{D}'). Întrucît normala exterioară la semispațiu coincide cu sensul negativ al axei Oz , putem scrie (24) sub forma

$$V_{,3}|_{z=+0} = (1/2\mu) q(\xi, \eta). \quad (25)$$

Luînd $\mathcal{D} = \mathcal{D}'$ și $\Omega = V$, și introducînd (25) în (22), avem

$$[(3 - 4\nu)/4(1 - \nu)^2] \mu c (1/2\mu) q(\xi, \eta) = -p(\xi, \eta),$$

ceea ce se reduce la egalitatea

$$p(\xi, \eta) = q(\xi, \eta), \quad (26)$$

dacă pentru constanta c alegem valoarea

$$c = -8(1 - \nu)^2/(3 - 4\nu). \quad (27)$$

Prin urmare, soluția problemei este dată de cunoașterea funcției Ω dată la rîndul ei sub forma potențialului de simplu strat

$$\Omega(x, y, z) = -(1/4\pi\mu) \iint_{\mathcal{D}} [p(\xi, \eta)/R] dD. \quad (28)$$

În ce privește funcția ω din (12), trebuie să luăm evident

$$\omega(x, y, z) = - (1/4 \pi \mu) \iint_{\mathcal{D}} p(\xi, \eta) \ln(R + z) dD; \quad (29)$$

acesta este un potențial logaritm, evident funcție armonică ($\ln(R + z)$ este primitiva în raport cu z a funcției armonice $1/R$).

Notind aci $R' = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, se poate arăta că pentru $R' \rightarrow \infty$, mărimile $\Omega, \omega_1, \omega_2$ tind spre zero ca $1/R'$, iar mărimile $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ tind spre zero ca $1/R'^2$. Notind cu P rezultanta sarcinii $p(\xi, \eta)$ pe \mathcal{D} , se poate demonstra (similar cu L. Sretenski [1], § 1.9) că funcția ω tinde la infinit pentru $R' \rightarrow \infty$ ca funcția $-(P/4 \pi \mu) \ln(R + z)$.

Funcțiile (28), (29) se numesc *potențialii lui Hertz*. Raționamentul precedent asigură dinainte verificarea atât a ecuațiilor lui Lamé, cât și a condițiilor la limită și a celor de regularitate.

b) Formulele lui Hertz

Ne rămâne să punem soluția sub forma cea mai simplă posibilă. Pentru aceasta, ținând seama de (11), (12), (14) și (27), obținem

$$\begin{aligned} B_j &= \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{3-4\nu} \omega_{,j}, \quad j=1,2; \quad B_3 = -\frac{8(1-\nu)^2}{3-4\nu} \omega_{,3}; \\ B_0 &= -\frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{3-4\nu} (x\omega_{,1} + y\omega_{,2} + z\omega_{,3} - \omega). \end{aligned} \quad (30)$$

Izolînd în B_3 un termen similar celor din B_1, B_2 , avem

$$B_3 = [4(1-\nu)(1-2\nu)/(3-4\nu)] \omega_{,3} - 4(1-\nu) \omega_{,3}, \quad (31)$$

ceea ce permite să scriem vectorul \mathbf{B} sub forma

$$\mathbf{B} = -4(1-\nu) \mathbf{k} \Omega + [4(1-\nu)(1-2\nu)/(3-4\nu)] \text{grad } \omega. \quad (32)$$

Pe de altă parte, B_0 se scrie sub forma

$$B_0 = -[4(1-\nu)(1-2\nu)/(3-4\nu)] (x \cdot \text{grad } \omega - \omega). \quad (33)$$

Introducînd acum (32) și (33) în (7.4.14), căpătăm ușor expresia

$$\mathbf{u} = -4(1-\nu) \mathbf{k} \Omega + \text{grad } [z \Omega + (1-2\nu) \omega], \quad (34)$$

de unde, separînd componentele :

$$\begin{aligned} u_1 &= z \Omega_{,1} + (1-2\nu) \omega_{,1}, \\ u_2 &= z \Omega_{,2} + (1-2\nu) \omega_{,2}, \\ u_3 &= z \Omega_{,3} - 2(1-\nu) \Omega. \end{aligned} \quad (35)$$

Aceste relații — numite curent *formulele lui Hertz* — au fost obținute concomitent de către H. Hertz [1], și J. Boussinesq (publicate în A. Clebsch și B. de Saint-Venant [1], nota finală la § 46, formulele (17)). Rezultatul poate fi extins și la cazul unui domeniu de încărcare \mathcal{D} nemărginit.

OBSERVAȚIA 1. Relația (34) permite să revenim asupra formulelor (32), (33); anume, putem lua acum cu aceeași îndreptățire

$$B = -4(1 - \nu) k \Omega, \quad B_0 = -4(1 - \nu)(1 - 2\nu) \omega. \quad (36)$$

OBSERVAȚIA 2. Expresia (35) a lui u_3 este principial mai simplă decât cele ale lui u_1 și u_2 , întrucât nu conține decât pe Ω . Acest fapt joacă un rol esențial în problema contactului.

c) Aplicații

Pentru determinarea vectorului tensiune, se poate face uz de formula (7.1.9), în care avem de introdus (34). Din (7.4.17) și (36) deducem

$$\theta = \operatorname{div} u = -2(1 - 2\nu) \Omega_3, \quad (37)$$

iar din (34) urmează

$$\operatorname{rot} u = -4(1 - \nu)(i\Omega_2 - j\Omega_1). \quad (38)$$

Dacă dorim să determinăm de pildă vectorul-tensiune pe elemente de normală $n = -k$ (elemente paralele cu planul-frontieră), atunci avem:

$$u_n = -u_3, \quad \frac{1}{2} n \times \operatorname{rot} u = 2(1 - \nu)(i\Omega_1 + j\Omega_2), \quad (39)$$

și, după calcule elementare, deducem

$$\sigma_{-3}(u) = 2\mu(k\Omega_3 - z \operatorname{grad} \Omega_3). \quad (40)$$

Să remarcăm că din (37), (3.3.22) și (3.4.16) avem pe rînd

$$\Theta = (3\lambda + 2\mu)\theta = -2E\Omega_3. \quad (41)$$

Ținînd seama de condiția la limită (25), căpătăm pe frontieră

$$\theta|_{z=+0} = -[(1 - 2\nu)/\mu] p(\xi, \eta), \quad \Theta|_{z=+0} = -2(1 + \nu)p(\xi, \eta). \quad (42)$$

Cea de-a treia din formulele (35) devine pe frontieră

$$u_3|_{z=+0} = [(1 - \nu)/2\pi\mu] \iint_{\mathcal{D}} [p(\xi, \eta) / \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}] dD \quad (43)$$

sau încă, trecînd la coordonate polare (R, χ) cu polul în punctul de observație $(x, y, 0)$ și păstrînd pentru $p(\xi, \eta)$ în noile coordonate notația $p(R, \chi)$:

$$u_3|_{z=+0} = [(1 - \nu)/2\pi\mu] \iint_{\mathcal{D}} p(R, \chi) dR d\chi. \quad (44)$$

Aceste relații se dovedesc utile pentru a clarifica caracterul stării elastice în vecinătatea frontierei. Astfel de pildă, fie că într-un punct al frontierei avem $\sigma_{11} = \sigma_{22}$ (cum e cazul în centrul de simetrie pentru o problemă cu simetrie axială). A doua relație (42) devine atunci

$$2\sigma_{11}|_{z=+0} + \sigma_{33}|_{z=+0} = -2(1+\nu)p(\xi, \eta). \quad (45)$$

Ținând seama aci de ultima condiție (2), deducem

$$\sigma_{11}|_{z=0} = \sigma_{22}|_{z=0} = -\left(\frac{1}{2} + \nu\right)p(\xi, \eta). \quad (46)$$

Prin urmare, tensiunea tangențială maximală în acest punct (vezi (2.6.11)) este

$$T_{\max} = \pm \frac{1}{2} \left[\left(\nu + \frac{1}{2} \right) p - p \right] = \pm \frac{1}{2} \left(\nu - \frac{1}{2} \right) p(\xi, \eta). \quad (47)$$

Întrucât foarte des avem $\nu \cong \frac{1}{3}$, rezultă că T_{\max} este foarte mică în raport cu tensiunea normală $\sigma_{33}|_{z=0} = -p(\xi, \eta)$, și prin urmare semi-spațiul poate suporta pe frontieră sarcini ce depășesc cu mult limita de rezistență. (Vezi și mai departe § 10.11, pag. 666.)

§ 5. PROBLEMA LUI NEUMANN PENTRU SEMISPAȚIUL ELASTIC (II)

a) Generalizarea formulelor lui Hertz

Formulele (4.35) au fost stabilite pentru sarcini $p(\xi, \eta)$ suficient de regulate pentru ca potențialii (4.28), (4.29) să existe. Dar aceste formule pot fi înțelese și într-un sens generalizat, făcând uz de produsul de convoluție (compară cu (7.9.13)). Pentru aceasta, vom scrie potențialii lui Hertz sub forma

$$\Omega = -(1/4 \pi \mu) p * R^{-1}, \quad \omega = -(1/4 \pi \mu) p * \ln(R + z), \quad (1)$$

unde $p = p(\xi, \eta, 0)$, iar $R = R(x, y, z; \xi, \eta, 0)$. Astfel privită, teoria lui Hertz își păstrează valabilitatea chiar pentru sarcini normale care pot fi exprimate nu prin funcții, ci prin distribuții; formulele clasice pot fi regăsite pas cu pas, înlocuind sistematic semnul integrării prin cel al produsului de convoluție. (Pentru unele lucrări pe această linie, vezi G. Verma [1]; W. Kees [1] — afară de rezultatele privind momentele concentrate.) În principiu, o reconstrucție coerentă a întregii teorii poate fi efectuată cu ajutorul noțiunii de distribuție al cărei suport este o suprafață — în cazul nostru, planul frontieră. (Vezi I. Ghelfand și G. Șilov [1], vol. 1, § 3.1.)

b) Sarcină normală concentrată

Să ne oprim la cazul $p(\xi, \eta) = \delta(\xi, \eta)$ care descrie acțiunea unei forțe unitare concentrate aplicate normal în origine. Ținând seama în (1) de formula (A.2.10) și atribuind semnul „ \sim ” potențialilor lui Hertz corespunzători acestui caz particular, căpătăm imediat expresiile

$$\tilde{\Omega} = -(1/4 \pi \mu) R^{-1}, \quad \tilde{\omega} = -(1/4 \pi \mu) \ln(R + z), \quad (2)$$

legate între ele prin relația analogă cu (4.12):

$$\tilde{\omega}_{,3} = \tilde{\Omega}. \quad (3)$$

Este evident că principiul superpoziției permite revenirea de la (2) la (4.28), (4.29). Formulele (4.25) își păstrează valabilitatea, și astfel problema menționată în § 4, pag. 594, e rezolvată. Calculând componentele tensiunii și efectuând un raționament similar celui din § 7.8, constatăm că soluția obținută verifică într-adevăr condițiile impuse atât în origine, cât și pe restul frontierei (care e liberă). Ne vom limita aici la a explicita componentele deplasării. Din (4.35) și (2) obținem ușor

$$\begin{aligned} u_1 &= (1/4 \pi \mu) [zR^{-3} - (1 - 2\nu) R^{-1} (R + z)^{-1}] x, \\ u_2 &= (1/4 \pi \mu) [zR^{-3} - (1 - 2\nu) R^{-1} (R + z)^{-1}] y, \\ u_3 &= (1/4 \pi \mu) [z^2 R^{-3} + 2(1 - \nu) R^{-1}]. \end{aligned} \quad (4)$$

Deplasând punctul de aplicare al forței normale concentrate (ceea ce revine la a înlocui $\delta(\xi, \eta)$ prin $\delta(\xi - \xi_0, \eta - \eta_0)$), ajungem la relații ce se obțin din (2), (4) prin simpla înlocuire a vectorului de poziție, cu vectorul ce unește punctul de sursă (de pe frontieră) cu cel de observație.

Să precizăm tabloul repartiției tensiunilor și deplasărilor în starea considerată. Introducând $\tilde{\Omega}$ în locul lui Ω în (4.40), obținem

$$\sigma_{-3} = (3/2 \pi) z^2 R^{-5} x. \quad (5)$$

Vectorul tensiune pe elemente paralele cu planul frontieră este deci dirijat întotdeauna în lungul vectorului x ce unește punctul considerat, cu originea (adică cu punctul de sursă). Din această cauză se spune că avem de a face cu o *repartiție radială simplă de tensiuni*. Modulul vectorului (5) este

$$|\sigma_{-3}| = (3/2 \pi) R^{-4} z^2. \quad (6)$$

Notînd cu φ unghiul format de vectorul x cu axa Oz , (vezi și (7.2.14) și (2.10)), avem evident $\cos \varphi = z/R$, astfel că (6) devine

$$|\sigma_{-3}| = (3/2 \pi) (\cos^2 \varphi) / R^2. \quad (7)$$

Modulul vectorului tensiune pe un element paralel cu planul frontieră descrește deci rapid atât pe măsura îndepărtării de acest plan, cât și de linia de acțiune a forței. Construind o sferă cu axa Oz ca direcție a diametrului, și care e tangentă în origine la planul frontieră, se vede că diametrul ei este

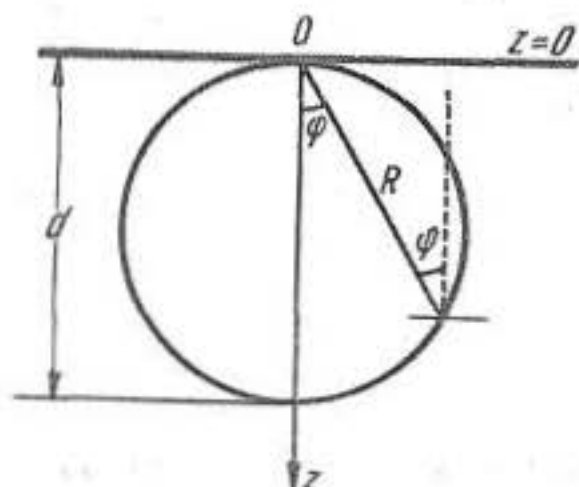


Fig. 9.5.1

$$d = R / \cos \varphi, \quad (8)$$

astfel că (7) devine încă

$$|\sigma_{-3}| = 3/2 \pi d^2. \quad (9)$$

În toate punctele situate pe o astfel de sferă, modulul tensiunii pe elementele orizontale este deci constant.

A treia relație (4.35) scrisă pentru Ω înlocuit cu $\tilde{\Omega}$ dă aci

$$u_3|_{z=0} = [(1 - \nu)/2 \pi \mu] R^{-1}, \quad (10)$$

ceea ce arată că produsul $u_3 R$ rămâne constant pe $z = 0$. Prin urmare, dreptele din planul-frontieră ce trec prin origine se transformă în hiperbole echilatre, având drept asimptote axa Oz (în lungul căreia e aplicată sarcina), și propria lor direcție înainte de deformare.

Soluția își pierde sensul în imediata vecinătate a punctului de sursă. (Vezi și G. Savin și V. Rvacev [1].) În practică, în vecinătatea unui astfel de punct are loc o redistribuire locală a tensiunilor, datorită apariției stării de deformare plastică sau a unor fisuri.

c) Exemplu

Fie că planul $z = 0$ este solicitat de o sarcină normală, de intensitate constantă p , acționând pe un disc circular de rază a și cu centrul în origine. Potențialii (4.28), (4.29) devin

$$\Omega(x, y, z) = -(1/4 \pi \mu) p \iint_{\mathcal{D}} R^{-1} dD, \quad \omega(x, y, z) = -(1/4 \pi \mu) p \iint_{\mathcal{D}} \ln(R + z) dD. \quad (11)$$

Să ne limităm la calculul deplasării normale în interiorul domeniului solicitat \mathcal{D} . Pentru aceasta, să alegem punctul de observație $(x, y, 0) \in \mathcal{D}$ drept origine a unui sistem de coordonate polare R, χ în planul $z = 0$. Deplasarea normală a acestui punct sub acțiunea sarcinii $p R dR d\chi$ ce acționează pe un element de suprafață oarecare are — după cum rezultă din (4) — valoarea

$$u_3|_{z=0} = (1/4 \pi \mu) p R [z^2 R^{-3} + 2(1 - \nu) R^{-1}]|_{z=0} dR d\chi = [(1 - \nu)/2 \pi \mu] p dR d\chi. \quad (12)$$

Prin urmare, deplasarea punctului $(x, y, 0)$ sub acțiunea tuturor sarcinilor elementare repartizate în \mathcal{D} va fi egală cu

$$u_3|_{z=0} = [(1 - \nu)/2 \pi \mu] p \iint_{\mathcal{D}} dR d\chi = [(1 - \nu)/2 \pi \mu] p \int_0^{2\pi} d\chi \int_0^{R_0(\chi)} dR, \quad (13)$$

unde $R_0(\chi)$ este distanța de la $(x, y, 0)$ la frontiera domeniului \mathcal{D} .

Întrucît problema este cu simetrie centrală, putem lua axele Oxy în așa fel încît una din ele să treacă prin punctul de observație. Prin urmare, acesta are coordonatele $(x, 0, 0)$.

După cum se vede pe figură, segmentul AB are lungimea

$$|AB| = 2 \sqrt{a^2 - x^2 \sin^2 \chi}. \quad (14)$$

Accasta este suma segmentelor de lungimi $R_0(\chi)$ și $R_0(\pi - \chi)$, astfel că (13) devine

$$u_3|_{z=0} = [(1 - \nu) / \pi \mu] p \int_0^\pi \sqrt{a^2 - x^2 \sin^2 \chi} d\chi. \quad (15)$$

Notînd aici $x/a = t$ obținem deci :

$$u_3|_{z=0} = 2 [(1 - \nu) / \pi \mu] ap E(t), \quad (16)$$

unde

$$E(t) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - t^2 \sin^2 \chi} d\chi \quad (17)$$

este integrala eliptică completă de a doua speță, de modul t . Această integrală nu poate fi calculată cu mijloace elementare, dar valorile ei sînt tabulate. Vom reveni asupra ei în (10.5.18).

În particular, pentru $x = 0$ și $x = a$, așadar pentru $t = 0$, respectiv $t = 1$, obținem din (17): $E(0) = \pi/2$, $E(1) = 1$, astfel că din (16) urmează

$$u_3(0, 0, 0) = [(1 - \nu) / \mu] ap, \quad u_3(a, 0, 0) = [2(1 - \nu) / \pi \mu] ap. \quad (18)$$

Ținînd seama de simetria centrală a problemei, urmează că deplasarea pe frontiera domeniului solicitat este de 1,57 ori mai mică decît în centrul discului \mathcal{D} . La o repartiție uniformă de presiuni pe frontieră, corespunde deci o repartiție cu totul neuniformă a deplasărilor.

Aceeași tehnică a suprapunerii soluțiilor de tip (4) poate fi utilizată în vederea determinării deplasărilor și tensiunilor în interiorul semispațiului $z > 0$. Pentru alte exemple, vezi de pildă A. Lurie [4], § 2.6.

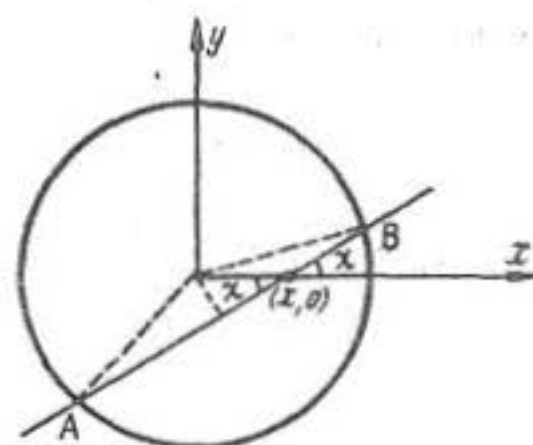


Fig. 9.5.2

§ 6. PROBLEMA LUI NEUMANN PENTRU SEMISPAȚIUL ELASTIC (III)

a) Sarcina tangențială repartizată

Pentru simplitate, să ne mărginim la cazul unei sarcini dirijate după Ox , cel corespunzător sarcinii dirijate după Oy putînd fi studiat în mod similar. Cu aceasta, condiția (4.1) devine

$$\sigma_{31}|_{z=0} = -p_1(\xi, \eta), \quad \sigma_{32}|_{z=0} = 0, \quad \sigma_{33}|_{z=0} = 0 \quad (1)$$

(compară cu (4.2)). Funcția $p_1(\xi, \eta)$ este presupusă continuă într-o porțiune mărginită \mathcal{D} a frontierei, și identic nulă în afara acesteia.

Ca și în § 4, soluția se caută sub forma reprezentării lui Grodskii, cu ajutorul unor potențiali de densitate $p_1(\xi, \eta)$. Prin analogie cu (4.28), se consideră mai întâi potențialul de simplu strat

$$\Omega^1(x, y, z) = - (1/4 \pi \mu) \iint_{\mathcal{D}} p_1(\xi, \eta) R^{-1} dD. \quad (2)$$

Amintind că pentru derivata normală pe frontieră a potențialului (4.23) am obținut valoarea (4.25), deducem că

$$\Omega_{,3}^1|_{z=+0} = (1/2 \mu) p_1(\xi, \eta). \quad (3)$$

Să considerăm de asemenea potențialul logaritmice analog cu (4.29), așadar

$$\omega^1(x, y, z) = - (1/4 \pi \mu) \iint_{\mathcal{D}} p_1(\xi, \eta) \ln(R + z) dD, \quad (4)$$

legat de cel precedent prin relația

$$\omega_{,3}^1 = \Omega^1. \quad (5)$$

În fine, să introducem și funcția

$$\tilde{\omega}^1(x, y, z) = - (1/4 \pi \mu) \iint_{\mathcal{D}} p_1(\xi, \eta) [z \ln(R + z) - R] dD, \quad (6)$$

legată de ω^1 prin relația

$$\tilde{\omega}_{,3}^1 = \omega^1. \quad (7)$$

Integralele definite în (2), (4) și (6) sînt evident funcții armonice în semispațiul $z > 0$. Ultimele două din ele *nu sînt* regulate la infinit — ceea ce nu va influența însă regularitatea soluției însăși. Indicele superior „1” este un indice de numerotare, care pentru o sarcină dirijată în lungul axei Oy va fi înlocuit cu „2”.

Pentru început, să căutăm o eventuală componentă *armonică* u_0 a soluției, urmînd a o corecta ulterior în așa fel, încît toate ecuațiile și condițiile la limită să fie în definitiv verificate.

Dacă avem $\Delta u_0 = 0$, din ecuațiile lui Lamé urmează și $\text{grad div } u_0 = 0$, astfel că $\theta_0 = \text{const.}$ Vom presupune pentru început $\theta_0 = 0$, astfel că :

$$\Delta u_0 = 0, \quad \text{div } u_0 = 0. \quad (8)$$

Construind componentele σ_{31} și σ_{32} , obținem din (1), ținînd seama de (3):

$$(u_{1,3}^0 + u_{3,1}^0)|_{z=+0} = -2 \Omega_{,3}^1|_{z=+0}, \quad (u_{2,3}^0 + u_{3,2}^0)|_{z=+0} = 0. \quad (9)$$

Întrucît în ambii membri ai ambelor relații (9) intervin valori la limită ale unor funcții armonice și regulate, deducem

$$u_{1,3}^0 + u_{3,1}^0 = -2 \Omega_{,3}^1, \quad u_{2,3}^0 + u_{3,2}^0 = 0,$$

sau încă, prin integrare în raport cu z :

$$u_1^0 = -2 \Omega^1 - \int_a^z u_{3,1}^0 dz, \quad u_2^0 = - \int_b^z u_{3,2}^0 dz, \quad (10)$$

unde orice eventuale funcții arbitrare de x, y în membrul al doilea sînt nule, în virtutea regularității soluției căutate. Pentru ca deplasările să se anuleze la infinit ca $1/R$, este suficient să luăm $a = b = \infty$ în (10), astfel că

$$u_1^0 = -2 \Omega^1 + \int_z^\infty u_{3,1}^0 dz, \quad u_2^0 = \int_z^\infty u_{3,2}^0 dz. \quad (11)$$

Ținînd seama de a doua relație (8), găsim acum

$$-2 \Omega_{,1}^1 + u_{3,3}^0 + \int_z^\infty (u_{3,11}^0 + u_{3,22}^0) dz = 0. \quad (12)$$

Ținînd seama aci de prima relație (8) precum și de faptul că, în virtutea regularității, trebuie să avem $\lim_{z \rightarrow \infty} u_{3,3}^0 = 0$, (12) se reduce la

$$u_{3,3}^0 = \Omega_{,1}^1, \quad (13)$$

de unde, ținînd seama de (5) și integrînd în raport cu z :

$$u_3^0 = \omega_{,1}^1. \quad (14)$$

Introducînd (14) în (11) și făcînd uz și de (7), obținem de pildă:

$$u_1^0 = -2 \Omega^1 + \int_z^\infty \bar{\omega}_{,113}^1 dz = -2 \Omega^1 - \bar{\omega}_{,11}^1. \quad (15)$$

(Desigur, funcția $\bar{\omega}^1$ tinde la infinit pentru $R \rightarrow \infty$, dar derivata ce apare în (15) e nulă la infinit.) Raționînd la fel pentru toate componentele din (11), avem deci

$$u_1^0 = -2 \Omega^1 - \bar{\omega}_{,11}^1, \quad u_2^0 = -\bar{\omega}_{,12}^1, \quad u_3^0 = \bar{\omega}_{,13}^1. \quad (16)$$

Prin construcție, vectorul u_0 verifică ecuațiile Lamé omogene, condițiile de regularitate, și primele două condiții (1). Pentru a ține seama și de a treia condiție (1), vom calcula componenta σ_{33}^0 care — întrucît $\theta_0 = 0$ — are forma

$$\sigma_{33}^0 = 2 \mu u_{3,3}^0 = 2 \mu \Omega_{,1}^1, \quad (17)$$

astfel că în general avem desigur $\sigma_{33}^0|_{z=+0} \neq 0$.

Formulele (16) descriu deci o stare în care tensiunile tangențiale la limită sînt cele date, dar în care apare și o componentă normală „parazitară”, a tensiunii pe frontieră. Pentru a o elimina, trebuie să suprapunem soluției u_0 o altă soluție de corecție u_c a ecuațiilor Lamé omogene, care să nu altereze primele două condiții (1) deja satisfăcute, dar să conducă la anularea componentei normale a tensiunii *totale* pe frontieră. Prin urmare, u_c este soluția problemei la limită

$$\sigma_{31}^c|_{z=+0} = \sigma_{32}^c|_{z=+0} = 0, \quad \sigma_{33}^c|_{z=+0} = -2\mu\Omega_{,1}^1|_{z=+0}, \quad (18)$$

— așadar a unei probleme Neumann pentru semispațiul solicitat de o sarcină *normală* repartizată (și cunoscută, întrucît Ω^1 este cunoscut o dată cu $p_1(\xi, \eta)$). Soluția corespunzătoare are deci forma (4.35). Potențialul de corecție Ω trebuie determinat din relația ce decurge din (4.25), așadar din

$$\Omega_{,3}|_{z=+0} = (1/2\mu) q(\xi, \eta), \quad (19)$$

unde $q(\xi, \eta)$ coincide cu sarcina normală pe frontieră (vezi (4.2) și (4.26)). Avem deci mai întîi relația de tip (4.2):

$$\sigma_{33}^c|_{z=+0} = -q(\xi, \eta); \quad (20)$$

apoi, relația ce decurge din (19):

$$-q(\xi, \eta) = -2\mu\Omega_{,3}|_{z=+0}; \quad (21)$$

și în fine și ultima relație (18). De aci deducem mai întîi, utilizînd și (5), că

$$\Omega_{,3}|_{z=+0} = \omega_{,31}^1|_{z=+0}. \quad (22)$$

În virtutea teoremei de unicitate, de repetate ori folosită, egalitatea se păstrează și pentru $z > 0$, și, după integrare în raport cu z , conduce la valoarea

$$\Omega = \omega_{,1}^1. \quad (23)$$

Mai departe, potențialul logaritmic ω este dat de expresia

$$\omega = \int_a^z \Omega dz = \int_a^z \omega_{,1}^1 dz,$$

unde trebuie să luăm $a = \infty$; ținînd seama de (7), obținem de aci

$$\omega = \tilde{\omega}_{,1}^1. \quad (24)$$

b) Formulele lui Cerruti

Componentele vectorului u_c pot fi scrise acum efectiv, introducînd (23), (24) în (4.35) și ținînd seama de (5) și (7):

$$\begin{aligned} u_1^c &= z \omega_{,11}^1 + (1 - 2\nu) \tilde{\omega}_{,11}^1, \\ u_2^c &= z \omega_{,12}^1 + (1 - 2\nu) \tilde{\omega}_{,12}^1, \\ u_3^c &= z \Omega_{,1}^1 - 2(1 - \nu) \omega_{,1}^1. \end{aligned} \quad (25)$$

Adunînd acum componentele deplasării u_0 din (16) cu cele ale deplasării u_c din (25), se obține soluția căutată :

$$\begin{aligned} u_1 &= -2 \Omega^1 + z \omega_{,11}^1 - 2\nu \bar{\omega}_{,11}^1, \\ u_2 &= z \omega_{,12}^1 - 2\nu \bar{\omega}_{,12}^1, \\ u_3 &= z \Omega_{,1}^1 - (1 - 2\nu) \omega_{,1}^1. \end{aligned} \quad (26)$$

Formulele (26) — datorate lui V. Cerruti [1] și regăsite pe calea de mai sus de către A. Lurie [4], § 2.8 — constituie analogul formulelor lui Hertz (4.35). Ca și în cazul sarcinii normale, componenta u_3 are o structură mai simplă.

Potențialul de simplu strat Ω^1 este regulat la infinit. Pentru $R' = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \rightarrow \infty$, derivatele $\Omega_{,k}^1$ tind spre zero ca $1/R'^2$; derivatele $\omega_{,k}^1$ tind spre zero ca $1/R'$; derivatele $\omega_{,ak}^1$ tind spre zero ca $1/R'^2$; în fine, derivatele $\bar{\omega}_{,ak}^1$ tind spre zero ca $1/R'$. Prin urmare, deși integralele (4) și (6) nu sînt mărginite în semispațiul $z > 0$, formulele (26) dau o soluție regulată a problemei. În fond, aceste integrale pot fi privite numai ca o notație comodă pentru anumite funcții de construit prin intermediul lor.

Soluția corespunzătoare unei sarcini $p_2(\xi, \eta)$ dirijate după Oy se obține definind niște funcții $\Omega^2, \omega^2, \bar{\omega}^2$ prin relații analoge cu (2), (4), (6), înlocuind în (26) potențialii de indice 1 cu cei de indice 2, și intervertind variabilele x, y , precum și componentele u_1, u_2 .

§ 7. SEMISPAȚIUL SOLICITAT DE O SARCINĂ OARECARE PE FRONTIERĂ

a) Forță concentrată oarecare

Raționamentele de la începutul § 5 pot fi repetate cuvînt cu cuvînt. Potențialii (6.2), (6.4), (6.6) pot fi scriși sub forma unor produse de convoluție, și formulele lui Cerruti rămîn valabile chiar pentru sarcini tangențiale care nu sînt reprezentabile decît prin distribuții. În particular se pot considera forțe concentrate tangențiale, generînd stări elastice descrise prin potențiali similari cu (5.2) :

$$\bar{\Omega}^1 = - (1/4 \pi \mu) R^{-1}, \quad (1)$$

$$\bar{\omega}^1 = - (1/4 \pi \mu) \ln (R + z), \quad (2)$$

$$\bar{\bar{\omega}}^1 = - (1/4 \pi \mu) [z \ln (R + z) - R], \quad (3)$$

legați între ei prin relații analoge cu (6.5) și (6.7) :

$$\bar{\omega}_{,3}^1 = \bar{\Omega}^1, \quad (4)$$

$$\bar{\bar{\omega}}_{,3}^1 = \bar{\omega}^1. \quad (5)$$

Introducând deci în (6.26) potențialii (1)–(3), obținem formulele

$$\begin{aligned} u_1 &= -2 \tilde{\Omega}^1 + z \tilde{\omega}_{,11}^1 - 2\nu \tilde{\omega}_{,11}^1, \\ u_2 &= z \tilde{\omega}_{,12}^1 - 2\nu \tilde{\omega}_{,12}^1, \\ u_3 &= z \tilde{\Omega}_{,1}^1 - (1 - 2\nu) \tilde{\omega}_{,1}^1. \end{aligned} \quad (6)$$

Pornind de la (1)–(6), regăsim, prin suprapunere, tocmai soluția (6.26).

Să explicităm formulele de mai sus. Avem pe rînd

$$\tilde{\Omega}_{,1}^1 = (1/4 \pi \mu) x R^{-3}, \quad (7)$$

$$\tilde{\omega}_{,1}^1 = - (1/4 \pi \mu) x R^{-1} (R + z)^{-1}, \quad (8)$$

$$\tilde{\omega}_{,11}^1 = (1/4 \pi \mu) [x^2 (2R + z) R^{-3} (R + z)^{-2} - R^{-1} (R + z)^{-1}], \quad (9)$$

$$\tilde{\omega}_{,12}^1 = (1/4 \pi \mu) xy (2R + z) R^{-3} (R + z)^{-2}, \quad (10)$$

$$\tilde{\omega}_{,1}^1 = (1/4 \pi \mu) x (R + z)^{-1}, \quad (11)$$

$$\tilde{\omega}_{,11}^1 = (1/4 \pi \mu) [(R + z)^{-1} - x^2 R^{-1} (R + z)^{-2}], \quad (12)$$

$$\tilde{\omega}_{,12}^1 = - (1/4 \pi \mu) xy R^{-1} (R + z)^{-2}. \quad (13)$$

Introducînd acum (1), (9) și (12) în expresia componentei u_1 din (6), obținem mai întîi

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{2 \pi \mu} \frac{1}{R} - \frac{1}{4 \pi \mu} z \left[\frac{1}{R(R+z)} - x^2 \frac{2R+z}{R^3(R+z)^2} \right] - \\ &\quad - \frac{\nu}{2 \pi \mu} \left[\frac{1}{R+z} - \frac{x^2}{R(R+z)^2} \right]. \end{aligned} \quad (14)$$

Ținînd seama însă de relațiile

$$\frac{z}{R(R+z)} = \frac{1}{R} - \frac{1}{R+z}, \quad \frac{z(2R+z)}{R^3(R+z)^2} = \frac{1}{R^3} - \frac{1}{R(R+z)^2}, \quad (15)$$

deducem din (14)

$$u_1 = \frac{1}{4 \pi \mu} \left[\frac{1}{R} + \frac{x^2}{R^3} + (1 - 2\nu) \left(\frac{1}{R+z} - \frac{x^2}{R(R+z)^2} \right) \right]. \quad (16)$$

Mai departe, introducînd (10) și (13) în u_2 din (6), obținem

$$u_2 = \frac{1}{4 \pi \mu} \frac{xyz}{R^3} \frac{(2R+z)}{(R+z)^2} + \frac{2\nu}{4 \pi \mu} \frac{xy}{R(R+z)^2}, \quad (17)$$

sau încă, ținînd seama de a doua relație (15) :

$$u_2 = \frac{1}{4 \pi \mu} xy \left[\frac{1}{R^3} - (1 - 2\nu) \frac{1}{R(R+z)^2} \right]. \quad (18)$$

În fine, introducînd (7), (8) în expresia lui u_3 din (6), găsim

$$u_3 = \frac{1}{4\pi\mu} \left[\frac{xz}{R^3} + (1-2\nu) \frac{x}{R(R+z)} \right]. \quad (19)$$

Expresiile (16), (18) și (19) (analoge cu (5.4)) rezolvă problema acțiunii unei forțe concentrate unitare *tangențiale*, dirijate după direcția pozitivă a axei Ox . Schimbînd între ele în aceste relații coordonatele x, y , precum și deplasările u_1, u_2 , obținem soluția corespunzătoare unei sarcini de același tip, dirijate însă după Oy .

Prin suprapunere, putem scrie acum soluția problemei semispațiului solicitat în origine de o forță concentrată \mathbf{p} , de componente p_1, p_2, p_3 . Făcînd uz de (16), (18), (19) și de (5.4), căpătăm în definitiv:

$$\begin{aligned} 4\pi\mu u_1 &= p_1 \{ R^{-1} + x^2 R^{-3} + (1-2\nu) [(R+z)^{-1} - x^2 R^{-1} (R+z)^{-2}] \} + \\ &+ p_2 \{ xy R^{-3} + (1-2\nu) [- xy R^{-1} (R+z)^{-2}] \} + \\ &+ p_3 \{ xz R^{-3} + (1-2\nu) [- x R^{-1} (R+z)^{-1}] \}, \\ 4\pi\mu u_2 &= p_1 \{ xy R^{-3} + (1-2\nu) [- xy R^{-1} (R+z)^{-2}] \} + \\ &+ p_2 \{ R^{-1} + y^2 R^{-3} + (1-2\nu) [(R+z)^{-1} - y^2 R^{-1} (R+z)^{-2}] \} + \\ &+ p_3 \{ yz R^{-3} + (1-2\nu) [- y R^{-1} (R+z)^{-1}] \}, \\ 4\pi\mu u_3 &= p_1 \{ xz R^{-3} + (1-2\nu) [x R^{-1} (R+z)^{-1}] \} + \\ &+ p_2 \{ yz R^{-3} + (1-2\nu) [y R^{-1} (R+z)^{-1}] \} + \\ &+ p_3 \{ R^{-1} + z^2 R^{-3} + (1-2\nu) [R^{-1}] \}. \end{aligned} \quad (20)$$

Grupînd acum cîte două coloanele din (20), vom scrie

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^1 + \mathbf{u}^2. \quad (21)$$

Pentru \mathbf{u}^1 avem evident

$$4\pi\mu \mathbf{u}^1 = \mathbf{p} / R + (\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}) (\mathbf{x} / R^3), \quad (22)$$

așadar o expresie de același tip (deși nu identică) cu soluția (7.8.4) corespunzătoare acțiunii unei forțe concentrate \mathbf{Q} în originea *spațiului* elastic. (Amintim că acolo avem $A = 1/4\pi\mu$.)

Pentru a simplifica aspectul lui \mathbf{u}^2 , vom folosi relațiile

$$\begin{aligned} [x(R+z)^{-1}]_{,1} &= (R+z)^{-1} - x^2 R^{-1} (R+z)^{-2}, \\ [x(R+z)^{-1}]_{,2} &= -xy R^{-1} (R+z)^{-2}, \end{aligned} \quad (23)$$

$$[x(R+z)^{-1}]_{,3} = -x R^{-1} (R+z)^{-1},$$

$$[\ln(R+z)]_{,1} = x R^{-1} (R+z)^{-1},$$

$$[\ln(R+z)]_{,2} = y R^{-1} (R+z)^{-1}, \quad (24)$$

$$[\ln(R+z)]_{,3} = R^{-1},$$

precum și cele ce se obțin de aci dacă intervertim variabilele x și y .

Cu aceasta, avem pe rînd

$$\begin{aligned} [4 \pi \mu / (1 - 2\nu)] u_1^2 &= \mathbf{p} \cdot \text{grad} [x (R + z)^{-1}], \\ [4 \pi \mu / (1 - 2\nu)] u_2^2 &= \mathbf{p} \cdot \text{grad} [y (R + z)^{-1}], \\ [4 \pi \mu / (1 - 2\nu)] u_3^2 &= \mathbf{p} \cdot \text{grad} \ln (R + z). \end{aligned} \quad (25)$$

Introducînd acum (22) și (25) în (21), obținem în definitiv

$$\mathbf{u} = \frac{1}{4 \pi \mu} \left\{ \frac{\mathbf{p}}{R} + \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}}{R^3} \mathbf{x} + (1 - 2\nu) (\mathbf{p} \cdot \text{grad}) \left[\frac{x \mathbf{i} + y \mathbf{j}}{R + z} + k \ln (R + z) \right] \right\}. \quad (26)$$

Relația (26) constituie analogul relației (7.8.4), dar e lipsită atît de simplitatea, cît și de simetria ei.

b) Sarcină repartizată oarecare

Soluția (26) rămîne valabilă pentru o forță \mathbf{p} aplicată în $(\xi, \eta, 0)$, dacă înlocuim peste tot (inclusiv în R) vectorul \mathbf{x} prin $\mathbf{R} = \mathbf{x} - \xi$. Pentru un număr finit de astfel de forțe, trebuie să sumăm soluțiile corespunzătoare. În fine, în cazul unei sarcini continuu repartizate $\mathbf{p}(\xi, \eta)$, obținem prin integrare

$$\begin{aligned} \mathbf{u} = \frac{1}{4 \pi \mu} \iint_D \left\{ \frac{\mathbf{p}}{R} + \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{R}}{R^3} \mathbf{R} + \right. \\ \left. + (1 - 2\nu) (\mathbf{p} \cdot \text{grad}) \left[\frac{\mathbf{i}(x - \xi) + \mathbf{j}(y - \eta)}{R + z} + k \ln (R + z) \right] \right\} dD. \end{aligned} \quad (27)$$

Desigur, același rezultat se capătă dacă înlocuim în (20) variabilele x, y prin $x - \xi, y - \eta$, și integrăm pe frontieră. Este vizibil că (27) este de forma (7.12.13) (pentru $F = 0$).

Aceeași formulă (27) se poate căpăta și prin suprapunere de soluții (4.35), (6.26), și a soluției similare cu (6.26) pentru sarcina dirijată după Oy , fiecare înmulțită cu componenta corespunzătoare a lui $\mathbf{p}(\xi, \eta)$. Tot astfel, ca și în § 5 și la începutul paragrafului de față, integrala din (27) poate fi privită ca înlocuită printr-un produs de convoluție.

În definitiv, fiind dată sarcina $\mathbf{p}(\xi, \eta)$ de componente $p_i(\xi, \eta)$ unde indicele i are acum valorile 1, 2, 3, se consideră funcțiile

$$\Omega^i(x, y, z) = - (1/4 \pi \mu) \iint_D p_i(\xi, \eta) R^{-1} dD, \quad (28)$$

$$\omega^i(x, y, z) = - (1/4 \pi \mu) \iint_D p_i(\xi, \eta) \ln (R + z) dD, \quad (29)$$

$$\tilde{\omega}^i(x, y, z) = - (1/4 \pi \mu) \iint_D p_i(\xi, \eta) [z \ln (R + z) - R] dD, \quad (30)$$

unde

$$R = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z^2}. \quad (31)$$

După cum se vede, potențialii lui Hertz Ω , ω se notează acum cu Ω^3 , ω^3 . Funcțiile considerate sînt legate între ele prin relațiile

$$\omega_{,3}^i = \Omega^i, \quad (32)$$

$$\bar{\omega}_{,3}^i = \omega^i. \quad (33)$$

Utilizînd din nou (6.26) și (4.35), precum și (32) și (33) — inclusiv în formulele lui Hertz unde funcția $\bar{\omega}^3$ e introdusă numai pentru simetrizarea notației — obținem

$$\begin{aligned} u_1 &= -2\Omega^1 + \omega_{,1}^3 + z(\omega_{,1}^1 + \omega_{,2}^2 + \omega_{,3}^3)_{,1} - \\ &\quad - 2\nu(\bar{\omega}_{,1}^1 + \bar{\omega}_{,2}^2 + \bar{\omega}_{,3}^3)_{,1}, \\ u_2 &= -2\Omega^2 + \omega_{,2}^3 + z(\omega_{,1}^1 + \omega_{,2}^2 + \omega_{,3}^3)_{,2} - \\ &\quad - 2\nu(\bar{\omega}_{,1}^1 + \bar{\omega}_{,2}^2 + \bar{\omega}_{,3}^3)_{,2}, \\ u_3 &= -2\Omega^3 + \omega_{,3}^3 + z(\Omega_{,1}^1 + \Omega_{,2}^2 + \Omega_{,3}^3) - \\ &\quad - (1 - 2\nu)(\omega_{,1}^1 + \omega_{,2}^2 + \omega_{,3}^3). \end{aligned} \quad (34)$$

Pentru simetrizarea formulelor, cele două paranteze din expresia u_3 pot fi înlocuite cu aceleași paranteze ce apar și în u_1 și u_2 , derivate însă în raport cu z . Formulele astfel modificate se scriu împreună ca

$$\begin{aligned} u &= -2\omega_{,33} + \text{grad } \omega^3 + z \text{ grad div } \omega_{,3} - \\ &\quad - 2\nu \text{ grad div } \omega - (1 - 4\nu)k \text{ div } \omega_{,3}, \end{aligned} \quad (35)$$

unde am notat cu ω vectorul de componente $\bar{\omega}^1, \bar{\omega}^2, \bar{\omega}^3$.

§ 8. PROBLEMA SEMISPAȚIULUI ELASTIC CU FRONTIERA LIBERĂ, SOLICITAT DE SARCINI APLICATE ÎN PUNCTE INTERIOARE

Să presupunem că într-un punct interior al semispațiului $z > 0$ acționează o forță concentrată p . Cazul frontierei *fixe* a fost studiat de L. Rongved [1], N. Șandru [1]. Aci, vom examina cazul frontierei *libere* (R. Mindlin [1], [4]; A. Lurie [4], § 2.9.)

Soluția trebuie căutată ca sumă a soluției pentru spațiul *nemărginit* solicitat de aceeași forță, și a unui vector de corecție care trebuie să fie regulat pentru $z > 0$, și să genereze pe frontieră tensiuni egale și opuse celor provenite din soluția pentru spațiul nemărginit. Ideea raționamentului este, din acest punct de vedere, analogă celei din § 6.

În terminologia din § 7.12, ne propunem să găsim matricea lui Green pentru problema lui Neumann pentru semispațiul elastic. Dificultățile din § 7.12 nu mai apar, întrucît un corp

nemărginit se poate afla în echilibru sub acțiunea unei singure forțe aplicate asupra sa. Rezolvând problema și făcând apoi ca punctul de aplicare al forței să tindă spre frontieră, obținem din nou valoarea la limită a matricii lui Green, deja întâlnită în § 7.

Este firesc să abordăm problema prin acea metodă (frecvent folosită în hidrodinamică) care permite și obținerea funcției lui Green pentru ecuația lui Laplace pentru semispațiu: *metoda reflectării*, introdusă în teoria elasticității de C. Somigliana [5].

a) Forța concentrată dirijată după normala la frontieră

Fie pentru început că în punctul $(0, 0, +h)$ acționează o forță unitară concentrată dirijată în sensul pozitiv al axei Oz . Soluția corespunzătoare — notată u_+ — se obține din (7.8.43) dacă luăm drept punct de sursă punctul $(0, 0, h)$ și alegem $Q = k$. Prin urmare avem

$$u_+ = [1/16 \pi \mu (1 - \nu)] [(3 - 4\nu) R_+^{-1} k + (z - h) R_+^{-3} R_+], \quad (1)$$

unde am notat

$$R = (x, y, z - h), \quad R_+ = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - h)^2}. \quad (2)$$

Starea elastică (1) nu lasă desigur planul $z = 0$ liber. Pentru a obține eliberarea lui de tensiuni, trebuie să suprapunem soluției (1), alte soluții ale ecuațiilor lui Lamé omogene, regulate în $z > 0$, și care generează pe $z = 0$ tensiuni opuse celor generate de (1). Cea mai simplă acțiune mecanică cu un astfel de efect compensator este desigur cea a unei forțe egale și opuse celei date, aplicate în punctul $(0, 0, -h)$.

Termenul corespunzător acestei forțe fictive este o soluție a ecuațiilor lui Lamé omogene, regulată în $z > 0$, și care nu implică deci apariția vreunei acțiuni mecanice concentrate în semi-spațiul $z > 0$. Acest termen — fie el u_- — se obține din (7.8.43) dacă luăm drept punct de sursă punctul $(0, 0, -h)$ și alegem $Q = -k$:

$$u_- = - [1/16 \pi \mu (1 - \nu)] [(3 - 4\nu) R_-^{-1} k + (z + h) R_-^{-3} R_-], \quad (3)$$

unde am notat

$$R_- = (x, y, z + h), \quad R_- = \sqrt{x^2 + y^2 + (z + h)^2}. \quad (4)$$

Pentru a calcula suma tensiunilor generate pe planul $z = 0$ de deplasările (1) și (3), vom face uz de expresia (7.8.44) a vectorului $\sigma_n(u)$, luând pentru ambele soluții aceeași normală $n = -k$ (normala exterioară la

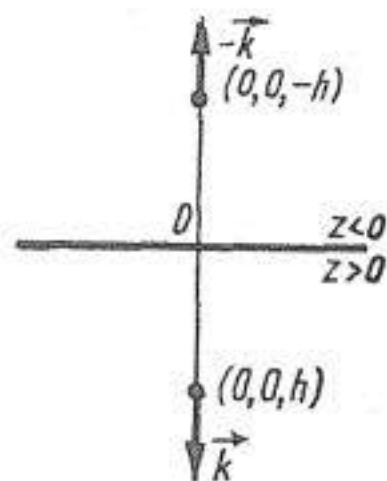


Fig. 9.8.1

semispațiul $z > 0$), ținând seama în prima soluție de (2) și luând $Q = k$, iar în cea de a doua, utilizând (4) și punând $Q = -k$. Obținem astfel

$$\sigma_{-k}(u_+) = - [(1 - 2\nu)/8\pi(1 - \nu)] R_+^{-3} [(k \cdot R_+) k + (-k \cdot R_+) k + (-k \cdot k) R_+ + 3(1 - 2\nu)^{-1} R_+^{-2} (-k \cdot R_+) (k \cdot R_+) R_+],$$

de unde, efectuând calculele,

$$\sigma_{+k}^+ = + [(1 - 2\nu)/8\pi(1 - \nu)] (R_+/R_+^3) [1 + 3(1 - 2\nu)^{-1} (z - h)^2 R_+^{-2}], \quad (5)$$

și în mod analog

$$\sigma_{-k}^- = - [(1 - 2\nu)/8\pi(1 - \nu)] (R_-/R_-^3) [1 + 3(1 - 2\nu)^{-1} (z + h)^2 R_-^{-2}]. \quad (6)$$

Luând în (5) și (6) $z = 0$, și notînd

$$R_+|_{z=0} = R_-|_{z=0} = \sqrt{x^2 + y^2 + h^2} = r, \quad (7)$$

obținem pentru suma tensiunilor (5) și (6) pe frontieră:

$$(\sigma_{+k}^+ + \sigma_{-k}^-)|_{z=0} = - [(1 - 2\nu)/4\pi(1 - \nu)] hr^{-3} [1 + 3(1 - 2\nu)^{-1} h^2 r^{-2}] k. \quad (8)$$

Tensiunile generate de forțele k și $-k$ lasă deci planul frontieră liber de tensiuni tangențiale.

Pentru a înțelege acest fapt, să ne imaginăm planul $z=0$ ca avînd două fețe ($z=+0$ și $z=-0$). Fiecare față este solicitată în același fel de forțele acționînd în semispațiile corespunzătoare (și care produc de ex. o alunecare spre origine pentru forțele din fig. 9.8.1). În virtutea principiului acțiunii și reacțiunii, fața $z=-0$ transmite feței $z=+0$ o acțiune egală și de sens opus, ceea ce explică anularea sumei acțiunilor tangențiale corespunzătoare pentru o anumită față, fie ea $z=+0$.

Să notăm cu σ_{ij}^m componentele stării de tensiune obținute prin suprapunerea efectelor acestor două forțe concentrate. (Semnul „tert” se referă la faptul că sarcina al cărei efect îl studiem e dirijată după Oz .) Din (8) urmează așadar

$$-\sigma_{33}^m|_{z=0} = \sigma_{-3;3}^m|_{z=0} = - [h/4\pi(1 - \nu)] [(1 - 2\nu) r^{-3} + 3 h^2 r^{-5}]. \quad (9)$$

Pentru a elibera frontiera, trebuie să adăugăm deci stării obținute prin sumare din (1) și (3), acea stare elastică, regulată pentru $z > 0$, și care corespunde acțiunii pe frontieră a unei sarcini normale, egale și de semn opus cu (9), ceea ce conduce la găsirea unui potențial Ω^m care să verifice condiția (4.25), așadar

$$\Omega_{,3}^m|_{z=+0} = (1/2\mu) q(\xi, \eta), \quad (10)$$

unde $q(\xi, \eta)$ este o sarcină normală fictivă pe frontieră. Ținînd seama de legătura (4.2) între componenta σ_{33} și sarcina normală, trebuie să avem deci

$$q(\xi, \eta) = + \sigma_{33}^m|_{z=0} = [h/4\pi(1 - \nu)] [(1 - 2\nu) r^{-3} + 3 h^2 r^{-5}], \quad (11)$$

astfel încât condiția la limită (10) devine

$$\Omega'''_{,3}|_{z=0} = [h/8\pi\mu(1-\nu)] [(1-2\nu)r^{-3} + 3h^2r^{-5}]. \quad (12)$$

Ca și în § 4, soluția acestei probleme poate fi căutată sub forma unui potențial newtonian de simplu strat, de densitate dată prin intermediul lui (12). Dar acest potențial poate fi găsit și sub formă finită.

Anume, să ținem seama că funcția Ω''' trebuie să fie armonică și regulată pentru $z > 0$. Întrucât în (12) apare funcția r , vom căuta potențialul Ω''' ca funcție de R_- : într-adevăr, valoarea la limită a lui R_- este chiar r , iar R_- nu se anulează în semispațiul $z > 0$, astfel că Ω''' poate fi construit cu ajutorul funcției $1/R_-$ și al derivatelor acesteia. Să presupunem deci că avem

$$\Omega'''(x, y, z) = A R_-^{-1} + B (R_-^{-1})_{,3}. \quad (13)$$

Un calcul simplu dă de aci

$$\Omega'''_{,3} = -A(z+h)R_-^{-3} + 3B(z+h)^2R_-^{-5} - BR_-^{-3},$$

și deci

$$\Omega'''_{,3}|_{z=0} = -(Ah+B)r^{-3} + 3Bh^2r^{-5}. \quad (14)$$

Prin comparație cu (12), căpătăm valorile coeficienților

$$A = -1/4\pi\mu, \quad B = h/8\pi\mu(1-\nu),$$

astfel că potențialul de simplu strat de determinat are expresia

$$\Omega''' = -(1/4\pi\mu) \{R_-^{-1} + [h/2(1-\nu)](z+h)R_-^{-3}\}. \quad (15)$$

Potențialul ω''' se obține din (15) prin integrare în raport cu $Z = z + h$:

$$\omega''' = -(1/4\pi\mu) \{\ln(R_- + z + h) - [h/2(1-\nu)]R_-^{-1}\}. \quad (16)$$

Soluția în deplasări a problemei acțiunii unei forțe concentrate unitare, aplicate în interiorul semispațiului și *dirijate paralel cu Oz*, se capătă deci însumând (1), (3) și (4.34), unde Ω și ω sînt dați de (15), (16):

$$\begin{aligned} u = & [1/16\pi\mu(1-\nu)] \{(3-4\nu)(R_+^{-1} + R_-^{-1})k + [(z-h)R_+^{-3}R_+ - (z+h)R_-^{-3}R_-]\} + \\ & + \text{grad} [z\Omega''' + (1-2\nu)\omega'''] - 4(1-\nu)k\Omega'''. \end{aligned} \quad (17)$$

b) Forță concentrată dirijată paralel la frontieră

Să presupunem acum că în punctul $(0,0,h)$ acționează o forță unitară *dirijată în sensul pozitiv al axei Ox*. Raționînd ca în cazul precedent, vom aplica în punctul $(0,0,-h)$ o sarcină de aceeași intensitate, direcție și sens. Întrucât efectul acestor două sarcini este identic pentru fețele

$z = +0$, respectiv $z = -0$, e de așteptat ca tensiunile tangențiale *totale* generate pe elementul de frontieră de normală exterioară $n = -k$, să fie nule.

Vectorul deplasare corespunzător acțiunii forței $Q = i$ aplicate în punctul $(0, 0, h)$ se va scrie, după (7.8.43) :

$$u_+ = [1/16\pi\mu(1-\nu)] [(3-4\nu) R_+^{-1} i + x R_+^{-3} R_+]. \quad (18)$$

Vectorul deplasare corespunzător acțiunii forței fictive $Q = i$ aplicate în punctul $(0, 0, -h)$ se va scrie la rîndul său

$$u_- = [1/16\pi\mu(1-\nu)] [(3-4\nu) R_-^{-1} i + x R_-^{-3} R_-]. \quad (19)$$

Pentru vectorul tensiune corespunzător deplasării (18) obținem din (7.8.44) (pentru $Q = i$ și $n = -k$, vectorul de poziție x fiind înlocuit cu R_+) :

$$\sigma_{-k}(u_+) = -[(1-2\nu)/8\pi(1-\nu)] R_+^{-3} [(i \cdot R_+) k - (k \cdot R_+) i - (k \cdot i) R_+ + \\ + 3(1-2\nu)^{-1} R_+^{-2} (-k \cdot R_+)(i \cdot R_+) R_+],$$

sau încă

$$\sigma_{-k}^+ = [(1-2\nu)/8\pi(1-\nu)] R_+^{-3} [-xk + (z-h) i + 3(1-2\nu)^{-1} x(z-h) R_+^{-2} R_+]. \quad (20)$$

Pentru vectorul tensiune corespunzător lui (19) obținem în mod analog

$$\sigma_{-k}^- = [(1-2\nu)/8\pi(1-\nu)] R_-^{-3} [-xk + (z+h) i + 3(1-2\nu)^{-1} x(z+h) R_-^{-2} R_-]. \quad (21)$$

Calculînd acum suma tensiunilor aplicate pe planul $z = 0$ obținem — ținînd din nou seama de notația (7) — :

$$(\sigma_{-k}^+ + \sigma_{-k}^-)|_{z=0} = -[1/4\pi(1-\nu)] x r^{-3} [(1-2\nu) - 3h^2 r^{-2}] k. \quad (22)$$

Ca și în cazul sarcinii concentrate dirijate după Oz , va trebui să găsim o a treia soluție a ecuațiilor Lamé omogene, corespunzătoare unei sarcini normale distribuite pe frontieră. În acest scop, va trebui să determinăm potențialul de simplu strat Ω' (unde semnul „prim” se referă la faptul că sarcina de studiat acționează după Ox), din condiția la limită

$$\Omega'_{,3}|_{z=\pm 0} = (1/2\mu) q'(\xi, \eta). \quad (23)$$

Raționînd ca în (10) — (12) și ținînd seama de (22), se găsește condiția

$$\Omega'_{,3}|_{z=\pm 0} = (1/2\mu) (\sigma_{33}^+ + \sigma_{33}^-)|_{z=\pm 0} = \\ = [1/8\pi\mu(1-\nu)] [(1-2\nu) x r^{-3} - 3h^2 x r^{-5}]. \quad (24)$$

Potențialul Ω' poate fi obținut printr-un procedeu analog celui folosit pentru determinarea lui Ω'' . Pentru aceasta, se observă că avem

$$[\ln(R_- + z + h)]_{,3} = R_-^{-1}, (R_-^{-1})_{,1} = -x R_-^{-3}, (R_-^{-1})_{,13} = 3(z+h) x R_-^{-5}, \quad (25)$$

astfel că cei doi termeni ce apar în (24) pot fi puși sub forma

$$x r^{-3} = -(R_-^{-1})_{,1}|_{z=0}, \quad -3h^2 x r^{-5} = -h (R_-^{-1})_{,13}|_{z=0}. \quad (26)$$

Ținând seama de (25) și (26), condiția la limită (24) devine

$$\Omega'_{,3}|_{z=0} = [1/8\pi\mu(1-\nu)] \{-(1-2\nu)[\ln(R_- + z + h)]_{,13} - h(R_-^{-1})_{,13}\}|_{z=0} \quad (27)$$

de unde, pentru motive de repetate ori expuse, urmează

$$\Omega' = - [1/8\pi\mu(1-\nu)] [(1-2\nu) \ln(R_- + z + h) + h R_-^{-1}]_{,1}. \quad (28)$$

Ținând seama de prima relație (25), precum și de faptul că

$$[(z + h) \ln(R_- + z + h) - R_-]_{,3} = \ln(R_- + z + h), \quad (29)$$

deducem prin integrarea în raport cu z a expresiei (28):

$$\omega' = - [1/8\pi\mu(1-\nu)] \{(1-2\nu) [(z + h) \ln(R_- + z + h) - R_-] + h \ln(R_- + z + h)\}_{,1}. \quad (30)$$

Soluția în deplasări a problemei semispațiului solicitat de o forță unitară concentrată aplicată în interiorul semispațiului și dirijată paralel cu Ox se obține deci sumând soluțiile (18), (19) și (4.34), unde Ω , ω sînt dați de (28) și (30):

$$u = [1/16 \pi\mu(1-\nu)] [(3-4\nu)(R_+^{-1} + R_-^{-1})i + x(R_+^{-3}R_+ + R_-^{-3}R_-)] + \\ + \text{grad} [z\Omega' + (1-2\nu)\omega'] - 4(1-\nu)k\Omega'. \quad (31)$$

Pentru o forță aplicată în $(0,0,h)$ și dirijată după Oy , soluția rezultă tot sub forma (31), intervertind rolurile lui x , u , i cu y , v , j , și înlocuind potențialii Ω' , ω' prin potențiali Ω'' , ω'' ce se deduc în același mod din (28), (30).

c) Cazul unei sarcini oarecare

Soluția problemei semispațiului solicitat de o forță concentrată p de componente p_1 , p_2 , p_3 aplicată într-un punct $(0,0,h)$ se capătă acum prin suprapunere. Expresia finală corespunzătoare este greoaie, dar elementară.

OBSERVAȚIE. În rezolvarea acestei probleme nu intervin funcții mai complicate decît în problema semispațiului solicitat pe frontieră: peste cele două soluții Kelvin-Somigliana, avem de suprapus cîte o soluție corespunzătoare unei sarcini *normale* pe frontieră, în determinarea căreia intervin numai potențiali de tipul (7.28), (7.29).

Componentele vectorului (31), ale analogului său pentru direcția Oy , și ale vectorului (17), sînt componentele matricii lui Green în problema lui Neumann pentru semispațiul elastic. Comparăția dintre calculele ce au dus la determinarea lor, și felul aproape elementar în care se obține funcția lui Green pentru ecuația lui Laplace pentru același domeniu (vezi (2.15)) arată încă odată treapta considerabil mai înaltă de dificultate la care se află studiul ecuațiilor lui Lamé.

Deplasînd punctul de aplicare al forței; sumînd efectele unor sisteme finite de asemenea forțe; în fine, în cazul unor sarcini continue, integrînd expresiile mai sus obținute (înmulțite cu factori ce caracterizează sarcina) — se poate ajunge la rezolvarea de probleme variate relative la semispațiul solicitat în interiorul său.

Calculule de efectuat nu sînt principial mai dificile decît cele din § 7. Într-adevăr, dat fiind că cea mai complicată funcție ce intervine în problema de față este cea din primul membru din (29), rezultă că soluția pentru cazul unor sarcini continue depinde de funcții de același tip cu funcțiile (7.28), (7.30) — cu deosebirea că integrarea (în sens propriu, sau înlocuită printr-o convoluție) se efectuează pe curbe, suprafețe, sau domenii de măsură spațială ne-nulă, conținute în semispațiul $z > 0$. (Vezi de ex. W. Dean et al. [1].)

CAPITOLUL 10

PROBLEMA CONTACTULUI ELASTIC

§ 1. GENERALITĂȚI

Problema contactului corpurilor elastice are o importanță practică deosebită : transmiterea forțelor se realizează cel mai adesea prin contactul unor corpuri solide, în primă aproximație, elastice.

Integrarea ecuațiilor problemei contactului (variante tridimensională) e complicată, și pretinde totuși o asemenea schematizare a fenomenului real, încât ne putem face o idee precisă numai despre ceea ce se petrece în vecinătatea imediată a zonei de contact. Îmbinată cu utilizarea principiului lui Saint-Venant, ea dă însă răspuns la numeroase probleme importante.

Problema contactului elastic a fost abordată corect pentru prima dată de către H. Hertz [1]. Mare parte din rezultatele sale, inclusiv soluția problemei ștanței cu bază plană eliptică, precum și sugestia de a folosi această soluție în problema contactului fără frecare, au fost obținute concomitent și de către J. Boussinesq (vezi A. Clebsch și B. de Saint-Venant [1], nota finală la §46).

Ideea de bază stă în asimilarea corpurilor în contact, cu niște semi-spății : aceasta îngăduie cercetarea comportării lor în vecinătatea zonei de contact cu ajutorul rezultatelor cunoscute din studiul problemei lui Neumann pentru semispățiul elastic. În particular, se presupune că corpurile în contact sînt perfect lucii, (sau, ceea ce este același lucru, separate de un strat de lubrefiant) ; nu există deci motive care să împiedice alunecarea lor locală unul pe celălalt în procesul contactului, astfel încît componentele tangențiale ale tensiunii la limită în zona de contact sînt nule. Problema este astfel redusă la o problemă de transmitere a unei sarcini *normale*, însă necunoscute, și repartizate pe un domeniu de asemenea necunoscut.

Cercetările lui Hertz și Boussinesq au fost urmate de studiile lui A. Dinnik [1] și N. Beliaev [3]. Lucrările lui N. Muskhelişvili [5], capitolul 6, și L. Galin [4], capitolul 1 — în problema plană a contactului — precum și cele ale lui A. Lurie [2] (vezi și [4], cap. 5), I. Ștaerman [1] și L. Galin [4], capitolul 2 în problema tridimensională, au adus metode și rezultate esențial noi. În aceeași perioadă, I. Sneddon [1], [3] a deschis drumul utilizării metodei transformatei Fourier, cu deosebire în problemele de contact plane și cu simetrie axială.

Ca articole de sinteză în problema contactului, vezi J. Goodier [4], § 9 ; N. Kilcevski [3] (incluzînd și probleme dinamice de contact) ; B.

Korenev [1]; G. Popov și N. Rostovțev [1]; D. Șerman [6], capitolul 2, și [8], § 3.2. Vezi încă indicațiile din § 14.

Ne vom limita aci la problema contactului *tridimensional fără frecare* a două corpuri elastice perfect lucii. Toate raționamentele vor fi valabile numai dacă, prin natura însăși a problemei, avem de-a face cu deformări și deplasări suficient de mici. Cazul în care, dimpotrivă, sînt de dorit deformări și deplasări cît mai mari — ca de pildă în diferite procese de prelucrare a metalelor — necesită desigur cu totul alt punct de vedere.

Dintre diferitele posibilități: contact într-un punct, contact în lungul unei drepte sau curbe, contact pe o porțiune de arie nenulă a frontierei — ne vom limita la *cazul contactului inițial într-un punct, sau pe o porțiune plană eliptică (eventual circulară) a frontierei*. (Unele soluții aproximative vor fi considerate și pentru alte domenii.)

Vom începe prin a presupune că unul din corpurile în contact este un semispațiu elastic, iar celălalt este un corp rigid, de formă dată, numit *ștanță*.

§ 2. PROBLEMA ȘTANȚEI CA PROBLEMĂ MIXTĂ

Să presupunem că unul din corpurile în contact este semispațiul *elastic* $z > 0$, iar celălalt este o *ștanță (rigidă)*. Să presupunem că, înainte de a intra în acțiune forțele care vor face ca ștanța să pătrundă în semispațiu, aceste două corpuri au fie un singur punct-frontieră comun, fie se află în contact pe o porțiune de arie nenulă a frontierelor lor.

Vom alege punctul comun drept origine O , comună la două sisteme de coordonate carteziene: sistemul $Oxyz$ legat de semispațiu, și un sistem $OXYZ$ legat de ștanță. Axele Oz și OZ sînt dirijate după normala *interioară* la semispațiu, respectiv la ștanță, în O . Prin urmare, sensul pozitiv pe OZ coincide cu cel negativ pe Oz . Axele Ox , Oy coincid cu OX , respectiv cu OY . Sistemul $Oxyz$ este drept.

Notînd cu $z = \varphi(X, Y)$ ecuația frontierei ștanței, vom presupune că funcția φ este de clasă cel puțin C^2 pe porțiuni. Problema are sens, numai dacă ștanța este „exterioară” semispațiului. Dacă contactul inițial se face într-un singur punct, acesta trebuie să fie deci un punct *eliptic* al suprafeței $Z = \varphi(X, Y)$ (vezi de ex. G. Vrăncianu [1], vol. 2, § 15.1; V. Smirnov [2], vol. 2, pct. 132). Alegînd planul tangent în O la suprafața ștanței drept plan OXY , avem

$$\varphi(0, 0) = \varphi_{,1}|_{X=Y=0} = \varphi_{,2}|_{X=Y=0} = 0. \quad (1)$$

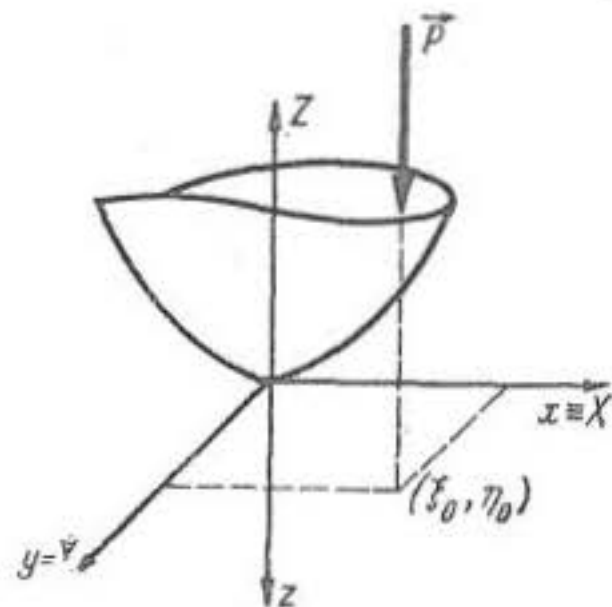


Fig. 10.2.1

În cazul contactului inițial pe o porțiune a planului frontieră, ecuația frontierei ștanței în această porțiune este pur și simplu $Z = 0$. (Exemplu frecvent: un cilindru cu bază plană.)

a) Condițiile la limită ale problemei

Vom începe prin examinarea cazului contactului într-un *punct* inițial; cele ce urmează se transferă, cu unele modificări ușor de înțeles, la cazul contactului inițial pe un *domeniu plan*.

Să presupunem că ștanța e supusă acțiunii unui sistem de forțe (reductibil, întrucât ștanța e rigidă, la o forță și un cuplu), care o fac să pătrundă în semispațiu. Echilibrul sistemului [ștanță + semispațiu] se va stabili când ștanța va fi pătruns la o anumită adâncime (necunoscută!), când punctul inițial de contact va fi fost înlocuit cu un *domeniu de contact* (de asemenea necunoscut!) pe care ștanța vine acum în atingere cu frontiera deformată a semispațiului, și când tensiunile (tot necunoscute!) ce iau naștere pe acest domeniu, vor face echilibru forțelor aplicate asupra ștanței.

Să presupunem că deplasările și deformațiile ce apar sînt destul de mici pentru a îngădui utilizarea teoriei liniare. În acest caz, condițiile la limită pot fi formulate pe frontiera *nedeformată* a semispațiului. Prin urmare, deși domeniul de contact *real* are, evident, forma „bazei” ștanței, se numește domeniu de contact acel domeniu \mathcal{D} al planului $z = 0$ care *după* deformație intră în contact, punct cu punct, cu frontiera ștanței. O astfel de înlocuire cere desigur ca deplasările și deformațiile să fie suficient de mici pentru ca și dimensiunile liniare ale lui \mathcal{D} să fie mici în raport cu razele principale de curbură ale suprafeței $Z = \varphi(X, Y)$ în origine.

Mai departe, să presupunem că suprafețele în contact sînt *perfect lucii*, așadar nu pot transmite sarcini tangențiale pe planul frontieră:

$$\sigma_{31}|_{z=0} = \sigma_{32}|_{z=0} = 0. \quad (2)$$

În afara domeniului de contact, avem desigur și

$$\sigma_{33}|_{z=0} = 0, \quad \xi \equiv (\xi, \eta) \in \mathcal{D}. \quad (3)$$

Dar în *interiorul* său, tensiunea normală la limită va fi o funcție *necunoscută*:

$$\sigma_{33}|_{z=0} = -p(\xi, \eta), \quad \xi \equiv (\xi, \eta) \in \mathcal{D}. \quad (4)$$

Raționamentul clasic constă în a determina funcția $p(\xi, \eta)$, ceea ce reduce chestiunea la o problemă deja studiată în § 9.4, întrucât odată cu $p(\xi, \eta)$ sînt cunoscuți în principiu și potențialii lui Hertz de care depinde soluția (9.4.35). (Subliniem aci avantajele considerabile ale metodei lui A. Lurie [2], care conduce la determinarea *directă* a potențialilor lui Hertz.)

Întrucît $p(\xi, \eta)$ nu e cunoscută, condiția (4) este lipsită de conținut și trebuie căutată o altă condiție în \mathcal{D} , independentă (explicit) de tensiunea normală la limită — așadar obligatoriu o condiție în deplasări.

Problema este deci o problemă mixtă, de tipul celei de *a patra probleme fundamentale*: pe o porțiune \mathcal{D} a frontierei, datele sînt formulate parțial în tensiuni, și parțial în deplasări — ceea ce corespunde unei anumite alegeri a coeficienților a_{ij} , b_{ij} , c_i din (4.2.4). Lucrurile sînt în fapt încă mai complicate, pentru că în cazul ștanței cu un punct inițial de contact, însuși domeniul \mathcal{D} pe care se formulează aceste condiții la limită este necunoscut.

Să presupunem așadar că ștanța pătrunde în semispațiul elastic sub acțiunea unei forțe \mathcal{R} și a unui cuplu de moment \mathcal{M} . După stabilirea echilibrului, ștanța însăși se află în echilibru sub acțiunea forței \mathcal{R} , a momentului \mathcal{M} , și a reacțiunilor ce apar pe \mathcal{D} . În virtutea condițiilor (2), aceste reacțiuni sînt paralele cu OZ , și deci avem $\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_2 = 0$. Prin urmare, în absența frecării, putem considera că ștanța este supusă acțiunii unei forțe *verticale* P , al cărei suport trece printr-un punct $(\xi_0, \eta_0, 0)$ din planul $z=0$ (diferit în general de O , și nu necesarmente situat în \mathcal{D}). Condițiile de echilibru a ștanței se scriu deci :

$$\iint_{\mathcal{D}} p(\xi, \eta) dD = P, \quad (5)$$

$$\iint_{\mathcal{D}} p(\xi, \eta) \xi dD = P\xi_0, \quad \iint_{\mathcal{D}} p(\xi, \eta) \eta dD = P\eta_0. \quad (6)$$

De îndată ce sarcina totală P , domeniul de contact \mathcal{D} și presiunile $p(\xi, \eta)$ sînt cunoscute, coordonatele ξ_0, η_0 pot fi și ele calculate.

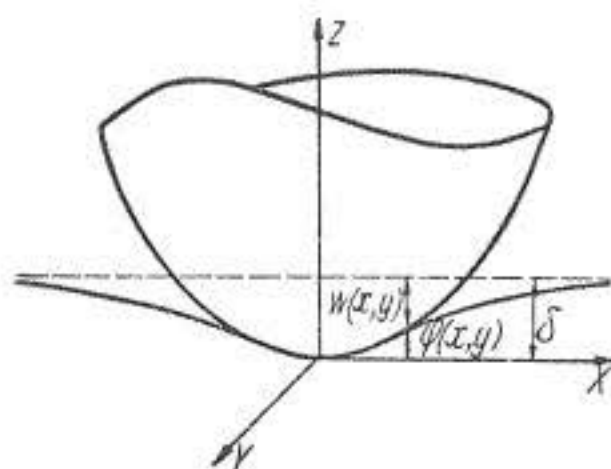


Fig. 10.2.2

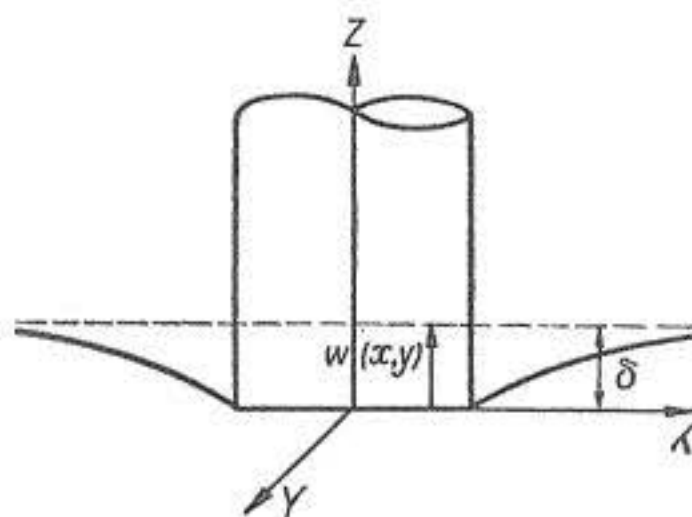


Fig. 10.2.3

În cele ce urmează ne vom limita la cazul unei ștanțe solicitate de un sistem static echivalent cu o forță verticală unică P , a cărei linie de acțiune trece prin O . În acest caz, vom spune că ștanța este acționată (solicitată) *central*. Dacă originea este punct de intersecție al unor eventuale axe de

simetrie ale domeniului de contact, e firesc ca presiunea $p(\xi, \eta)$ să posede și ea proprietățile de simetrie corespunzătoare. În acest caz, vom avea $\xi_0 = \eta_0 = 0$ și relațiile (6) vor fi identic verificate.

În mișcarea sa sub acțiunea forței P , ștanța coboară în semispațiu pînă la o anumită adîncime δ , care se va numi *penetrația* sa. Să presupunem acum că deplasările tangențiale u_1, u_2 sînt neglijabile în comparație cu $u_3 \equiv w$ pe domeniul de contact. Pentru orice punct din \mathcal{D} , este limpede că adîncimea pînă la care coboară punctul inițial de contact va fi egală cu suma cotei $\varphi > 0$ a unui punct oarecare de pe frontiera ștanței, cu deplasarea $w > 0$, căreia îi este supusă frontiera semispațiului în punctul corespunzător. Deducem de aci (vezi fig. 10.2.2) relația

$$w = \delta - \varphi(\xi, \eta) \quad \text{în } \mathcal{D}. \quad (7)$$

Toate considerațiile mecanice de mai sus rămîn valabile pentru o ștanță cu bază plană: în acest caz este suficient să luăm $\varphi(X, Y) \equiv 0$, și (7) se reduce la

$$w = \delta \quad \text{în } \mathcal{D}, \quad (8)$$

ceea ce exprimă pur și simplu faptul că toate punctele domeniului de contact se deplasează vertical cu o *aceeași* cantitate δ (vezi fig. 10.2.3).

Evident, relațiile (7) și (8) *nu au nici un sens* în afara lui \mathcal{D} . Se vede că în timp ce domeniul \mathcal{D} este cunoscut în (8), el este în schimb necunoscut în (7). În fine, penetrația δ e necunoscută în ambele relații.

În ce privește forma lui \mathcal{D} , trebuie să subliniem că frontiera \mathcal{L} a acestuia *nu se obține* prin simpla secționare a suprafeței $\varphi(X, Y)$ prin planul $Z = \delta$. Într-adevăr, contactul real între ștanță și frontiera semispațiului încetează la un nivel situat *sub* acest plan de secțiune, dat fiind că frontiera semispațiului se deformează, așa cum se vede în figurile 10.2.2 și 10.2.3.

Din condițiile mecanice ale problemei rezultă că în $\mathcal{D} + \mathcal{L}$, trebuie să avem $p(\xi, \eta) \geq 0$, căci numai în acest fel punctele celor două frontiere intră în contact. Dimpotrivă, în afara curbei \mathcal{L} trebuie să avem $p(\xi, \eta) \equiv 0$. Prin urmare, dacă curba \mathcal{L} *nu este* o linie singulară din punct de vedere geometric pe suprafața $Z = \varphi(X, Y)$, atunci trecerea de la presiunile pozitive din \mathcal{D} la cele nule din exterior trebuie să se efectueze continuu, și deci

$$p(\xi, \eta)|_{\mathcal{L}} = 0. \quad (9)$$

Această condiție poate fi înțeleasă, imaginîndu-ne procesul de pătrundere a ștanței cu un punct inițial de contact în semispațiu, cu extinderea în timp a domeniului \mathcal{D} , și trecerea funcției $p(\xi, \eta)$ într-un punct dat de la valori nule, la valori pozitive tot mai mari, pe măsură ce sarcina crește.

Dimpotrivă, dacă \mathcal{L} este o linie singulară pe suprafața ștanței (de ex.: pe o ștanță cilindrică cu baza plană), ne putem aștepta la apariția de discontinuități ale tensiunii normale la traversarea acestei curbe. Vom reveni asupra acestor chestiuni în § 9.

b) Ecuația integrală a problemei ștanței

Putem trece acum la formularea problemei relative la $p(\xi, \eta)$. Întrucât semispațiul este solicitat numai de sarcini normale, starea sa elastică este caracterizată de formulele (9.4.35). De aci deducem (folosind notația w pentru u_3 ; vezi și pag. 589):

$$w = z\Omega_{,3} - 2(1 - \nu)\Omega, \quad (10)$$

unde potențialul de simplu strat Ω e dat de (9.4.28):

$$\Omega(x, y, z) = -(1/4\pi\mu) \iint_{\mathcal{D}} [p(\xi, \eta) / \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z^2}] dD. \quad (11)$$

Introducând această expresie în (10) și luând $z = 0$, căpătăm deplasarea w pe planul-frontieră. Introducând mai departe această valoare în condiția (7), obținem relația, *valabilă numai în \mathcal{D}* :

$$[(1 - \nu)/2\pi\mu] \iint_{\mathcal{D}} [p(\xi, \eta) / \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}] dD = \delta - \varphi(x, y), \quad (12)$$

unde am revenit la notația $(x, y, 0)$ pentru punctul de observație de pe planul-frontieră, rezervând notația $(\xi, \eta, 0)$ pentru punctul curent de integrare pe acest plan.

Aceasta este o *ecuație integrală de prima speță* pentru $p(\xi, \eta)$. Rezolvarea problemei ștanței depinde de posibilitatea de a rezolva această ecuație, însoțită de ecuația de echilibru (5) și — dacă este cazul — de condiția de continuitate (9). Dacă vom determina din (12) funcția $p(\xi, \eta)$ ca funcție de δ și de anumiți parametri ce caracterizează domeniul (necunoscut) \mathcal{D} , condiția (9) va furniza acești din urmă parametri ca funcții de δ — și atunci va mai rămâne să ne servim de (5) pentru a găsi penetrația, și deci și forma domeniului și presiunea.

Pentru $\varphi \equiv 0$, \mathcal{D} este cunoscut, și același raționament se poate repeta, fără a mai avea a ne servi de (9) — care de altfel aci nu mai are sens.

OBSERVAȚIA 1. Pentru cazul unei sarcini excentrice, problema se complică datorită apariției unui cuplu care tinde să facă ștanța să se rotească. În ultimă instanță, aceasta revine la a introduce în (7) un termen liniar în ξ și η : cei doi coeficienți suplimentari ce apar astfel se determină ca și δ , făcând însă uz și de relațiile (6), care nu mai sînt acum identic verificate. Pentru cazul particular al ștanței cu bază plană, problema a fost abordată inițial de V. Abramov [1]. În cazul general, termenii din (7) pot fi luați în considerare numai făcînd uz de metoda lui Lurie, deja indicată.

Studiul ecuației (12) este o chestiune de o extremă complexitate.

Uneori, soluția acestei ecuații este cunoscută dacă cunoaștem soluția problemei lui Neumann pentru semispațiul supus unei sarcini normale

repartizate pentru anumite domenii de solicitare și anumite aspecte ale funcției $p(\xi, \eta)$. (Vezi exemplul de la finele § 9.5, pag. 602 : dacă baza ștanței are forma ce rezultă din (9.5.16), putem conchide că sub ștanță avem $p = \text{const.}$) Un astfel de procedeu de tip invers reușește însă numai rareori.

Problema se simplifică considerabil în variantele sale uni-dimensionale, la care conduce în fond problema contactului plan (cilindri infiniți în contact în lungul unor generatoare), sau a contactului cu simetrie axială.

Integrala (12) este valoarea potențialului newtonian de simplu strat, de densitate proporțională cu $p(\xi, \eta)$, repartizată pe domeniul (necunoscut) \mathcal{D} . Valoarea acestui potențial în orice punct interior lui \mathcal{D} este dată în (12) prin intermediul funcției cunoscute $\varphi(x, y)$ și al unor constante necunoscute.

Acest fapt arată că pentru studiul *experimental* al problemei, sînt utile orice analogii (în primul rînd, electrice) care conduc la determinarea *densității* de potențial, atunci cînd însuși potențialul e dat în domeniul în care densitatea sa e neidentică nulă. (Pentru detalii în acest sens, vezi de ex. L. Nișteșkii [1].)

În cele ce urmează, vom studia ecuația (12) tot pe linia unei metode inverse, totuși suficient de generale și de sistematice, și permițînd abordarea problemei clasice a contactului. Pentru simplitatea scrierii, vom folosi frecvent notațiile

$$p(\xi) \equiv p(\xi, \eta), \quad v(x) \equiv V(x, y, 0) = \iint_{\mathcal{D}} \frac{p(\xi, \eta) dD}{\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}}. \quad (13)$$

Întrucît în (12) constantele μ , ν nu intervin separat, este firească considerarea unei noi constante a materialului¹⁾

$$\theta = (1 - \nu)/2\pi\mu. \quad (14)$$

Ecuația problemei ștanței solicitate central se va scrie deci

$$\theta \iint_{\mathcal{D}} [p(\xi, \eta) / \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}] dD = \delta - \varphi(x, y) \quad \text{în } \mathcal{D}, \quad (15)$$

de integrat cu condiția (5) :

$$\iint_{\mathcal{D}} p(\xi, \eta) dD = P. \quad (16)$$

¹⁾ A nu se confunda cu dilatarea de volum θ , sau cu unghiul θ .

În cazul unei ștanțe cu bază plană care pătrunde în semispațiu fără a se roti, ecuația (15) se reduce la

$$\theta \iint_{\mathcal{D}} [p(\xi, \eta) / \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}] dD = \delta \quad \text{în } \mathcal{D}, \quad (17)$$

de integrat cu aceeași condiție de echilibru (16).

OBSERVAȚIA 2. Înaintea studiului exact al problemei contactului, chestiunea a fost abordată cu ajutorul ipotezei lui Winkler și Zimmermann, constând în presupunerea că există proporționalitate între sarcina pe frontieră, și deplasarea normală cauzată de ea. În genere, această ipoteză este foarte departe de a descrie starea reală de lucruri (vezi de ex. finele paragrafului § 9.5). Totuși, există cazuri particulare în care teoria exactă o confirmă (vezi L. Galin [1]).

c) Indicații asupra potențialilor generalizați

Din punctul de vedere al unei teorii generale, problema ștanței poate fi subordonată teoriei potențialilor generalizați. După M. Riesz [1], se numește *potențial generalizat de ordin α* în \mathcal{E}_m , integrala

$$V^\pi(x) = \int_{\mathcal{E}_m} d\pi(\xi) / [R(x; \xi)]^{m-\alpha}, \quad (18)$$

unde $0 < \alpha \leq 2$, și unde $d\pi(\xi)$ este produsul unei anumite funcții de punct în \mathcal{E}_m , cu elementul de volum din \mathcal{E}_m . Pentru $m = 3$, $\alpha = 2$, și pentru integrala din (18) luată pe o suprafață din \mathcal{E}_3 , se obține drept caz-limită potențialul newtonian de simplu strat.

Intrucât în ecuațiile (15) sau (17) avem de-a face cu valori la limită ale unor astfel de potențiali pentru domenii \mathcal{D} din planul $z = 0$, aceasta revine la a considera potențiali generalizați cu $m = 2$, $\alpha = 1$. În acest caz, vom avea

$$d\pi(\xi) \equiv d\pi(\xi, \eta) = p(\xi, \eta) dD. \quad (19)$$

De altfel, integrala (18) are sens chiar dacă $d(\xi)$ nu este introdusă sub forma (19), așadar chiar dacă nu există o densitate a presiunilor $p(\xi)$; pentru aceasta, este suficient ca $d\pi$ să fie definită ca o măsură Radon pozitivă, cu suportul conținut în \mathcal{D} .

Condiția (16) se scrie — abstracție făcând de o constantă multiplicativă P —

$$\pi(\mathcal{D}) = 1, \quad (20)$$

unde $\pi(\mathcal{D})$ este masa totală a repartiției de presiuni $d\pi(\xi)$.

A rezolva ecuațiile (15) sau (17), aceasta înseamnă a determina repartiția de presiuni $d\pi$ de masă totală unitară, pentru care potențialul generalizat de ordin 1 ia valoarea $\delta - \varphi$, respectiv δ , în \mathcal{D} .

Pentru acest din urmă caz (ținând seama și de (20)) se cunosc rezultate suficient de simple și de precise. A rezolva ecuația (17) cu condiția (16) (sau — ceea ce revine la același lucru — (20)) înseamnă a găsi repartiția de echilibru pe \mathcal{D} , adică a determina o repartiție

de presiuni de masă totală unitară și astfel încît potențialul generat de ea să fie constant în \mathcal{D} . O. Frostmann [1] a demonstrat că există întotdeauna o soluție a acestei probleme, abstracție făcînd de o mulțime de capacitate²⁾ nulă. La această concluzie se ajunge demonstrîndu-se că există o măsură astfel încît minimul integralei energiei

$$\langle \pi, \pi \rangle = \iint_{\mathcal{E}_m \times \mathcal{E}_m} d\pi(x) d\pi(\xi) / [R(x; \xi)]^{m-\alpha}, \quad (21)$$

pentru $d\pi$ în clasa măsurilor de masă totală unitară și avînd suportul conținut în \mathcal{D} , să fie atins. Potențialul de echilibru pe \mathcal{D} este tocmai potențialul ce corespunde repartiției de energie minimale.

Pentru a se demonstra *unicitatea* soluției, se face uz de teorema lui M. Riesz [1], care afirmă că pentru orice potențial generalizat de ordin α , avem

$$\langle \pi_1 - \pi_2, \pi_1 - \pi_2 \rangle > 0 \quad (22)$$

pentru $\pi_1 \not\equiv \pi_2$, unde π_1, π_2 sînt măsuri pozitive. De aci urmează că măsura care realizează minimul lui (21) este unic determinată, precum și că ea este *pozitivă*.

Dacă frontiera \mathcal{L} a domeniului \mathcal{D} satisface condiția lui Poincaré³⁾, atunci potențialul de echilibru este constant în toate punctele din $\mathcal{D} + \mathcal{L}$.

§ 3. POTENȚIALUL DISCULUI ELIPTIC ÎNTR-UN PUNCT INTERIOR. TEOREMA LUI GALIN ȘI ȘTAERMAN

Să presupunem pentru început că domeniul \mathcal{D} este de formă *eliptică*, așadar deplin caracterizat de cunoașterea semiaxelor a, b ale frontierei sale \mathcal{L} :

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1. \quad (1)$$

Întrucît ecuația (2.15) este valabilă în \mathcal{D} , ne va interesa expresia potențialului (2.11) pentru puncte interioare elipsei (1) pe planul $z = 0$. Vom nota

$$v(x) = V(x, y, 0) = -4\pi\mu \Omega(x, y, 0) = \iint_{\mathcal{D}} \frac{p(\xi, \eta) dD}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}}, \quad x \in \mathcal{D}. \quad (2)$$

²⁾ Capacitatea mulțimii compacte \mathcal{K} este numărul

$$\mathcal{C}(\mathcal{K}) = \sup \{ \pi(\mathcal{K}) ; V^\pi \leq 1 \},$$

adică cea mai mare dintre masele de repartiții de presiune, definite pe \mathcal{K} , și astfel încît $V^\pi(x)$, $x \in \mathcal{K}$ să nu depășească unitatea (sau, abstracție făcînd de o constantă multiplicativă, să fie mărginită). Dacă o mulțime este de capacitate nulă, aceasta înseamnă că nu este posibil să-i atribuim o repartiție de presiuni astfel încît potențialul generalizat corespunzător să rămînă mărginit.

³⁾ Se spune că un domeniu \mathcal{D} satisface condiția lui Poincaré, dacă în fiecare din punctele sale frontiere se poate construi un con în întregime conținut în domeniu într-o anumită vecinătate a punctului considerat.

Este firesc să căutăm $p(\xi, \eta)$ sub o formă care să reflecte oarecum proprietățile geometrice ale lui \mathcal{D} . Anume, vom lua

$$p(\xi, \eta) = \sum_{j=0}^m a_j (1 - \xi^2/a^2 - \eta^2/b^2)^{j-1/2}. \quad (3)$$

Calculul integralei (2) pentru expresia (3) a densității a fost realizat de către L. Galin [2] (vezi și [4], § 2.8), și I. Ștaerman [1], § 4.1. Demonstrații mai recente sînt date de N. Rostovțev [6] și I. Zamfirescu [1]. Vom expune aci raționamentul lui Ștaerman, direct și elementar.

Să considerăm funcțiile

$$v_j(x) = \iint_{\mathcal{D}} \frac{(1 - \xi^2/a^2 - \eta^2/b^2)^{j-1/2}}{\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}} dD. \quad (4)$$

Cu aceasta, (2) se va scrie sub forma sumei

$$v(x) = \sum_{j=0}^m a_j v_j(x). \quad (5)$$

Dacă vom trece în (4) la coordonatele polare definite de

$$\begin{aligned} \xi - x &= R \cos \chi, \\ \eta - y &= R \sin \chi, \\ dD &\equiv d\xi d\eta = R dR d\chi, \end{aligned} \quad (6)$$

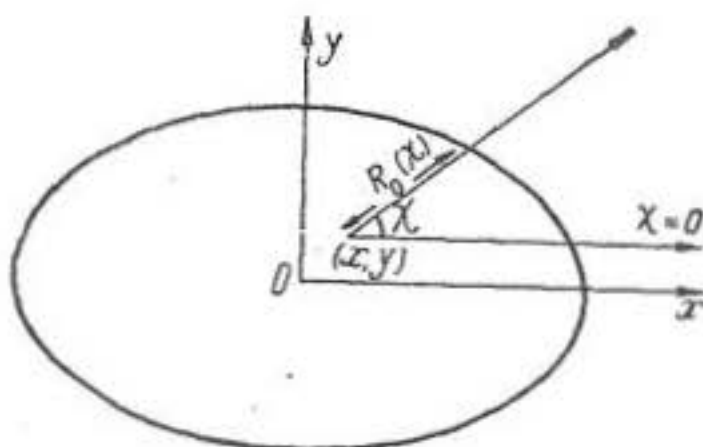


Fig. 10.3.1

radicalul de la numitorul din (4) dispare și obținem

$$v_j(x) = \int_0^{2\pi} d\chi \int_0^{R_0(\chi)} [1 - (x + R \cos \chi)^2/a^2 - (y + R \sin \chi)^2/b^2]^{j-1/2} dR, \quad (7)$$

unde $R_0(\chi)$ este distanța de la punctul (x, y) la punctul (ξ_0, η_0) în care raza polară de unghi χ taie elipsa (1). Întrucît acest punct e situat pe elipsă, avem

$$(x + R_0 \cos \chi)^2/a^2 + (y + R_0 \sin \chi)^2/b^2 = 1. \quad (8)$$

Introducînd notațiile

$$\begin{aligned} A(\chi) &= \frac{\cos^2 \chi}{a^2} + \frac{\sin^2 \chi}{b^2}, \quad B(\chi) = \frac{x \cos \chi}{a^2} + \frac{y \sin \chi}{b^2}, \\ C &= 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}, \end{aligned} \quad (9)$$

vom transcrie (8) sub forma

$$A R_0^2 + 2 B R_0 - C = 0, \quad (10)$$

unde avem întotdeauna

$$A(\chi) > 0, \quad C > 0. \quad (11)$$

(Prima relație este evidentă; cea de a doua rezultă din faptul că punctul (x, y) este *interior* elipsei.) Soluția ecuației (10) este

$$R_0(\chi) = [-B + \sqrt{B^2 + AC}]/A, \quad (12)$$

unde $B^2 + AC > B^2 \geq 0$; am ales semnul pozitiv pentru ca să avem $R_0(\chi) > 0$.

Ținând seama de notațiile (9), obținem acum din (7)

$$v_j(x) = \int_0^{2\pi} I_j(\chi) d\chi, \quad (13)$$

unde

$$I_j(\chi) = \int_0^{R_0(\chi)} A^{1/2-j} (AC - 2ABR - A^2R^2)^{j-1/2} dR, \quad (14)$$

sau încă

$$I_j(\chi) = \int_0^{R_0(\chi)} \left(\frac{B^2}{A} + C \right)^{j-1/2} \left[1 - \left(\frac{B + AR}{\sqrt{B^2 + AC}} \right)^2 \right]^{j-1/2} dR. \quad (15)$$

Pentru a putea face aci schimbarea evidentă de variabilă

$$\cos \theta = [B(\chi) + R A(\chi)] / \sqrt{B^2(\chi) + CA(\chi)}, \quad (16)$$

unde χ are rol de parametru, și unde limităm variația lui θ între 0 și π (pentru ca corespondența stabilită între θ și R să fie biunivocă), trebuie să ne convingem că mărimea din (16) are modulul cel mult egal cu 1. Amintind că avem $0 \leq R \leq R_0(\chi)$ și $A > 0$, deducem că $B \leq B + AR \leq B + AR_0$, de unde

$$B / \sqrt{B^2 + AC} \leq (B + AR) / \sqrt{B^2 + AC} \leq (B + AR_0) / \sqrt{B^2 + AC}. \quad (17)$$

Or, din (12) rezultă că al treilea raport din (17) este egal cu 1; întrucât avem $AC > 0$, urmează că primul raport din (17) este în modul cel mult egal cu 1. Schimbarea de variabilă (16) este deci justificată.

Vom nota cu $\theta(\chi)$ acea valoare a lui θ care corespunde valorii $R=0$, astfel că

$$\cos \theta(\chi) = B(\chi) / \sqrt{B^2(\chi) + CA(\chi)}. \quad (18)$$

Luând $R = R_0(\chi)$, din (12) și (16) urmează $\cos \theta[R_0(\chi), \chi] = 1$, și deci

$$\theta[R_0(\chi), \chi] = 0. \quad (19)$$

Relațiile (18), (19) dau limitele de integrare în raport cu θ . Prin diferențierea relației (16), deducem și

$$dR = - (1/\sqrt{A}) \sqrt{B^2/A + C} \sin \theta d\theta, \quad (20)$$

astfel că după calcule elementare, (15) devine

$$I_j(\chi) = \int_0^{\theta(\chi)} (1/\sqrt{A}) (B^2/A + C)^j \sin^{2j} \theta d\theta. \quad (21)$$

Pasul imediat următor constă în a efectua în (21) o astfel de schimbare de variabilă, încît să obținem o integrală cu limite fixe. Aceasta se realizează luînd

$$\chi = \pi + \psi. \quad (22)$$

Introducînd (22) în (9), conchidem că

$$A(\chi) = A(\pi + \psi) = A(\psi), \quad B(\chi) = B(\pi + \psi) = -B(\psi). \quad (23)$$

(Amintim că C este independent de χ .) Ținînd seama de (23) în (18) căpătăm desigur $\cos \theta(\chi) = \cos \theta(\pi + \psi) = -\cos \theta(\psi)$, de unde (întrucît $0 \leq \theta \leq \pi$) conchidem

$$\theta(\chi) = \pi - \theta(\psi). \quad (24)$$

Să scriem acum integrala (13) sub forma

$$v_j(x) = v_j^1(x) + v_j^2(x), \quad (25)$$

unde v_j^1 este valoarea integralei calculate între limitele 0 și π , iar v_j^2 este aceeași integrală, calculată însă între π și 2π . Ținînd seama de (21), obținem

$$v_j^2(x) = \int_{\pi}^{2\pi} I_j(\chi) d\chi = \int_{\pi}^{2\pi} d\chi \int_0^{\theta(\chi)} (1/\sqrt{A}) (B^2/A + C)^j \sin^{2j} \theta d\theta. \quad (26)$$

Efectuînd schimbarea (22) și folosind (23) și (24), căpătăm de aci

$$v_j^2(x) = \int_0^{\pi} d\psi \int_0^{\pi - \theta(\psi)} [1/\sqrt{A(\psi)}] [B^2(\psi)/A(\psi) + C]^j \sin^{2j} \theta d\theta, \quad (27)$$

expresie identică cu $v_j^1(x)$, abstracție făcînd numai de limitele de integrare în raport cu θ . Rămîne deci de efectuat o ultimă schimbare de variabilă, care să lase intact integrandul, și să modifice convenabil limitele de integrare. Luînd

$$\theta = \pi - \theta', \quad (28)$$

limitele 0 și $\pi - \theta(\psi)$ sînt înlocuite prin limitele π și $\theta(\psi)$ în raport θ' . Avem desigur $\sin \theta = \sin \theta'$ și $d\theta = -d\theta'$, astfel că (27) devine

$$v_j^2(x) = - \int_0^{\pi} d\psi \int_{\pi}^{\theta(\psi)} [1/\sqrt{A(\psi)}] [B^2(\psi)/A(\psi) + C]^j \sin^{2j} \theta' d\theta'. \quad (29)$$

Adunînd acum integrala $v_j^1(x)$ sub forma ce rezultă din (13) și (21) (așadar forma (26), dar cu limitele 0 și π în integrala în raport cu χ), cu integrala $v_j^2(x)$ din (29), și notînd variabilele de integrare în ambele integrale cu aceleași litere, fie ele din nou χ și θ , căpătăm

$$v_j(x) = \int_0^\pi d\chi \int_0^\pi [1/\sqrt{A(\chi)}] [B^2(\chi)/A(\chi) + C]^j \sin^{2j} \theta d\theta, \quad (30)$$

unde limitele sînt *fixe*, și integrările pot fi efectuate separat.

Să considerăm acum integralele

$$b_j(x) = \int_0^\pi [1/\sqrt{A(\chi)}] [B^2(\chi)/A(\chi) + C]^j d\chi, \quad (31)$$

$$c_j = \int_0^\pi \sin^{2j} \theta d\theta. \quad (32)$$

Introducînd expresiile (9) în (31), căpătăm după calcule elementare

$$b_j(x) = ab \int_0^\pi \left[1 - \frac{(x \sin \chi - y \cos \chi)^2}{a^2 \sin^2 \chi + b^2 \cos^2 \chi} \right]^j \frac{d\chi}{\sqrt{a^2 \sin^2 \chi + b^2 \cos^2 \chi}}. \quad (33)$$

Integrala c_j se calculează prin recurență :

$$c_j = - \int_0^\pi \sin^{2j-1} \theta d(\cos \theta) = (2j-1) \int_0^\pi \sin^{2(j-1)} \theta \cos^2 \theta d\theta,$$

de unde urmează $(2j) c_j = (2j-1) c_{j-1}$. Dar întrucît din (32) avem evident $c_0 = \pi$, căpătăm în definitiv

$$c_j = [(2j-1)!!/(2j)!!] \pi, \quad c_0 = \pi. \quad (34)$$

Introducînd acum (33) și (34) în (30), iar expresia astfel obținută, în suma (5), rezultă formula finală

$$\begin{aligned} v(x) \equiv V(x, y, 0) = \pi ab \int_0^\pi \left\{ a_0 + \sum_{j=1}^m \frac{(2j-1)!!}{(2j)!!} a_j \times \right. \\ \left. \times \left[1 - \frac{(x \sin \chi - y \cos \chi)^2}{a^2 \sin^2 \chi + b^2 \cos^2 \chi} \right]^j \right\} \frac{d\chi}{\sqrt{a^2 \sin^2 \chi + b^2 \cos^2 \chi}}. \end{aligned} \quad (35)$$

Aceasta este deci valoarea potențialului newtonian de simplu strat de densitate (3) într-un punct *interior* al discului eliptic de frontieră (1). Semnificația acestui rezultat stă în faptul că *expresia (35) este un polinom de grad m în raport cu x^2 și y^2 .*

§ 4. PROBLEMA ȘTANȚEI CU BAZĂ PLANĂ ELIPTICĂ, ACȚIONATĂ CENTRAL

a) Soluția problemei

Să presupunem că ștanța are *baza plană*, mărginită de elipsa (3.1), și o astfel de configurație a suprafeței, încît domeniul de contact \mathcal{D} coincide cu această bază. (Exemplu : un cilindru de ax Oz și de curbă directoare (3.1).) În acest caz, \mathcal{D} este cunoscut, și coincide cu baza ștanței.

Alegînd originea în centrul lui \mathcal{D} , și presupunînd că linia de acțiune a sarcinii P trece prin origine, avem de rezolvat ecuația (2.17) cu condiția (2.16), așadar

$$\delta/\theta = \iint_{\mathcal{D}} [p(\xi, \eta) / \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}] dD \quad \text{în } \mathcal{D}, \quad (1)$$

$$P = \iint_{\mathcal{D}} p(\xi, \eta) dD. \quad (2)$$

Întrucît \mathcal{D} este cunoscut, dacă vom determina din (1) presiunea $p(\xi, \eta)$ ca funcție de parametrul (necunoscut) δ , relația (2) va permite și aflarea acestuia din urmă.

Membrul al doilea din (1) este funcția $V(x, y, 0)$ din (3.2), astfel că (1) devine

$$V(x, y, 0) = \delta/\theta \quad \text{în } \mathcal{D}. \quad (3)$$

Întrucît \mathcal{D} este o elipsă, putem folosi rezultatele din § 3. Pentru ca potențialul (3.35) să se reducă la o constantă, este deci necesar și suficient ca densitatea să aibă forma (3.3), cu toți $a_i = 0$, cu excepția lui a_0 . Prin urmare, presiunea are forma

$$p(\xi, \eta) = a_0 : \sqrt{1 - \xi^2/a^2 - \eta^2/b^2}. \quad (4)$$

Făcînd uz de formula (3.35), putem transcrie acum (3) sub forma

$$\pi a b a_0 \int_0^\pi d\chi / \sqrt{a^2 \sin^2 \chi + b^2 \cos^2 \chi} = \delta/\theta, \quad (5)$$

de unde se obține valoarea lui a_0 sub forma

$$a_0 = (1/DI) (\delta/\theta), \quad (6)$$

unde D este aria lui \mathcal{D} , iar I este integrala din (5).

Să presupunem axele alese în așa fel încît $b \leq a$, și să considerăm aria D și excentricitatea k a elipsei de contact :

$$D = \pi ab, \quad k = \sqrt{1 - b^2/a^2}. \quad (7)$$

Pentru integrala din (5) avem pe rând

$$I = \int_0^\pi d\chi / \sqrt{a^2 + (b^2 - a^2) \cos^2 \chi} = (1/a) \int_0^\pi d\chi / \sqrt{1 - k^2 \cos^2 \chi}. \quad (8)$$

Efectuând aci schimbarea de variabilă

$$\chi = \frac{1}{2} \pi - \psi, \quad d\chi = -d\psi, \quad (9)$$

și remarcând simetria integrandului, obținem

$$I = (2/a) K(k), \quad (10)$$

unde

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} d\psi / \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi} \quad (11)$$

este *integrala eliptică completă de prima speță*, de modul k .

Pentru detalii asupra integralelor eliptice complete, cu aplicație specială la problema de contact, vezi de ex. I. Ștaerman [1], anexa 1. Integrala $K(k)$ este tabulată (vezi de ex. E. Jahnke și F. Emde [1], partea a 2-a, cap. 5, B; sau H. Dwight [1], pct. 1040). Aceste tabele dau valorile $K(k)$ în funcție de $\alpha = \arcsin k$. Tabele detaliate pentru integralele eliptice complete și necomplete de toate trei spețele sînt datorate lui V. Beliaikov et al. [1].

Pentru o elipsă de contact dată, mărimea I din (6) este deci cunoscută. Introducînd (10) în (6), și ținînd seama de (2.14) și (7), obținem

$$a_0 = [\mu/(1 - \nu)] [\delta/b K(k)]. \quad (12)$$

Să introducem acum expresia (4) în condiția de echilibru (2):

$$P = a_0 \iint_{\mathcal{D}} dD / \sqrt{1 - \xi^2/a^2 - \eta^2/b^2}. \quad (13)$$

Pentru a calcula integrala din (13), fie ea J' , vom trece la coordonate polare cu polul în origine:

$$\xi = R \cos \chi, \quad \eta = R \sin \chi, \quad dD = R dR d\chi. \quad (14)$$

Notînd și aci cu $R_0(\chi)$ distanța la punctele de pe frontieră, căpătăm

$$J' = \int_0^{2\pi} d\chi \int_0^{R_0(\chi)} R dR / \sqrt{1 - R^2 [(\cos^2 \chi)/a^2 + (\sin^2 \chi)/b^2]}, \quad (15)$$

unde coeficientul lui R^2 este chiar $A(\chi)$ din (3.9). Prin urmare, pe frontiera elipsei avem $R_0^2(\chi)A(\chi) = 1$, astfel că (15) devine

$$J' = - \int_0^{2\pi} [1/A(\chi)] d\chi \int_0^{1/\sqrt{A(\chi)}} d[\sqrt{1 - A(\chi) R^2}],$$

de unde

$$J' = - \int_0^{2\pi} [1/A(\chi)] \sqrt{[1 - A(\chi)R^2]} \Big|_0^{1/\sqrt{A(\chi)}} d\chi = \int_0^{2\pi} [1/A(\chi)] d\chi. \quad (16)$$

Ținând seama aci de (3.9) și de simetria integrandului, avem

$$J' = 4 a^2 b^2 \int_0^{\pi/2} d\chi / (a^2 \sin^2 \chi + b^2 \cos^2 \chi), \quad (17)$$

și încă, după schimbarea de variabilă $\operatorname{tg} \chi = (b/a) t$, obținem

$$\begin{aligned} J' &= 4 a^2 b^2 \int_0^{\pi/2} (d \operatorname{tg} \chi) / (a^2 \operatorname{tg}^2 \chi + b^2) = 4 ab \int_0^{\infty} dt / (1 + t^2) = \\ &= 4 ab \operatorname{arc} \operatorname{tg} t \Big|_0^{\infty} = 2 \pi ab, \end{aligned} \quad (18)$$

astfel că (13) se reduce la $P = 2\pi ab a_0$, de unde

$$a_0 = \frac{1}{2} (P/D). \quad (19)$$

Coeficientul a_0 rezultă deci sub o formă elementară, și chiar independentă de δ . Comparînd expresiile (12) și (19) și amintind notațiile (2.14) și (7), urmează

$$\delta = \theta P [K(k)/a], \quad (20)$$

unde se separă vizibil un factor funcție de material, unul funcție de sarcină, și unul pur geometric. Introducînd încă (19) în (4), căpătăm

$$p(\xi, \eta) = \frac{1}{2} (P/D) [1/\sqrt{1 - \xi^2/a^2 - \eta^2/b^2}], \quad (21)$$

și problema este complet rezolvată.

b) Despre repartiția presiunilor sub ștanță

Notînd presiunea medie sub ștanță cu

$$p_m = P/D, \quad (22)$$

se vede că presiunea $p(\xi, \eta)$ ia valoarea *minimă* în centrul lui \mathcal{D} :

$$p_{\min} = p(0,0) = 0,50 p_m. \quad (23)$$

Dimpotrivă, ea tinde la infinit în vecinătatea frontierei \mathcal{L} a lui \mathcal{D} , frontieră care constituie o linie singulară pe suprafața ștanței. Unei repartiții uniforme a deplasărilor îi corespunde așadar o repartiție extrem de neuniformă a presiunilor. (Vezi și § 2, pag. 625.)

Rezultate sugestive în legătură cu comportarea presiunii în vecinătatea liniei \mathcal{L} au fost date (atît în cazul problemei ştanţei plane cît şi în cel al ştanţei cu baza plană circulară) de către I. Ştaerman [1], §§ 2.3 şi 3.3.

În fapt, întrucît presiunile cresc considerabil în vecinătatea lui \mathcal{L} , materialul trece aci în stare de deformare plastică, sau se fisurează. Aceasta duce la o re-distribuire a tensiunilor de natură să evite apariţia de tensiuni infinite, lipsite de sens.

§ 5. PROBLEMA ŞTANŢEI PARABOLOIDALE ACŢIONATE CENTRAL

Vom numi pe scurt *ştanţă paraboloidală*, ştanţa a cărei frontieră este un paraboloid eliptic, de ecuaţie

$$Z = \frac{1}{2} (X^2/\rho' + Y^2/\rho''), \quad (1)$$

unde ρ' , ρ'' sînt razele de curbură principale în origine. Evident, axele OXY sînt tangente la liniile de curbură de pe suprafaţa ştanţei, şi trebuie să avem $\rho', \rho'' \geq 0$. Pentru a fixa ideile, vom alege axele astfel încît $\rho'' \leq \rho'$.

Ecuaţia integrală (2.15) ia acum forma

$$\delta - \frac{1}{2} x^2/\rho' - \frac{1}{2} y^2/\rho'' = \theta \iint_{\mathcal{D}} [p(\xi, \eta)/\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}] dD, \quad (2)$$

iar condiţia de echilibru (2.16) rămîne sub aceeaşi formă :

$$P = \iint_{\mathcal{D}} p(\xi, \eta) dD. \quad (3)$$

Din aceste două ecuaţii — unde ρ' , ρ'' , θ şi P sînt cunoscute — trebuie să se determine domeniul de contact \mathcal{D} , presiunea $p(\xi, \eta)$, şi penetraţia δ .

a) Potenţialul discului eliptic

Să presupunem că \mathcal{D} este tot o *elipsă*, de axe Ox , Oy , şi avînd drept lungimi ale semiaxelor, valorile (necunoscute) a şi b . Aceasta revine la a admite că punctele frontieră, distribuite după o deformare destul de mică (şi neînsoţită de o rotaţie) pe o suprafaţă a cărei proiecţie plană e o elipsă, au fost situate înainte de deformare tot pe o elipsă. Mai departe, este firesc să presupunem că $b \leq a$: amprenta lăsată de ştanţă pe semi-spaţiu va avea dimensiuni liniare mai mari după acea direcţie, în lungul căreia raza de curbură este mai mare.

Presupunerile făcute vor fi desigur justificate numai dacă soluția, satisfăcând tuturor condițiilor problemei, va putea fi construită pe această cale.

Întrucît \mathcal{D} este eliptic, iar sarcina este centrală, vom admite că $p(\xi, \eta)$ este de forma (3.3). Membrul al doilea din (2) conține deci funcția $V(x, y, 0)$ din § 3, și ecuația (2) devine

$$V(x, y, 0) = (1/\theta) \left(\delta - \frac{1}{2} x^2/\rho' - \frac{1}{2} y^2/\rho'' \right). \quad (4)$$

Comparînd membrul al doilea al acestei expresii cu (3.35), constatăm mai întîi că trebuie să luăm $a_j = 0$ pentru $j \geq 2$. Mai departe, dacă $a_0 \neq 0$, în soluție ar apare termeni ce tind la infinit pe \mathcal{L} — ceea ce nu este cu putință, întrucît frontiera nu e o linie singulară (vezi și (2.9)). Prin urmare, avem $a_0 = 0$, și presiunea se caută sub forma

$$p(\xi, \eta) = a_1 \sqrt{1 - \xi^2/a^2 - \eta^2/b^2}. \quad (5)$$

Determinarea ei efectivă depinde, ca și în § 4, de găsirea constantei a_1 — dar și de cea a constantelor a, b . Aceasta face ca determinarea lui a_1 să nu mai fie independentă de cea a penetrației δ .

Formula (3.35) se reduce acum la

$$V(x, y, 0) = \frac{1}{2} \pi a b a_1 \int_0^\pi \left[1 - \frac{(x \sin \chi - y \cos \chi)^2}{a^2 \sin^2 \chi + b^2 \cos^2 \chi} \right] \frac{d\chi}{\sqrt{a^2 \sin^2 \chi + b^2 \cos^2 \chi}}, \quad (6)$$

de unde, efectuînd calculele :

$$V(x, y, 0) = \frac{1}{2} \pi a b a_1 (I - I_1 x^2 - I_2 y^2 + 2 I_{12} xy), \quad (7)$$

unde am notat

$$I = \int_0^\pi [1/(a^2 \sin^2 \chi + b^2 \cos^2 \chi)^{1/2}] d\chi, \quad (8)$$

$$I_1 = \int_0^\pi [\sin^2 \chi / (a^2 \sin^2 \chi + b^2 \cos^2 \chi)^{3/2}] d\chi, \quad (9)$$

$$I_2 = \int_0^\pi [\cos^2 \chi / (a^2 \sin^2 \chi + b^2 \cos^2 \chi)^{3/2}] d\chi, \quad (10)$$

$$I_{12} = \int_0^\pi [\sin \chi \cos \chi / (a^2 \sin^2 \chi + b^2 \cos^2 \chi)^{3/2}] d\chi. \quad (11)$$

Integrala (8) coincide evident cu cea din (4.8), astfel că avem

$$I = (2/a) K(k). \quad (12)$$

Mai departe, întrucît integrandul din (11) e antisimetric în $[0, \pi]$, deducem că

$$I_{12} = 0. \quad (13)$$

Rămîn de găsit integralele I_1 și I_2 , care se mai pot scrie (vezi (4.9)) sub forma

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} [\cos^2 \psi / (a^2 \cos^2 \psi + b^2 \sin^2 \psi)^{3/2}] d\psi, \\ I_2 &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} [\sin^2 \psi / (a^2 \cos^2 \psi + b^2 \sin^2 \psi)^{3/2}] d\psi. \end{aligned} \quad (14)$$

Să începem prin a calcula sumele

$$I_1 + I_2 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\psi / (a^2 \cos^2 \psi + b^2 \sin^2 \psi)^{3/2}, \quad (15)$$

$$a^2 I_1 + b^2 I_2 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\psi / (a^2 \cos^2 \psi + b^2 \sin^2 \psi)^{1/2}.$$

Raționînd ca în (4.8) — (4.11) și utilizînd (4.7), avem mai întîi

$$I_1 + I_2 = 2a^{-3} \int_0^{\pi/2} d\psi / (1 - k^2 \sin^2 \psi)^{3/2}, \quad I_1 + (1 - k^2) I_2 = 2a^{-3} K(k). \quad (16)$$

Pentru a calcula integrala ce apare în (16), se caută derivata

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\psi} \left[\frac{\sin \psi \cos \psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}} \right] &= \frac{1 - 2 \sin^2 \psi + k^2 \sin^4 \psi}{(1 - k^2 \sin^2 \psi)^{3/2}} = \frac{k^2 - 1 + (1 - k^2 \sin^2 \psi)^2}{k^2 (1 - k^2 \sin^2 \psi)^{3/2}} = \\ &= \frac{1}{k^2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi} - \frac{1 - k^2}{k^2} \frac{1}{(1 - k^2 \sin^2 \psi)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Integrînd termenii extremi între limitele 0 și $\pi/2$, căpătăm

$$\int_0^{\pi/2} d\psi / (1 - k^2 \sin^2 \psi)^{3/2} = E(k) / (1 - k^2), \quad (17)$$

unde $E(k)$ este *integrala eliptică completă de speța a doua* de modul k , deja întîlnită în (9.5.17):

$$E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi} d\psi. \quad (18)$$

Integrala $E(k)$ este de asemenea tabulată (vezi indicațiile din § 4, pag. 632). Reproducem aci o scurtă tabelă și un grafic :

k	$K(k)$	$E(k)$
0,0	1,571	1,571
0,1	1,574	1,567
0,2	1,587	1,555
0,3	1,608	1,535
0,4	1,640	1,506
0,5	1,686	1,467
0,6	1,751	1,418
0,7	1,846	1,355
0,8	1,996	1,270
0,9	2,281	1,171
0,95	2,590	1,102
0,98	3,020	1,050
1,00	∞	1,000

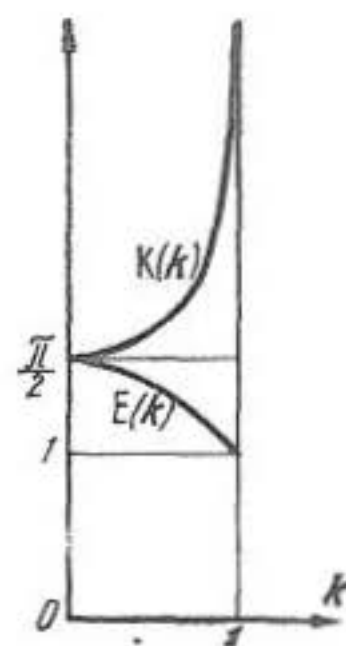


Fig. 10.5.1

Ținînd acum seama de (17), relațiile (16) iau forma

$$I_1 + I_2 = [2/a^3(1-k^2)] E(k), \quad (1-k^2)^{-1} I_1 + I_2 = [2/a^3(1-k^2)] K(k), \quad (19)$$

de unde rezultă imediat valorile căutate, ca expresii raționale de primele două integrale eliptice complete :

$$I_1 = \frac{2}{k^2 a^3} [K(k) - E(k)], \quad I_2 = \frac{2}{k^2 a^3} \left[\frac{E(k)}{1-k^2} - K(k) \right]. \quad (20)$$

Este însă de preferat să punem I_1, I_2 sub o altă formă, conținînd *derivatele* ⁴⁾ integralelor eliptice complete în raport cu modulul. Pentru aceasta, din (4.11) obținem mai întîi

$$\dot{K}(k) = dK/dk = k \int_0^{\pi/2} [\sin^2 \psi / (1 - k^2 \sin^2 \psi)^{3/2}] d\psi. \quad (21)$$

Or, această derivată poate fi scrisă ca funcție rațională de $K(k)$ și $E(k)$: ținînd seama de (4.11) și de relația (17), deducem

$$\dot{K}(k) = \frac{1}{k} \int_0^{\pi/2} \frac{k^2 \sin^2 \psi + 1 - 1}{(1 - k^2 \sin^2 \psi)^{3/2}} d\psi = \frac{1}{k} \left[\frac{E(k)}{1-k^2} - K(k) \right]. \quad (22)$$

Tot astfel, din (18) căpătăm mai întîi

$$\dot{E}(k) = dE/dk = -k \int_0^{\pi/2} [\sin^2 \psi / (1 - k^2 \sin^2 \psi)^{1/2}] d\psi, \quad (23)$$

⁴⁾ Le vom nota cu un punct, întrucît semnul „prim” este rezervat în teoria integralelor eliptice pentru alte scopuri, și nu există nici o primejdie de confuzie.

și mai departe, utilizând (4.11) și (18) :

$$\dot{E}(k) = \frac{1}{k} \int_0^{\pi/2} \frac{-k^2 \sin^2 \psi + 1 - 1}{(1 - k^2 \sin^2 \psi)^{1/2}} d\psi = \frac{1}{k} [E(k) - K(k)]. \quad (24)$$

Comparînd formulele (20) cu (22), (24), avem imediat

$$I_1 = -2k^{-1} a^{-3} \dot{E}(k), \quad I_2 = 2k^{-1} a^{-3} \dot{K}(k). \quad (25)$$

Introducînd acum valorile (12), (13) și (25) în (7), căpătăm

$$V(x, y, 0) = \pi b a_1 [K(k) + k^{-1} a^{-2} \dot{E}(k) x^2 - k^{-1} a^{-2} \dot{K}(k) y^2]. \quad (26)$$

b) Ecuațiile problemei

Să comparăm (26) cu expresia (4). Prin identificare, căpătăm un sistem de trei ecuații, la care adăugăm și ecuația de echilibru (3) :

$$\pi b a_1 K(k) = \delta/\theta, \quad (27)$$

$$-(\pi b a_1/k a^2) \dot{E}(k) = 1/2 \theta \rho', \quad (28)$$

$$(\pi b a_1/k a^2) \dot{K}(k) = 1/2 \theta \rho'', \quad (29)$$

$$a_1 \iint_D \sqrt{1 - \xi^2/a^2 - \eta^2/b^2} dD = P. \quad (30)$$

Acest sistem poate fi încă simplificat dacă calculăm integrala din (30), fie ea notată J'' . Raționînd ca în (4.15) — (4.18), avem pe rînd

$$J'' = - \int_0^{2\pi} [1/2 A(\chi)] d\chi \int_0^{1/\sqrt{A(\chi)}} \frac{2}{3} d[1 - A(\chi) R^2]^{3/2},$$

sau încă

$$\begin{aligned} J'' &= - \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} [1/A(\chi)] d\chi [1 - A(\chi) R^2]^{3/2} \Big|_0^{1/\sqrt{A(\chi)}} = \\ &= \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} [1/A(\chi)] d\chi, \end{aligned}$$

ceea ce, comparînd cu (4.16), (4.18), dă imediat

$$J'' = \frac{2}{3} \pi a b. \quad (31)$$

Cu aceasta, ecuația (30) conduce la valoarea

$$a_1 = \frac{3}{2} (P/D), \quad (32)$$

iar ecuațiile (29) — (31) iau forma mai compactă

$$\frac{3}{2} (P/a) K(k) = \delta/\theta, \quad (33)$$

$$-\frac{3}{2} (P/ka^3) \dot{E}(k) = 1/2\theta \rho', \quad (34)$$

$$\frac{3}{2} (P/ka^3) \dot{K}(k) = 1/2\theta \rho''. \quad (35)$$

Sistemul (33) — (35) (într-o formă mai complicată, și conținând înseși integralele eliptice) a fost stabilit de către H. Hertz [1], al cărui nume îl poartă.

Ținând seama de (32), expresia (5) a presiunii devine

$$p(\xi, \eta) = \frac{3}{2} (P/D) \sqrt{1 - \xi^2/a^2 - \eta^2/b^2}, \quad (36)$$

ceea ce nu determină încă funcția $p(\xi, \eta)$ (întrucât a, b nu sînt cunoscute), dar dă totuși unele informații asupra repartiției presiunilor sub ștanță. Astfel, se observă că presiunea își atinge *maximul* în centru, și anume

$$p_{\max} = p(0, 0) = a_1 = \frac{3}{2} p_m, \quad (37)$$

unde p_m este presiunea medie (4.22). După cum s-a prevăzut în § 2, presiunea $p(\xi, \eta)$ scade spre frontiera domeniului de contact, și este nulă pe \mathcal{L} .

Pentru a găsi semiaxa mare a elipsei de contact, să introducem mai întâi (24) și (22) în (34) și (35). Aceasta dă

$$1/2\theta \rho' = \frac{3}{2} (P/k^2 a^3) [K(k) - E(k)], \quad (38)$$

$$1/2\theta \rho'' = \frac{3}{2} (P/k^2 a^3) [E(k)/(1 - k^2) - K(k)]. \quad (39)$$

Adunînd membru cu membru aceste două egalități și notînd curbura medie a ștanței în origine cu

$$H = \frac{1}{2} (1/\rho' + 1/\rho''), \quad (40)$$

găsim cu ușurință

$$\frac{1}{2} H/\theta = \frac{3}{2} (P/k^2 a^3) [k^2 E(k)/(1 - k^2)], \quad (41)$$

ceea ce dă valoarea căutată a semiaxe mari sub forma

$$a = \sqrt[3]{\frac{2}{3} [E(k)/(1 - k^2)] [\theta P/H]}, \quad (42)$$

unde mărimile H , θ și P sînt cunoscute, iar k urmează a fi determinat. Lungimea semiaxe mici b rezultă evident din (4.7) :

$$b = a \sqrt{1 - k^2}. \quad (43)$$

Penetrația δ se calculează din (33) sub forma (similară cu (4.20))

$$\delta = \frac{3}{2} \theta P [K(k)/a]. \quad (44)$$

c) Comportarea mărimilor k , a , b , a_1

Rămîne de găsit excentricitatea k . Drumul de urmat rezultă din examinarea ecuațiilor (34), (35) : împărțindu-le termen cu termen, se obține o ecuație transcendentă care conține numai pe k și raportul razelor de curbură ρ''/ρ' . De studiul ei ne vom ocupa în §§ 6 și 7.

Pentru moment, reținem că k depinde exclusiv de forma ștanței, ceea ce sugerează să izolăm în (42) — (44) și (32) termenii care depind de k , de cei care depind de H , θ și P . În felul acesta, se constată că semi-axe elipsei \mathcal{D} sînt proporționale cu $H^{-1/3} \theta^{1/3} P^{1/3}$; aria ei este proporțională cu $H^{-2/3} \theta^{2/3} P^{2/3}$; presiunea maximă este proporțională cu $H^{2/3} \theta^{-2/3} P^{1/3}$, iar penetrația δ , cu $H^{1/3} \theta^{2/3} P^{2/3}$.

Presiunea maximă (și deci și tensiunile în punctele cele mai sollicitate) crește ca radicalul cubic al sarcinii : dacă de pildă sarcina se dublează, presiunea maximă crește numai cu 26%. Aceasta se explică intuitiv prin mărirea domeniului de contact, și sollicitarea mai intensă a unor porțiuni mai mari din semispațiu.

Mărimile de interes mecanic a_1 și δ cresc odată cu P (ceea ce era de așteptat) și cu H (așadar, cu cît razele de curbură sînt mai mici, deci cu cît ștanța e mai apropiată de aspectul unui „vîrf”). Penetrația δ crește odată cu θ , așadar este cu atît mai mare, cu cît rigiditatea μ e mai mică. Dimpotrivă, presiunea maximă a_1 scade cînd θ crește, așadar e cu atît mai mică cu cît rigiditatea μ e mai mică.

Pentru ca penetrația δ să fie mică, trebuie ca μ să fie mare, așadar ca materialul semispațiului să fie „cît mai rigid”. Dimpotrivă, pentru ca presiunea maximă a_1 să fie mică, trebuie ca μ să fie mic : aceasta este ușor de înțeles, deoarece pentru μ mic, θ este mare, și deci penetrația și aria de contact (pe care se repartizează presiunea totală) cresc.

Alegerea formei ștanței și a materialului semispațiului (în măsura în care ele sînt la dispoziția noastră) depinde desigur de condițiile de satisfăcut ; în particular, de faptul dacă este de dorit o penetrație mică, sau tensiuni mici.

§ 6. STUDIUL ECUAȚIEI TRANSCENDENTE A LUI HERTZ

Să ne fixăm atenția asupra determinării excentricității k (L. Solomon [5], [6]). Pentru aceasta, este comod să caracterizăm geometria ștanței prin intermediul *curburii medii*

$$H = \frac{1}{2} (1/\rho' + 1/\rho''), \quad (1)$$

și al cantității

$$h = \rho''/\rho'. \quad (2)$$

Întrucât aceasta din urmă este egală cu 1 pentru $\rho' = \rho''$ (paraboloid de revoluție), valoarea ei măsoară abaterea suprafeței ștanței de la forma unei suprafețe de revoluție. De aceea, constanta h se va numi *coeficient de rotunjire*. Cu cât h este mai mic, cu atât ștanța este mai turtită. Întrucât $\rho'' \leq \rho'$, avem evident $0 < h \leq 1$.

Cunoașterea lui H și h este echivalentă cu cea a lui ρ' și ρ'' , deoarece

$$\rho' = (1 + h)/2hH, \quad \rho'' = (1 + h)/2H. \quad (3)$$

Să împărțim acum membru cu membru ecuațiile (5.34) și (5.35). Aceasta dă:

$$-\dot{E}(k)/\dot{K}(k) = \rho''/\rho', \quad (4)$$

așadar o ecuație transcendentă pentru excentricitatea k , a cărei formă explică de altfel introducerea constantei h .

a) Monotonia funcției $f(k)$

Să considerăm deci funcția

$$f(k) = -\dot{E}(k)/\dot{K}(k), \quad (5)$$

unde $\dot{E}(k)$, $\dot{K}(k)$ au expresiile din (5.21), (5.23). Ținând seama de notația (2), obținem astfel *ecuația transcendentă a lui Hertz*

$$f(k) = h. \quad (6)$$

Pentru a o rezolva, — așadar pentru a găsi, grafic sau prin tabulare, valoarea k dacă raportul h este cunoscut — trebuie să demonstrăm în prealabil că funcția $f(k)$ este *monotonă*, așadar că derivata ei

$$\dot{f}(k) = (\dot{E}\ddot{K} - \dot{K}\ddot{E})/\dot{K}^2 \quad (7)$$

păstrează un semn constant în intervalul $k \in [0, 1]$. Pentru aceasta, vom observa mai întâi că $\dot{K}(k)$ și $\dot{E}(k)$ sînt continue în intervalul deschis $]0, 1[$ (vezi (5.22) și (5.24)). De asemenea, din (5.21) se vede că $\dot{K}(k) \neq 0$ în același interval. (Totuși, $\dot{K}(0) = 0$.) Mai departe, din (5.21) și (5.23) avem

$$\ddot{K}(k) = \int_0^{\pi/2} [\sin^2 \psi / (1 - k^2 \sin^2 \psi)^{3/2}] d\psi + 3k^2 \int_0^{\pi/2} [\sin^4 \psi / (1 - k^2 \sin^2 \psi)^{5/2}] d\psi, \quad (8)$$

$$\ddot{E}(k) = - \int_0^{\pi/2} [\sin^2 \psi / (1 - k^2 \sin^2 \psi)^{3/2}] d\psi. \quad (9)$$

În particular, e limpede că funcția $\dot{f}(k) \in C^0]0, 1[$. Dar încercarea de a demonstra direct că ea păstrează un semn constant nu duce la țintă. Vom raționa de aceea în modul următor.

Ecuatiile diferențiale verificate de funcțiile $K(k)$ și $E(k)$ se obțin ușor din (5.22) și (5.24). Anume, avem mai întâi

$$k\dot{K} = (1 - k^2)^{-1} E - K, \quad k\dot{E} = E - K, \quad (10)$$

și încă prin derivare în raport cu k :

$$k\ddot{K} + \dot{K} = 2k(1 - k^2)^{-2} E + (1 - k^2)^{-1} \dot{E} - \dot{K}, \quad k\ddot{E} = -\dot{K}. \quad (11)$$

Introducînd în prima relație (11) valoarea lui \dot{E} ca funcție de E și K din a doua relație (10), și apoi valoarea lui E ca funcție de K și \dot{K} din prima relație (10), obținem ecuația

$$(1 - k^2) \ddot{K} + (1 - 3k^2) k^{-1} \dot{K} - K = 0. \quad (12)$$

Introducînd în a doua relație (11) valoarea lui \dot{K} ca funcție de E și K din prima relație (10), și apoi înlocuind pe K prin intermediul lui E și \dot{E} din a doua relație (10), avem și

$$(1 - k^2) \ddot{E} + (1 - k^2) k^{-1} \dot{E} + E = 0. \quad (13)$$

Vom nota pe scurt

$$A = \dot{K}, \quad B = \dot{E}. \quad (14)$$

Derivînd ecuațiile (12) și (13), obținem ușor

$$\begin{aligned} \ddot{A} + \frac{1 - 5k^2}{k(1 - k^2)} \dot{A} - \frac{1 + 4k^2}{k^2(1 - k^2)} A &= 0, \\ \ddot{B} + \frac{1 - 3k^2}{k(1 - k^2)} \dot{B} - \frac{1}{k^2(1 - k^2)} B &= 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Înmulțind prima din aceste ecuații cu B , pe cea de a doua cu A și scăzându-le membru cu membru, căpătăm

$$(B \ddot{A} - A \ddot{B}) + \frac{1 - 5k^2}{k(1 - k^2)} (B \dot{A} - A \dot{B}) - 2 \frac{k}{1 - k^2} \dot{B} A - 4 \frac{1}{1 - k^2} A B = 0,$$

de unde, notînd încă

$$C = B \dot{A} - A \dot{B}, \quad (16)$$

căpătăm ecuația diferențială liniară neomogenă de primul ordin

$$\dot{C} + \frac{1 - 5k^2}{k(1 - k^2)} C - \frac{2}{1 - k^2} (2B + k \dot{B}) A = 0. \quad (17)$$

Soluția acestei ecuații este (vezi V. Smirnov [2], vol. 2, pct. 4):

$$C(k) = \exp \left[- \int_0^k \frac{1 - 5k^2}{k(1 - k^2)} dk \right] \times \\ \times \left\{ C_0 + \int_0^k \frac{2}{1 - k^2} (2B + k \dot{B}) A \exp \left[\int_0^k \frac{1 - 5k^2}{k(1 - k^2)} dk \right] dk \right\}, \quad (18)$$

unde $C_0 = C(0)$. Ținînd seama de (16), (14), (5.21) și (5.23), găsim

$$C_0 = C(0) = \dot{E}(0) \ddot{K}(0) - \ddot{E}(0) \dot{K}(0) = 0. \quad (19)$$

Termenii exponențiali din (18) sînt evident pozitivi. Funcția $A = \dot{K}$ este, în virtutea relației (5.21), pozitivă. În fine, expresia $2B + k \dot{B} = 2\dot{E} + k \ddot{E}$ este negativă, după cum rezultă din (5.23) și (9). Prin urmare, funcția $C(k)$ definită de (18), (19) este *negativă* în intervalul $]0, 1[$. Intrucît $C(k)$ este numărătorul expresiei $\dot{f}(k)$ din (7), urmează că funcția $f(k)$ din (5) este *descrescătoare* pentru $k \in]0, 1[$. Așadar, rezolvarea ecuației transcendente (6) prin tabularea primului ei membru este permisă.

b) Rezolvarea ecuației lui Hertz prin tabulare

Introducînd expresiile (5.21) și (5.23) în (5), obținem

$$f(k) = \left[\int_0^{\pi/2} [\sin^2 \psi / (1 - k^2 \sin^2 \psi)^{1/2}] d\psi \right] : \\ : \left[\int_0^{\pi/2} [\sin^2 \psi / (1 - k^2 \sin^2 \psi)^{3/2}] d\psi \right]. \quad (20)$$

Această formă s-a dovedit a fi cea mai convenabilă pentru tabularea funcției $f(k)$ cu ajutorul unei mașini electronice de calcul.

Valoarea $f(0)$ corespunde domeniului de contact circular. Valoarea $f(1)$ ar corespunde cazului $b/a = 0$, lipsit de sens mecanic. Integralele din (20) permit să obținem imediat

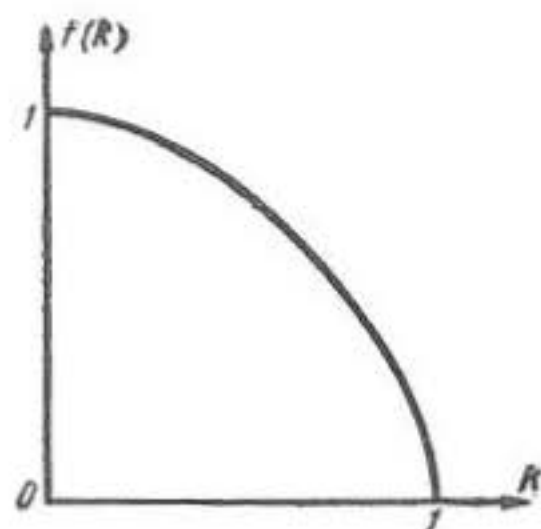


Fig. 10.6.1.

$$f(0) = 1, \quad f(1) = 0. \quad (21)$$

Tabloul de variație a funcției $f(k)$ dă ne-mijlocit, pentru orice valoare $h = \rho''/\rho'$, valoarea corespunzătoare a excentricității k , și aceasta permite să se determine din (5.42)–(5.44) și (5.32), cantitățile căutate a , b , δ , a_1 .

Reproducem aci graficul și un tablou (cu dublă intrare, pasul fiind 0,01) pentru funcția $f(k)$.

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	1,000	1,000	0,999	0,999	0,999	0,998	0,997	0,996	0,995	0,994
0,1	0,992	0,991	0,989	0,987	0,985	0,983	0,981	0,978	0,976	0,973
0,2	0,970	0,967	0,963	0,960	0,956	0,953	0,949	0,945	0,941	0,936
0,3	0,932	0,927	0,922	0,917	0,912	0,907	0,901	0,895	0,890	0,884
0,4	0,877	0,871	0,865	0,858	0,851	0,844	0,837	0,829	0,822	0,814
0,5	0,806	0,798	0,789	0,781	0,772	0,763	0,754	0,745	0,735	0,725
0,6	0,715	0,705	0,695	0,684	0,673	0,662	0,651	0,639	0,628	0,615
0,7	0,603	0,591	0,578	0,565	0,551	0,537	0,523	0,509	0,494	0,479
0,8	0,464	0,448	0,432	0,415	0,398	0,381	0,363	0,344	0,325	0,306
0,9	0,285	0,264	0,242	0,220	0,196	0,171	0,144	0,115	0,084	0,048

§ 7. STUDIUL APROXIMATIV AL ECUAȚIEI LUI HERTZ. CONSECINȚE

a) Soluția aproximativă algebrică a ecuației lui Hertz

Graficul din figura 10.6.1 prezintă un aspect destul de regulat, apropiat de un arc de cerc. Aceasta sugerează să căutăm pentru $f(k)$ o expresie aproximativă de forma

$$f_0(k) = (1 - k^2)^m, \quad (1)$$

unde exponentul m urmează a fi determinat.

În acest scop, să considerăm dezvoltările în serie cunoscute (vezi I. Rîjik și I. Gradstein [1], §§ 6.113 și 6.114) :

$$K(k) = \frac{1}{2} \pi \left\{ 1 + \frac{1}{4} k^2 + \frac{9}{64} k^4 + \dots + \left[\frac{(2n-1)!!}{2^n n!} \right]^2 k^{2n} + \dots \right\}, \quad (2)$$

$$E(k) = \frac{1}{2} \pi \left\{ 1 - \frac{1}{4} k^2 - \frac{3}{64} k^4 - \dots - \left[\frac{(2n-1)!!}{2^n n!} \right]^2 \frac{k^{2n}}{2n-1} - \dots \right\}. \quad (3)$$

De aci se deduce ușor

$$f(k) = -\dot{E}(k)/\dot{K}(k) = 1 - \frac{3}{2^2}k^2 - \frac{3}{2^5}k^4 - \frac{21}{2^9}k^6 - \frac{48}{2^{11}}k^8 - \dots \quad (4)$$

Primii doi termeni ai dezvoltării în serie a lui $f_0(k)$ vor coincide cu primii doi termeni din (4), dacă luăm $m = 3/4$. Atunci din (1) urmează

$$f_0(k) = (1 - k^2)^{3/4} = 1 - \frac{3}{2^2}k^2 - \frac{3}{2^5}k^4 - \frac{20}{2^9}k^6 - \frac{45}{2^{11}}k^8 - \dots, \quad (5)$$

astfel că în fapt termenii celor două serii coincid pînă la cei de gradul 5 inclusiv, iar deosebirea dintre coeficienții termenilor următori este foarte mică. Comparînd valorile calculate pentru $f(k)$ și $f_0(k)$, se observă că relația

$$f(k) \cong f_0(k) \quad (6)$$

e respectată pînă la a treia cifră semnificativă. (Deosebirile pentru $k = 0,6$ și $k = 0,7$ provin din rotunjirea celei de a patra cifre.)

k	$f(k)$	$f_0(k)$
0,0	1,000	1,000
0,1	0,992	0,992
0,2	0,970	0,970
0,3	0,932	0,932
0,4	0,877	0,877
0,5	0,806	0,806
0,6	0,715	0,716
0,7	0,603	0,604
0,8	0,464	0,464
0,9	0,285	0,288
0,95	0,171	1,175
0,98	0,084	0,089
0,99	0,048	0,053
1,00	0,000	0,000

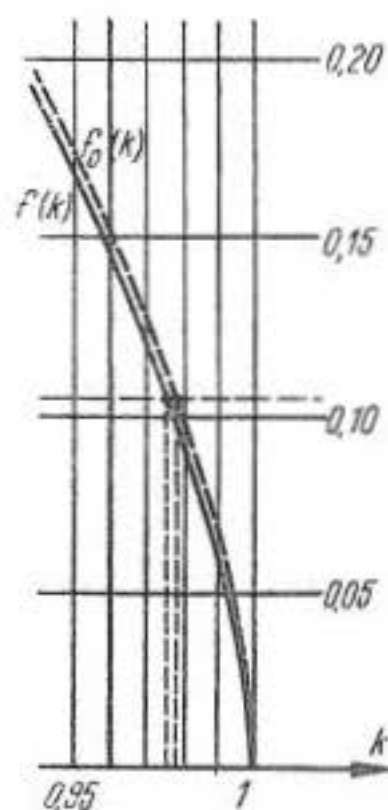


Fig. 10.7.1.

La scara figurii 10.6.1, cele două curbe nici nu pot fi trasate separat. Abateri vizibile se constată numai pentru $k \geq 0,95$. Însă nu funcțiile $f(k)$ și $f_0(k)$ ne interesează, ci valorile lui k , respectiv valorile sale aproximative (pe care le vom nota k_0) corespunzătoare *aceluiași* $h = f(k)$. Întrucît panta ambelor curbe este foarte mare pentru $k \geq 0,95$, rezultă (vezi fig. 10.7.1) că pentru aceeași valoare h , se obțin abscise k și k_0 ce diferă numai cu foarte puțin.

Trebuie amintit și că, pentru valori mari ale lui k (așadar pentru o elipsă \mathcal{E} foarte alungită), însăși formularea problemei se schimbă, deoarece contactul inițial într-un punct se înlocuiește practic vorbind cu contactul în lungul unei linii.

În definitiv, cele de mai sus permit să înlocuim ecuația *transcendentă* (6.6), prin ecuația *algebrică*

$$(1 - k_0^2)^{3/4} = h, \quad (7)$$

a cărei soluție evidentă este

$$k_0 = \sqrt[4]{1 - h^{4/3}}. \quad (8)$$

Tabulînd funcția (8) și comparînd cu valorile ce rezultă din tabloul de la pag. 644 pentru k , constatăm că eroarea relativă *nu atinge* 0,2%, rezultat deplin satisfăcător. Introducînd (8) în (4.7), obținem și

$$b/a = h^{2/3}. \quad (9)$$

Or, cunoașterea raportului b/a echivalează cu cunoașterea lui k — și deci *relația elementară* (9) *înlocuiește cu totul ecuația* (6.6) în studiul problemei.

b) Rolul excentricității

Să amintim acum (vezi finele § 5, pag. 640) posibilitatea de a izola în expresiile pentru a , b , δ , a_1 factorii ce depind numai de k . Vom norma acești factori în așa fel încît pentru $k = 0$ (domeniu de contact circular) ei să ia valoarea 1. Ținînd seama și de valorile

$$E(0) = K(0) = \frac{1}{2} \pi, \quad (10)$$

(ce rezultă din (2) și (3)), obținem mai întîi din (5.42)

$$a(\rho', \rho'', \theta, P) = m(k) M(H, \theta, P), \quad (11)$$

unde am notat

$$m(k) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{-1/3} (1 - k^2)^{-1/3} [E(k)]^{1/3}, \quad (12)$$

$$M(H, \theta, P) = \left[\frac{3}{4} \pi H^{-1} \theta P\right]^{1/3}. \quad (13)$$

Mai departe, din relația (5.43) urmează

$$b(\rho', \rho'', \theta, P) = n(k) M(H, \theta, P), \quad (14)$$

unde $M(H, \theta, P)$ are valoarea din (13), iar

$$n(k) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{-1/3} (1 - k^2)^{1/6} [E(k)]^{1/3}. \quad (15)$$

Introducînd acum (11)–(13) în (5.44), căpătăm

$$\delta(\rho', \rho'', \theta, P) = r(k) R(H, \theta, P), \quad (16)$$

unde

$$r(k) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{-2/3} (1 - k^2)^{1/3} K(k) [E(k)]^{-1/3}, \quad (17)$$

$$R(H, \theta, P) = \left[\left(\frac{3}{4}\pi\right)^2 H \theta^2 P^2\right]^{1/3}. \quad (18)$$

În fine, introducînd (11)–(15) în (5.32), obținem și

$$a_1(\rho', \rho'', \theta, P) = s(k) S(H, \theta, P), \quad (19)$$

unde am notat

$$s(k) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2/3} (1 - k^2)^{1/6} [E(k)]^{-2/3}, \quad (20)$$

$$S(H, \theta, P) = [6\pi^{-5} H^2 \theta^{-2} P]^{1/3}. \quad (21)$$

În felul acesta, am izolat deci factorii ce depind de *natura mecanică a problemei* (așadar de H, θ , și P), de cei care nu depind decît de k (așadar de o anumită ipoteză matematică asupra formei lui \mathcal{D}).

Funcțiile $m(k)$ și $n(k)$ au fost considerate și tabulate de către H. Whitemore și S. Petrenko, și de atunci de repetate ori utilizate (vezi de ex. L. Leibenzon [1], §73; S. Timoshenko și J. Goodier [1], §126). Dar numai funcțiile $r(k)$ și $s(k)$ prezintă interes principal. Pentru a le cerceta, să ținem seama de dezvoltările (2), (3), precum și de seriile :

$$[E(k)]^{1/3} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/3} \left[1 - \frac{1}{3 \cdot 4} k^2 - \frac{13}{3^2 \cdot 4^3} k^4 - \frac{209}{3^4 \cdot 4^4} k^6 - \frac{22267}{3^5 \cdot 2^{14}} k^8 - \dots\right], \quad (22)$$

$$[E(k)]^{2/3} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2/3} \left[1 - \frac{1}{2 \cdot 3} k^2 - \frac{11}{2^5 \cdot 3^2} k^4 - \frac{85}{2^6 \cdot 3^4} k^6 - \frac{17909}{2^{13} \cdot 3^5} k^8 - \dots\right];$$

$$(1 - k^2)^{1/3} = \left[1 - \frac{1}{3} k^2 - \frac{1}{3^2} k^4 - \frac{5}{3^4} k^6 - \frac{10}{3^5} k^8 - \dots\right], \quad (23)$$

$$(1 - k^2)^{1/6} = \left[1 - \frac{1}{6} k^2 - \frac{5}{2 \cdot 6^2} k^4 - \frac{5 \cdot 11}{6^4} k^6 - \frac{5 \cdot 11 \cdot 17}{4 \cdot 6^5} k^8 - \dots\right].$$

Introducînd acum (2), (22) și (23) în (17) și (20), obținem

$$r(k) = 1 - 2^{-5} k^4 [1 + k^2 + (1 - 29 \cdot 2^{-8}) k^4 + \dots], \quad (24)$$

$$s(k) = 1 - 2^{-5} k^4 [1 + k^2 + (1 - 31 \cdot 2^{-8}) k^4 + \dots], \quad (25)$$

așadar două serii evident convergente, cu primii termeni aproape identici, și care depind numai în foarte mică măsură de valoarea excentricității k .

Vom lua în general

$$r(k) = s(k) = 1 - (1/32) k^4 l(k), \quad (26)$$

unde

$$l(k) = 1 + k^2 + 0,88 k^4 + \dots \quad (27)$$

Aceste formule sînt de același tip cu formulele (5.15.26), (5.15.27), care pun în evidență redusă măsură în care rigiditatea geometrică la torsiune a barei de secțiune eliptică depinde de excentricitatea elipsei de secțiune. Remarcăm că funcțiile $l_1(k)$ și $l(k)$ sînt aproape identice, dar coeficientul $1/8$ din cazul torsiunii este înlocuit aci cu $1/32$, marcînd așadar o și mai mică importanță a excentricității (deci a *forme*i) elipsei.

Aproximînd funcția $l(k)$ din (27) cu primii termeni ai unei progresii geometrice de rație k^2 , vom putea înlocui funcțiile din (26) prin

$$t(k) = 1 - (1/32) k^4 (1 - k^{16}) / (1 - k^2). \quad (28)$$

Dăm aci tabloul funcțiilor $r(k)$, $s(k)$ și $t(k)$, pentru un pas egal cu $0,1$, și cu unele valori intermediare pentru $k \geq 0,95$. În același tablou apar (folosind valorile de la pag. 644) valorile $h^{-1} = \rho' / \rho''$ — care poate fi numit *coeficient de turtire* al ștanței.

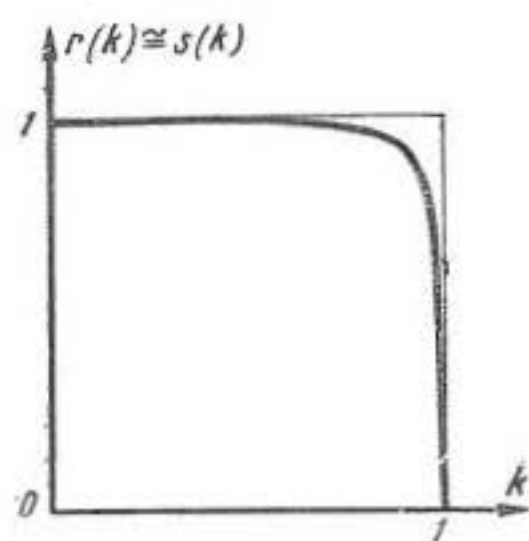


Fig. 10.7.2

k	$r(k)$	$s(k)$	$t(k)$	ρ' / ρ''
0,0	1,000	1,000	1,000	1,00
0,1	1,000	1,000	1,000	1,01
0,2	1,000	1,000	1,000	1,03
0,3	1,000	1,000	1,000	1,07
0,4	0,999	0,999	0,999	1,14
0,5	0,997	0,997	0,997	1,24
0,6	0,994	0,994	0,994	1,40
0,7	0,986	0,986	0,985	1,66
0,8	0,968	0,969	0,965	2,15
0,9	0,920	0,922	0,912	3,50
0,95	0,854	0,859	0,854	5,85
0,96	0,830	0,836	0,840	7,00
0,97	0,797	0,807	0,820	8,70
0,98	0,750	0,764	—	11,9
0,99	0,667	0,690	—	20,7
0,999	0,419	0,478	—	200
0,9999	0,243	0,327	—	2000
1,0000	0,000	0,000	—	∞

Tabelul și graficul alăturat arată deci că, în cazul unui *punct* inițial de contact, coeficientul de rotunjire nu influențează sensibil elementele mecanice esențiale δ și a_1 . Brusca modificare a aspectului curbelor $r(k)$

și $s(k)$ pentru $k \rightarrow 1$ (așadar $h \rightarrow 0$) arată tocmai că pentru astfel de valori are loc o schimbare a caracterului problemei, care trebuie formulată ca problemă de *contact în lungul unei linii*.

c) Formule aproximative

Cele de mai sus arată că, între limite destul de largi, putem evalua mărimile δ și a_1 sub forma aproximativă $R(H, \theta, P)$ și $S(H, \theta, P)$ din (18) și (21), depinzând așadar nu de *forma* ștanței, ci numai de *curbura ei medie*.

Să comparăm acum aria D a elipsei \mathcal{D} , cu aria elipsei de nivel ce se obține secționând ștanța cu planul $Z = \delta$. Notînd cu α, β semi-axele acestei elipse, corespunzătoare penetrației δ (pentru *alte* valori $Z = \text{const.}$, vom folosi indici), va fi suficient să comparăm ab cu $\alpha\beta$.

Din (11)–(15) obținem mai întîi

$$ab = (1 - k^2)^{-1/6} [E(k)]^{2/3} \left[\frac{3}{2} H^{-1} \theta P \right]^{2/3}. \quad (29)$$

Pe de altă parte, din (5.1) deducem ecuația elipsei de nivel $Z = z_0$:

$$\frac{1}{2} (x^2 / \rho' z_0) + \frac{1}{2} (y^2 / \rho'' z_0) = 1, \quad (30)$$

de unde pentru semiaxele ei urmează

$$\alpha_0 = \sqrt{2z_0 \rho'}, \quad \beta_0 = \sqrt{2z_0 \rho''}. \quad (31)$$

Remarcăm în treacăt că de aci avem și

$$\beta_0 / \alpha_0 = h^{1/2}. \quad (32)$$

Comparînd (32) cu (9) deducem, întrucît $h \leq 1$, că avem

$$\rho'' / \rho' \leq b/a \leq \beta_0 / \alpha_0, \quad (33)$$

astfel că elipsa de contact e *mai alungită* decît orice elipsă de nivel.

Înmulțind valorile (31) pentru $z_0 = \delta$ și ținînd seama de (6.3), obținem

$$\alpha\beta = 2\delta \sqrt{\rho' \rho''} = (1 + h) h^{-1/2} H^{-1} \delta, \quad (34)$$

sau încă, introducînd aci valoarea lui δ din (16)–(18):

$$\alpha\beta = (1 - k^2)^{1/3} K(k) [E(k)]^{-1/3} (1 + h) h^{-1/2} \left[\frac{3}{2} H^{-1} \theta P \right]^{2/3}. \quad (35)$$

Comparînd acum expresiile (29) și (35), constatăm că putem scrie

$$\alpha\beta = 2 ab u(k), \quad (36)$$

unde am notat

$$2u(k) = [K(k)/E(k)] (1 - k^2)^{1/2} (1 + h) h^{-1/2}. \quad (37)$$

(Într-adevăr, dat fiind că $h = f(k)$, raportul celor două arii depinde numai de k .)

Introducând aci expresiile (2), (3), obținem mai întâi

$$K(k)/E(k) = 1 + \frac{1}{2} k^2 + \frac{5}{2^4} k^4 + \frac{7}{2^5} k^6 + \frac{337}{2^{11}} k^8 + \frac{533}{2^{12}} k^{10} + \dots \quad (38)$$

Ținând seama de (7) și de (5), deducem, după calcule elementare

$$u(k) = 1 + 2^{-7} k^4 [1 + k^2 + \dots], \quad (39)$$

sau încă, utilizând (27) :

$$u(k) = 1 + (1/128) k^4 l(k). \quad (40)$$

Prin urmare, cu o eroare ce nu depășește 4,5% pentru o ștanță pentru care $\rho' = 7 \rho''$ (așadar $k = 0,96$), putem lua

$$\alpha\beta \cong 2 ab, \quad (41)$$

astfel că aria elipsei de contact este egală cu jumătate din aria elipsei de nivel $Z = \delta$. Comparând (41) cu (34), conchidem că aria elipsei de contact este practic proporțională cu penetrația δ — ceea ce amintește oarecum de ipoteza lui Winkler și Zimmermann.

Mai departe, de aci rezultă că aria elipsei de contact este aproximativ egală cu aria elipsei de nivel $z_0 = \delta/2$. (Vezi și (33).)

Dacă pentru o ștanță dată putem evalua sau măsura direct penetrația δ , cunoaștem deci și aria elipsei de contact. Presiunea maximă va fi și ea direct calculată, sub forma ce decurge din (5.32) și (41) :

$$a_1 = 3P/\pi\alpha\beta, \quad (42)$$

sau încă, introducând aci expresia (34) :

$$a_1 = 3Ph^{1/2}H/\pi(1+h)\delta. \quad (43)$$

§ 8. RIGIDITĂȚI GEOMETRICE LA PENETRAȚIE

a) Cazul domeniului de contact eliptic

Expresiile obținute pentru δ atât în cazul ștanței cu bază plană eliptică, cât și în cel al ștanței paraboloidale, sugerează introducerea unui parametru geometric global, analog rigidității geometrice la torsiune (L. Solomon [12]). Vom folosi (acolo unde există risc de confuzie), indicele „prim” pentru primul caz, și indicele „secund” pentru cel de-al doilea.

Amintim aci formula (5.13.15)

$$\mathcal{M}_3 = \mu \tau C, \quad (1)$$

și cele spuse în § 5.6, pag. 189, despre relațiile de acest tip.

Amintim de asemenea expresia (4.20) a penetrației

$$\delta' = \theta P [K(k)/a], \quad (2)$$

precum și pe cea care decurge din (7.16)–(7.18):

$$\delta'' = (3/2)^{2/3} (1 - k^2)^{1/3} K(k) [E(k)]^{-1/3} H^{1/3} \theta^{2/3} P^{2/3}. \quad (3)$$

Pentru semiaxele elipsei \mathcal{D} avem desigur, ca și în (5.15.24):

$$a = \sqrt{D/\pi} (1 - k^2)^{-1/4}, \quad b = \sqrt{D/\pi} (1 - k^2)^{1/4}. \quad (4)$$

Ținând seama de (4) și de valoarea θ din (2.14), vom transcrie relația (2) sub o formă analogă cu (1):

$$P = [\mu/(1 - \nu)] \delta' C'_c, \quad (5)$$

unde am notat

$$C'_c = 4 \sqrt{D/\pi} [(2/\pi) K(k) (1 - k^2)^{1/4}]^{-1}. \quad (6)$$

Este firesc ca această cantitate, funcție numai de configurația lui \mathcal{D} , să fie numită *rigiditate geometrică la penetrație* (pentru ștanța cu bază plană eliptică).

În cazul ($''$), vom căuta o relație de forma

$$P = P(\mu, \nu, \delta, D, k) = \mu^m \nu^n D^p f(\nu, k). \quad (7)$$

Întrucât dimensiunile cantităților din (7) sînt

$$[P] = F, [\mu] = FL^{-2}, [\delta] = L, [D] = L^2,$$

rezultă că trebuie să luăm $m = 1$ și $n + 2p = 2$, ceea ce — ținînd seama de aspectul lui (5) — ar conduce la o formulă

$$P = [\mu/(1 - \nu)] \delta'' C''_c. \quad (8)$$

În aparență, o astfel de formulă nu poate decurge din (3), dat fiind că dependența dintre δ și P nu este liniară. Să remarcăm însă că din (7.11) — (7.15), sau direct din (7.29), urmează

$$D = \pi ab = (3/2)^{2/3} \pi [E(k)]^{2/3} (1 - k^2)^{-1/6} H^{-2/3} \theta^{2/3} P^{2/3},$$

de unde

$$H^{1/3} = (3/2)^{1/3} (\pi/D)^{1/2} [E(k)]^{1/3} (1 - k^2)^{-1/12} \theta^{1/3} P^{1/3},$$

astfel că acum (3) devine

$$\delta'' = \frac{3}{2} (\pi/D)^{1/2} K(k) (1 - k^2)^{1/4} \theta P. \quad (9)$$

Introducând aci θ din (2.14), obținem tocmai formula (8), unde

$$C_c'' = \frac{8}{3} \sqrt{D/\pi} [(2/\pi) K(k) (1 - k^2)^{1/4}]^{-1}. \quad (10)$$

Comparînd (10) cu (6), observăm relația simplă

$$C_c'' = \frac{2}{3} C_c'. \quad (11)$$

Cantitatea C_c'' se va numi desigur *rigiditate geometrică la penetrație* a ștanței paraboloidale.

Cu cît cantitățile C_c' și C_c'' sînt mai mari, cu atît (pentru θ și P dați) penetrația este mai mică. Relația (11) arată că rigiditatea geometrică la penetrație e *mai mică* pentru ștanța paraboloidală — ceea ce e de înțeles, întrucît în cazul ștanței cu bază plană o parte importantă a sarcinii P trebuie cheltuită pentru a învinge rezistența mediului elastic în vecinătatea liniei singulare \mathcal{L} .

Să atribuim indicele „zero” mărimilor relative la cazul domeniului de contact circular ($k = 0$). Transcriind (7.29) pentru acest caz, obținem

$$D_0/\pi = \left(\frac{1}{2} \pi\right)^{2/3} \left[\frac{3}{2} H_0^{-1} \theta_0 P_0\right]^{2/3}. \quad (12)$$

Punînd condițiile $D = D_0$, $\theta = \theta_0$, $P = P_0$, și comparînd (12) cu (7.29), deducem

$$H = (2/\pi) E(k) (1 - k^2)^{-1/4} H_0, \quad (13)$$

ceea ce *definește* acea ștanță paraboloidală (de curbura medie H și coeficient de rotunjire $h = f(k)$) care realizează — pentru același material și aceeași sarcină — aceeași arie de contact ca și ștanța în formă de paraboloid de revoluție (de curbura medie H_0 , și avînd $h = 1$). Desigur, aria D_0 — și deci și H — depinde de θ și P .

Comparînd penetrațiile corespunzătoare valorilor $k = 0$ și $k \neq 0$ (pentru același material, aceeași sarcină, și *aceeași arie a domeniului de contact*) obținem din (6) și (10) una și aceeași formulă, valabilă în ambele cazuri (') și ('') :

$$\delta/\delta_0 = C_c(0)/C_c(k) = (2/\pi) K(k) (1 - k^2)^{1/4}. \quad (14)$$

Este interesant de remarcat că funcția de mai sus apare la Lord Rayleigh [1], volumul 2, § 306, în studiul conductibilității sunetului printr-un orificiu eliptic (în particular, circular).

După calcule similare celor din § 7, obținem

$$\begin{aligned} (2/\pi) E(k) (1 - k^2)^{-1/4} &= 1 + (3/64) k^4 [1 + k^2 + (1 - 21 \cdot 2^{-8}) k^4 + \dots], \\ (2/\pi) K(k) (1 - k^2)^{1/4} &= 1 - (1/64) k^4 [1 + k^2 + (1 - 25 \cdot 2^{-8}) k^4 + \dots], \end{aligned} \quad (15)$$

sau încă (vezi (7.24)–(7.27)) :

$$(2/\pi) E(k) (1 - k^2)^{-1/4} = 1 + (3/64) k^4 l(k), \quad (16)$$

$$(2/\pi) K(k) (1 - k^2)^{1/4} = 1 - (1/64) k^4 l(k), \quad (17)$$

unde funcția $l(k)$ din (7.27) ar trebui modificată numai cu termeni de fapt neglijabili.

Relația (17) prezintă deosebit interes. Ținând seama de (6) și (10), conchidem că în ambele cazuri considerate, rigiditatea geometrică la penetrație depinde de *aria* domeniului de contact, și numai în măsură neglijabilă de excentricitatea, așadar de *forma* acestui domeniu.

Această rigiditate este *minimă* pentru $k = 0$, astfel că penetrația maximă se realizează în cazul domeniului circular. (Compară cu § 5.15, pag. 243, relativ la caracterul *maximal* al rigidității geometrice la torziune pentru $k = 0$.)

Relațiile (6), (11), (14) și (17) explică coincidența între concluziile lui L. Galin [3] (vezi și [4], § 2.10) pentru ștanța cu bază plană eliptică, și L. Solomon [6] pentru ștanța paraboloidală, cu privire la rolul redus al excentricității în calculul penetrației.

b) Formule aproximative

Comparând aceste considerații cu cele din § 5.15, exemplul *b*, sîntem conduși la a construi un analog al formulei lui Saint-Venant (5.15.23). Anume, înlocuind $l_1(k)$ prin $l(k)$ în (5.15.26), astfel încît să avem

$$C = (D^2/2\pi) \left[1 - \frac{1}{8} k^4 l(k) \right], \quad (18)$$

și comparînd această expresie pentru C cu cea din (5.15.23) :

$$C = D^4/4 \pi^2 l_0, \quad (19)$$

obținem ușor

$$1 - \frac{1}{8} k^4 l(k) \cong 2\pi C/D^2 = D^2/2\pi l_0. \quad (20)$$

Pe de altă parte, rigiditatea geometrică la penetrație pentru ștanța eliptică cu bază plană este (vezi (6) și (17)) :

$$C'_e \cong 4\sqrt{D/\pi} \left[1 + \frac{1}{64} k^4 l(k) \right]. \quad (21)$$

Ținând seama de (18) și (19), putem scrie acum

$$1 + \frac{1}{64} k^4 l(k) \cong \left[1 - \frac{1}{8} k^4 l(k) \right]^{-1/8} \cong (2\pi l_0)^{1/8} D^{-1/4},$$

astfel că (21) devine

$$C'_e = 4\pi^{-1/2} (2\pi)^{1/8} D^{1/4} l_0^{1/8}, \quad (22)$$

sau, calculînd coeficientul :

$$C'_e = 2,84 D^{1/4} l_0^{1/8}, \quad (23)$$

și încă, ținînd seama de (11) :

$$C''_e = 1,89 D^{1/4} l_0^{1/8}. \quad (24)$$

Acestea sînt formule *exacte* pentru \mathcal{D} eliptic, abstracție făcînd de erori neglijabile datorate operațiilor aproximative efectuate cu $l_1(k)$ și $l(k)$.

Asupra formulei (23) vom reveni în § 10. Formula (24) nu conduce la fapte noi în comparație cu (10).

§ 9. ȘTANȚE CU BAZĂ PLANĂ NEELIPTICĂ

În §§ 13 și 14 vom vedea că soluția problemei ștanței paraboloidale conduce la rezolvarea și a altor chestiuni de mare importanță practică. Dimpotrivă, soluția problemei ștanței cu bază plană eliptică își pierde toată însemnătatea de îndată ce trecem la cazul unor ștanțe cu bază plană neeliptică.

Se cunosc soluții exacte pentru ștanțe cu bază plană *infinită* : pana (domeniu infinit angulos) (L. Galin [4], § 2.11 ; V. Rvacev [4]), banda rectangulară (L. Galin [1], [4], § 2.12 ; V. Rvacev [1], [2], [5]). Dar cazul cel mai important pentru practică este desigur cel al ștanțelor cu bază *mărginită* : de exemplu, dreptunghiulară, poligonală etc.

Nu cunoaștem soluții exacte ușor maniabile pentru astfel de probleme. Menționăm aci rezultatele lui V. Korotkin [1], A. Love [2], B. Tanimoto [1] pentru ștanța cu bază plană dreptunghiulară, și cele ale lui K. Egorov [1] pentru baza în formă de coroană circulară. Semnalăm încă metodele aproximative ale lui A. Dyson [1], M. Leonov et al. [1], M. Leonov și K. Ciumak [1], și V. Mosakovskii [4], cu studiul exact al problemei ștanței cu bază plană de formă apropiată de cea circulară, mergînd pînă la aplicații la cazul bazei patrute. Vezi încă și V. Rvacev [3].

O soluție aproximativă pentru ștanța cu bază dreptunghiulară a fost propusă de I. Gorbunov-Posadov [1], [2]. Anume, soluția $p(x, y)$ a ecuației integrale (2.17) se caută sub formă polinomială; toate mărimile ce intervin în ecuație sînt dezvoltate în serii de puteri, și coeficienții necunoscuți ai polinomului $p(x, y)$ se determină atunci prin intermediul unui sistem de ecuații algebrice liniare. Dar calculele sînt extrem de laborioase, proprietățile acestui sistem (care e în general un sistem infinit) rămîn necercetate, și însuși faptul de a alege pentru $p(x, y)$ un polinom (așadar o funcție mărginită și continuă în $\mathcal{D} + \mathcal{L}$) contrazice cele arătate în § 2, pag. 622: într-adevăr, frontiera domeniului de contact este o linie singulară pe suprafața ștanței și presiunea trebuie să tindă aci la infinit. Lipsa de rigurozitate a metodei este deci însoțită și de o incompatibilitate cu natura mecanică a soluției prezumate.

a) Singularitățile presiunii sub ștanța cu bază plană mărginită convexă neeliptică (teorema lui I. Zamfirescu)

Vom expune aci unele rezultate privitoare la proprietățile soluției ecuației (2.17).

Vom demonstra mai întîi că, dacă domeniul de contact \mathcal{D} , de frontieră \mathcal{L} , este mărginit și convex, atunci ecuația integrală (2.17) nu poate avea soluție ne-negativă și continuă — așadar mărginită — în $\mathcal{D} + \mathcal{L}$.

Să începem prin a admite că există o soluție nenegativă și continuă a problemei. Întrucît $\mathcal{D} + \mathcal{L}$ este mărginită și închisă, deci compactă, rezultă că soluția prezumată $p(x)$ a ecuației (2.17) este uniform continuă (vezi § A.1, pag. 685): pentru orice pereche de puncte $x', x'' \in \mathcal{D} + \mathcal{L}$, și $\varepsilon > 0$ arbitrar, avem

$$|p(x') - p(x'')| < \varepsilon \quad \text{dacă} \quad |x' - x''| < \delta(\varepsilon). \quad (1)$$

Să considerăm mulțimea discurilor deschise $B(x_0, \delta)$, $x_0 \in \mathcal{L}$. Pentru orice punct x dintr-un astfel de disc, avem

$$p(x) = p(x_0) + q(x, x_0), \quad \text{unde} \quad |q(x, x_0)| < \varepsilon. \quad (2)$$

Reuniunea acestor discuri acoperă frontiera \mathcal{L} , prin urmare, în virtutea teoremei lui Borel și Lebesgue (vezi § A.3, pag. 694), \mathcal{L} poate fi acoperită cu un număr finit de discuri. De aci urmează că putem întotdeauna construi o bandă-frontieră \mathcal{D}_ε , astfel ca

$$p(x) = p(x_0) + q(x, x_0), \quad |q(x)| < \varepsilon, \quad (3)$$

unde $x \in \mathcal{D}_\varepsilon$, iar $x_0 \in \mathcal{L}$ și este punctul situat la distanța minimă de x . (Se poate demonstra că un astfel de punct există.)

Notînd cu \mathcal{L}_ε componenta interioară a frontierei benzii \mathcal{D}_ε , este evident că avem

$$\inf |x_0 - x_1| = s > 0, \quad \text{unde} \quad x_0 \in \mathcal{L}, \quad x_1 \in \mathcal{L}_\varepsilon, \quad (4)$$

așadar că lățimea benzii-frontieră este strict pozitivă pentru orice ε .

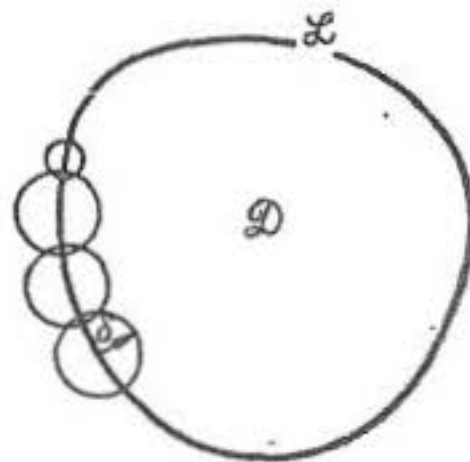


Fig. 10.9.1

Să considerăm acum o pereche de puncte x_0, x_1 pentru care marginea s din (4) este atinsă. (Se poate demonstra că astfel de perechi există.)

Să alegem un sistem de coordonate avînd drept origine un astfel de punct $x_0 \in \mathcal{L}$, și drept axă Ox — dreapta ce trece prin x_0 și punctul corespunzător x_1 . De asemenea, să considerăm punctul $a(a, 0)$ situat între x_0 și x_1 , și punctele $x'(a, b')$ și $x''(a, -b'')$ în care perpendiculara în a pe x_0x_1 intersectează \mathcal{L} (vezi fig. 10.9.2). Întrucît \mathcal{D} este convex, el este situat

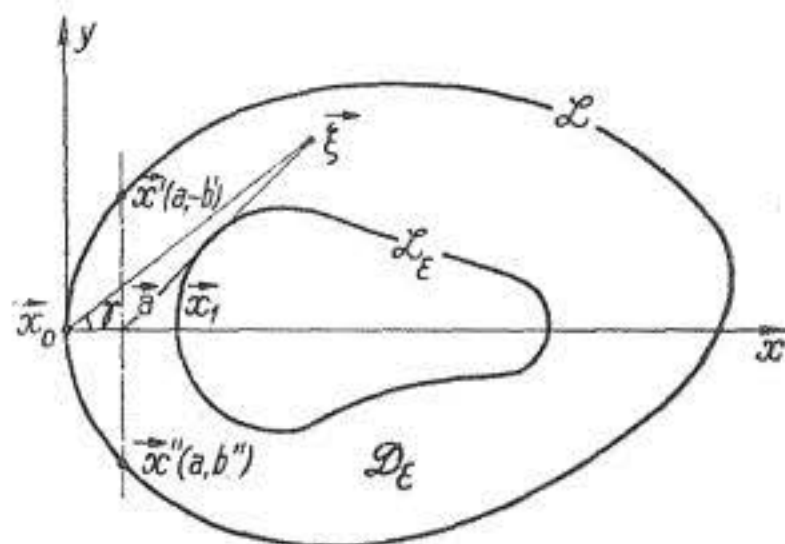


Fig. 10.9.2

în întregime de aceeași parte a tangentei la frontieră în x_0 . Pentru simplitate, să presupunem că frontiera \mathcal{L} este o curbă Liapunov. (Raționamentul poate fi extins la orice domeniu convex.) Alegînd a suficient de mic, rezultă că putem scrie ecuația arcului de frontieră $x''x_0x'$ sub forma $x = f(y)$.

Ne propunem acum să evaluăm diferența valorilor potențialului de simplu strat de densitate $p(x)$ în punctele x_0 și a . Vom nota

$$v(x) \equiv V(x, y, 0), \quad \rho_0 = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}, \quad \rho_a = \sqrt{(\xi - a)^2 + \eta^2}, \quad (5)$$

astfel că avem de evaluat diferența

$$v(a) - v(x_0) = \iint_{\mathcal{D}} p(\xi) (\rho_a^{-1} - \rho_0^{-1}) dD. \quad (6)$$

Pentru aceasta, începem prin a descompune integrala (6) în suma unei integrale pe porțiunea $\mathcal{D}_{(0)}$ (pe care $\xi < a$), și a unei integrale pe porțiunea $\mathcal{D}_{(1)}$ (pe care $\xi > a$).

Pentru un punct arbitrar $\xi \in \mathcal{D}_{(1)}$, din triunghiul $\xi x_0 a$ avem mai întîi $\rho_a^2 = a^2 + \rho_0^2 - 2a\rho_0 \cos \gamma$ (unde $\gamma = \widehat{\xi x_0 a}$), și deci, neglijînd termenii patratici în a :

$$\rho_a = \rho_0 - a \cos \gamma. \quad (7)$$

Întrucît \mathcal{D} e convex, avem $\gamma < \pi/2$, și deci $\cos \gamma > 0$. Valoarea a poate fi aleasă oricînd suficient de mică pentru ca să avem $\rho_0 - \rho_a > 0$.

Ținînd seama de (7), integrala din (6) calculată numai pe $\mathcal{D}_{(1)}$, devine

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{D}_{(1)}} p(\xi) (\rho_a^{-1} - \rho_0^{-1}) dD &= \iint_{\mathcal{D}_{(1)}} p(\xi) (a \cos \gamma / \rho_0 \rho_a) dD > \\ &> [a/d^2(\mathcal{D})] \iint_{\mathcal{D}_{(1)}} p(\xi) \cos \gamma dD = aK, \end{aligned} \quad (8)$$

unde K este o constantă pozitivă, dat fiind că avem $p(\xi) \geq 0$ și $\cos \gamma > 0$.

Să luăm acum $\xi \in \mathcal{D}_{(0)}$. Întrucît $\mathcal{D}_{(0)} \subset \mathcal{D}_\varepsilon$, putem face uz de relația (3). Alegînd a suficient de mic, această relație rămîne valabilă pentru orice punct din $\mathcal{D}_{(0)}$, de unde

$$p(\xi, \eta) = p(a, \eta) + q(\xi, \eta), \quad |q(\xi, \eta)| < \varepsilon. \quad (9)$$

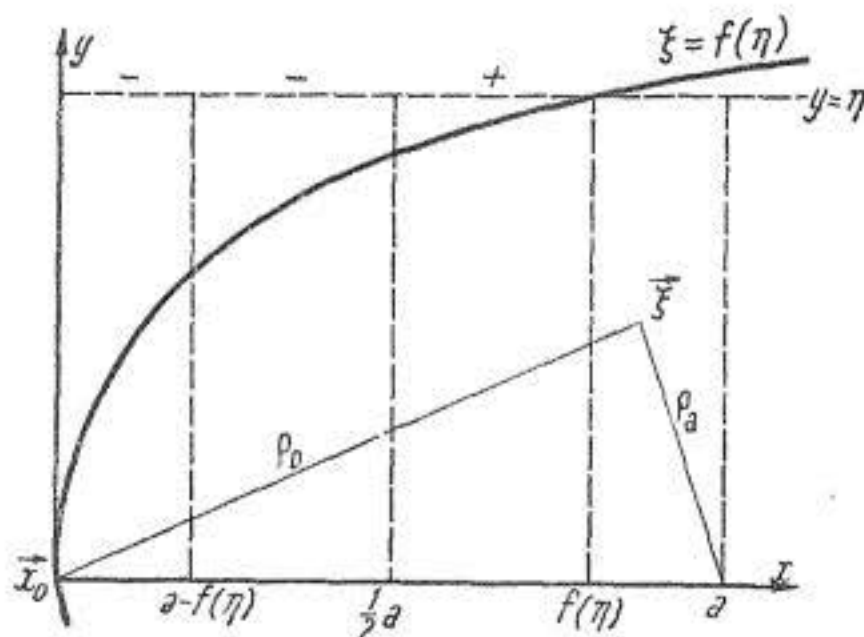


Fig. 10.9.3

Să notăm pe scurt

$$A(\xi) \equiv A(\xi, \eta) = \rho_a^{-1} - \rho_0^{-1}. \quad (10)$$

Cu aceasta, integrala din (6) calculată acum numai pe $\mathcal{D}_{(0)}$, se va scrie

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{D}_{(0)}} p(\xi) A(\xi) dD &= \int_{-b''}^{b'} \int_{f(\eta)}^a p(a, \eta) A(\xi, \eta) dD + \\ &+ \int_{-b''}^{b'} \int_{f(\eta)}^a q(\xi, \eta) A(\xi, \eta) dD. \end{aligned} \quad (11)$$

Pentru prima integrală din această sumă obținem valoarea

$$M = \int_{-b''}^{b'} \int_{f(\eta)}^a p(a, \eta) A(\xi, \eta) dD = \int_{-b''}^{b'} p(a, \eta) J(\eta) d\eta, \quad (12)$$

unde

$$J(\eta) = \int_{f(\eta)}^a A(\xi, \eta) d\xi = \int_{f(\eta)}^a (\rho_a^{-1} - \rho_0^{-1}) d\xi. \quad (13)$$

Or, din figura 10.9.3 rezultă evident că avem $A(\xi, \eta) \geq 0$ după cum $\xi \geq a/2$.

De aci urmează că, dacă $f(\eta) < a/2$, atunci

$$\int_0^{f(\eta)} A(\xi, \eta) d\xi < 0.$$

Pe de altă parte, dacă $f(\eta) > a/2$, putem descompune intervalul $[0, f(\eta)]$ în suma intervalelor $[0, a - f(\eta)]$, $[a - f(\eta), a/2]$ și $[a/2, f(\eta)]$. Integrala funcției $A(\xi, \eta)$ pe primul din aceste subintervale este negativă, în timp ce suma integralelor luată pe celelalte două din ele este nulă (întrucât $A(\xi, \eta)$ este evident antisimetrică în raport cu dreapta $\xi = a/2$). În consecință, dacă în (13) vom calcula integrala pe intervalul $[0, a]$, aceasta va reveni la a-i adăuga o cantitate negativă; ținând din nou seama de proprietatea de antisimetrie a funcției $A(\xi, \eta)$, conchidem că

$$J(\eta) > \int_0^a (\rho_a^{-1} - \rho_0^{-1}) d\xi = 0. \quad (14)$$

(După calcule elementare, se poate constata și că $J(\eta)$ este mărginită pentru orice η .) Întrucât $p(\xi) \geq 0$, din (12) urmează că $M > 0$.

Trecînd la ultima integrală din (11), se vede că din (9) obținem mai întîi

$$\left| \int_{-b''}^{b'} \int_{f(\eta)}^a q(\xi, \eta) A(\xi, \eta) dD \right| < \varepsilon (N' + N''), \quad (15)$$

$$N' = \int_0^{b'} \int_0^a |A(\xi, \eta)| dD > 0, \quad N'' = \int_0^{b''} \int_0^a |A(\xi, \eta)| dD > 0.$$

Dat fiind că integrandul $|A(\xi, \eta)|$ este o funcție pozitivă și simetrică față de dreapta $\xi = a/2$, avem pe rînd (vezi fig. 10.9.3):

$$\begin{aligned} N' &= \int_0^{b'} \int_0^a |\rho_a^{-1} - \rho_0^{-1}| dD = 2 \int_0^{b'} \int_0^{a/2} (\rho_a^{-1} - \rho_0^{-1}) dD = \\ &= 2 \int_0^{b'} \int_0^{a/2} [1/\sqrt{\xi^2 + \eta^2} - 1/\sqrt{(a - \xi)^2 + \eta^2}] dD = \\ &= 2 \int_0^{a/2} \{ [\ln(\eta + \sqrt{\xi^2 + \eta^2})]_0^{b'} - [\ln(\eta + \sqrt{(a - \xi)^2 + \eta^2})]_0^{b'} \} d\xi = \end{aligned}$$

$$= 2 \int_0^{a/2} [\ln(b' + \sqrt{\xi^2 + b'^2}) - \ln \xi - \ln(b' + \sqrt{(a - \xi)^2 + b'^2}) + \\ + \ln(a - \xi)] d\xi.$$

Or, pentru $\xi \in]0, a/2[$ avem desigur $\xi^2 < (a - \xi)^2$, astfel că diferența dintre primul și al treilea termen din integrala de mai sus este negativă. Urmează că

$$N' \leq -2 \int_0^{a/2} \ln \xi d\xi - 2 \int_0^{a/2} \ln(a - \xi) d(a - \xi) = \\ = -2 \{ [\xi (\ln \xi - 1)]_0^{a/2} + [(a - \xi) (\ln(a - \xi) - 1)]_0^{a/2} \} = 2a \ln 2, \quad (16)$$

și, desigur, aceeași inegalitate pentru N'' . Ultima integrală din (11) este deci în modul mai mică decât $4\varepsilon a \ln 2$, de unde

$$\int_{-b''}^{b'} \int_{f(\eta)}^a q(\xi, \eta) A(\xi, \eta) dD > -4\varepsilon a \ln 2. \quad (17)$$

Ținând acum seama în (6) de evaluările din (8), (12) și (17), căpătăm

$$v(a) - v(x_0) > a(K - 4\varepsilon \ln 2) + M. \quad (18)$$

Prin urmare, oricare ar fi legătura dintre a și ε , această cantitate este pozitivă, și deci avem în definitiv

$$v(a) > v(x_0), \quad (19)$$

ceea ce contrazice relația (2.17) care cere ca penetrația ștanței cu bază plană, și deci și potențialul $v(x)$, să fie constante în $\mathcal{D} + \mathcal{L}$.

Teorema este demonstrată. Raționamentul acesta este cu siguranță valabil pentru ștanțe cu bază plană, solicitate central, dacă această bază e convexă, mărginită, și are cel puțin două axe de simetrie. Dimpotrivă, el nu e aplicabil pentru ștanțe care pătrund în semispațiu, rotindu-se totodată.

b) Alte rezultate

Mai enunțăm — fără demonstrații, care sînt destul de dificile — alte rezultate ale lui I. Zamfirescu (vezi L. Solomon și I. Zamfirescu [1]) asupra aceleiași probleme.

Mai întîi, teorema de mai sus poate fi precizată: soluția $p(x)$ e mărginită în orice punct din \mathcal{D} . De aci, rezultă că singularitățile presiunii sînt obligatoriu situate pe \mathcal{L} .

Mai departe, să numim *regulat* un punct de pe \mathcal{L} , în vecinătatea căruia ecuația frontierei poate fi scrisă sub formă parametrică prin intermediul a două funcții de clasă C^2 . Un punct de pe \mathcal{L} va fi numit α -unghiular, dacă în vecinătatea sa frontiera este compusă din două arce de clasă C^2 , care se intersectează aci sub un unghi egal cu 2α . Cu aceste definiții, se poate demonstra că :

În vecinătatea oricărui punct regulat de pe \mathcal{L} , presiunea tinde la infinit pentru $\xi \rightarrow \mathcal{L}$ ca funcția $1/\sqrt{d(\xi, \mathcal{L})}$, unde $d(\xi, \mathcal{L})$ este distanța de la ξ la \mathcal{L} ;

În vecinătatea oricărui punct α -unghiular pe \mathcal{L} , presiunea este reprezentabilă în coordonate polare sub forma

$$p(\rho, \varphi) = c\rho^{\gamma(\alpha)-1} : \left[\left(\cos \frac{1}{2} \varphi \right) \sqrt{\operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} \alpha - \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} \varphi} \right], \quad (20)$$

unde drept axă polară s-a ales bisectoarea unghiului 2α ; c este o constantă; $\gamma(\alpha)$ este o anumită funcție crescătoare.

Această formulă este analogă cu unele rezultate anterioare ale lui L. Galin [4], § 2.11, și V. Rvacev [4], valabile însă numai pentru *pana elastică* (domeniu unghiular infinit).

§10. O SOLUȚIE APROXIMATIVĂ PENTRU ANUMITE ȘTANȚE CU BAZĂ PLANĂ MĂRGINITĂ CONVEXĂ NEELIPTICĂ

Teoremele lui I. Zamfirescu arată că este imposibil să facem uz de soluții polinomiale pentru problema ștanței cu bază plană mărginită (vezi din nou pag. 655). Desigur, această problemă este considerabil mai complicată, întrucât contactul inițial într-un punct este înlocuit cu contactul pe o porțiune finită a planului-frontieră : cunoașterea configurației lui \mathcal{D} ne e de prea puțin folos dacă acest domeniu nu e eliptic.

a) Presiunea sub ștanță și funcția lui Prandtl

Soluția exactă pentru ștanța cu bază plană eliptică a sugerat o cale pentru obținerea soluției pentru anumite ștanțe cu bază plană ne-eliptică (L. Solomon [11]). Anume, expresia (4.21) a presiunii sub ștanța cu bază plană eliptică, și expresia (5.15.8) a funcției lui Prandtl pentru torsiunea barei de secțiune eliptică, sînt legate prin relația

$$p(x, y) = [P/2\pi \sqrt{a^2 + b^2}] [1/\sqrt{f(x, y)}]. \quad (1)$$

Liniile de nivel ale funcției lui Prandtl sînt dispuse similar cu liniile de egală presiune sub ștanță (chiar neeliptică), și faptul că funcția lui Prandtl este nulă pe frontieră, corespunde faptului că presiunea tinde aci spre infinit.

Să căutăm atunci în general funcția $p(x, y)$ sub forma

$$p(x, y) = c(x, y) / \sqrt{f(x, y)}, \quad (2)$$

unde $c(x, y)$ este o funcție de corecție. Soluția (2) va fi admisibilă dacă potențialul $V(x, y, 0)$ de densitate (2) păstrează o valoare constantă în $\mathcal{D} + \mathcal{L}$. Funcția $c(x, y)$ va trebui aleasă în așa fel încât să fie respectată formula (9.20), iar oscilația funcției $V(x, y, 0)$ să rezulte minimală.

În cele ce urmează, vom expune rezultatele obținute pentru două domenii poligonale convexe regulate: triunghi echilateral („t”) și pătrat („p”).

Integralele singulare ce apar în cele ce urmează au fost calculate cu mașina electronică de calcul CIFA-101. Viteza mică de lucru a mașinii explică numărul redus de puncte pentru care s-au efectuat calculele, numărul mic de termeni reținut în seria (14) etc.

b) Cazul triunghiului echilateral

Să considerăm triunghiul din figura 5.15.1, avînd lungimea laturii $2\sqrt{3}a$, înălțimea $3a$, și ale cărui laturi au ecuațiile (5.15.34). Mai amintim că

$$D_t = 3\sqrt{3}a^2, \quad I_{0t} = 3\sqrt{3}a^4 = 3^{-3/2} D_t^2. \quad (3)$$

Funcția lui Prandtl pentru acest domeniu are forma (5.15.35):

$$f_t(x, y) = (1/6a) (3x^2y - y^3) - \frac{1}{2} (x^2 + y^2) + \frac{2}{3} a^2. \quad (4)$$

Dacă în soluția prezumată (2) am alege $c(x, y) = \text{const.}$, ca în (1), am obține un potențial care tinde la infinit în lungul înălțimilor triunghiului, de la laturi spre vîrfuri. Presiunea $c/\sqrt{f_t(x, y)}$ tinde deci prea repede spre infinit la vîrfuri (puncte de concurență a două drepte pe care $f_t(x, y) = 0$). Notînd cu d_j distanțele de la un punct oarecare din \mathcal{D}_t la vîrfuri notat (j), este evident că produsul $(d_1 d_2 d_3)^m$ — unde m este o constantă, întrucît poligonul este regulat — poate juca rolul unui factor de corecție. Aceasta a condus la a se alege funcția

$$p_t(x, y) = a_t D_t^{1/8} (d_1 d_2 d_3)^{1/4} / \sqrt{f_t(x, y)}, \quad (5)$$

unde coeficientul a_t se măsoară în kgf/cm^2 , iar factorul constant $D_t^{1/8}$ a fost introdus pentru ca expresia de natură pur geometrică care înmulțește pe a_t să fie nul-dimensională.

Condiția de echilibru (2.16) duce la relația

$$P = a_t J_t = a_t D_t^{1/8} j_t, \quad (6)$$

unde pentru j_t s-a obținut (luînd $a = 1$) valoarea

$$j_t = \iint_{\mathcal{D}_t} [(d_1 d_2 d_3)^{1/4} / \sqrt{f_t(x, y)}] dD = 23,71. \quad (7)$$

Cu aceasta, (5) devine

$$p_i(x, y) = (P/j_i) (d_1 d_2 d_3)^{1/4} / \sqrt{f_i(x, y)}. \quad (8)$$

Introducînd această expresie în ecuația (2.17), căpătăm

$$\delta = \theta (P/j_i) w_i(x, y), \quad (9)$$

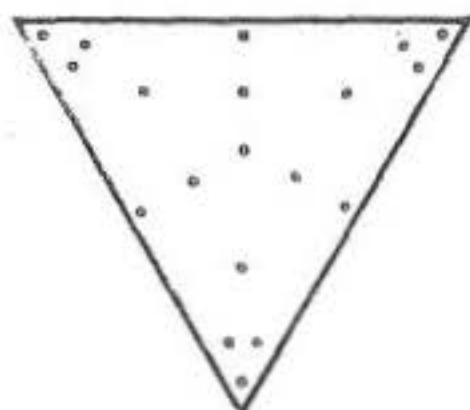
unde cantitatea

$$w_i(x, y) = \iint_{\mathcal{D}_i} \{ (d_1 d_2 d_3)^{1/4} / \sqrt{f_i(\xi, \eta) [(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2]} \} dD \quad (10)$$

poate fi calculată în diferite puncte ale triunghiului. În notațiile din (2.13), pentru potențialul de simplu strat de densitate $p_i(x, y)$ avem evident pe \mathcal{D}_i

$$V_i(x, y, 0) = (P/j_i) w_i(x, y). \quad (11)$$

Soluția (8) este acceptabilă, dacă mărimea $w_i(x, y)$ păstrează o valoare constantă în \mathcal{D}_i . Calculul a dat următoarele rezultate :



x	y	$w_i(x, y)$
0	0,95	27,19
0	0,50	27,11
0	0,00	27,05
0	-1,00	27,19
0	-1,90	27,03
1,3	0,85	27,27

Fig. 10.10.1

În aceste 19 puncte, alese în așa fel încît să acopere oarecum uniform triunghiul, oscilația funcției $w_i(x, y)$ este mai mică decît 1 % din valoarea ei.

Pentru a determina presiunea în centrul de greutate al triunghiului, remarcăm că presiunea medie este aci $p_m = P/3\sqrt{3}$, în timp ce din (4) și (8) obținem presiunea minimă $p_i(0,0) = 2^{1/4} \sqrt{3} (P/j_i)$ astfel că

$$p_{\min} = p_i(0,0) = 0,45 p_m. \quad (12)$$

c) Cazul pătratului

Să considerăm un pătrat de latură $2a$, pentru care

$$D_p = 4a^2, \quad l_{0p} = \frac{8}{3} a^4 = \frac{1}{6} D_p^2. \quad (13)$$

Funcția lui Prandtl corespunzătoare se obține din (5.15.69) pentru $b = a$, $\lambda_n = (2n + 1)\pi/2a$:

$$f_p(x, y) = \frac{32 a^2}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n + 1)^3} \left[1 - \frac{\operatorname{ch} \lambda_n x}{\operatorname{ch} \lambda_n a} \right] \cos \lambda_n y. \quad (14)$$

Ca și în cazul triunghiului, este necesară introducerea unui factor de corecție de forma $(d_1 d_2 d_3 d_4)^m$. (Rolul acestui factor trebuie să scadă pe măsură ce numărul laturilor poligonului regulat crește.) Vom lua

$$p_p(x, y) = a_p D_p^{1/10} (d_1 d_2 d_3 d_4)^{1/5} / \sqrt{f_p(x, y)}. \quad (15)$$

Condiția de echilibru (2.16) duce în acest caz la relația

$$P = a_p J_p = a_p D_p^{1/10} j_p, \quad (16)$$

unde pentru j_p s-a obținut (în cazul $a=1$) valoarea

$$j_p = \iint_{\mathcal{D}_p} [(d_1 d_2 d_3 d_4)^{1/5} / \sqrt{f_p(x, y)}] dD = 14,13. \quad (17)$$

Cu aceasta, (15) devine

$$p_p(x, y) = (P/j_p) (d_1 d_2 d_3 d_4)^{1/5} / \sqrt{f_p(x, y)}. \quad (18)$$

Introducând (18) în (2.17), căpătăm relația analogă cu (9):

$$\delta = \theta (P/j_p) w_p(x, y), \quad (19)$$

unde integrala

$$w_p(x, y) = \iint_{\mathcal{D}_p} \{ (d_1 d_2 d_3 d_4)^{1/5} / \sqrt{f_p(\xi, \eta)} [(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2] \} dD \quad (20)$$

poate fi calculată. În notațiile din (2.13), avem desigur

$$V_p(x, y, 0) = (P/j_p) w_p(x, y). \quad (21)$$

Pentru funcția $w_p(x, y)$ s-au obținut valorile din tabela de mai jos

x	y	$w_p(x, y)$
0,0	0,0	19,12
0,0	0,5	18,69
0,0	0,9	19,30
0,5	0,5	18,69
0,9	0,9	19,87

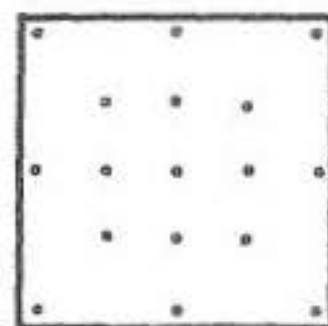


Fig. 10. 10.2

În aceste 17 puncte, alese astfel încît să acopere oarecum uniform pătratul, oscilația funcției $w_p(x, y)$ este de cca. 6% din însăși valoarea ei. Rezultatul — mai puțin satisfăcător — este influențat de dificultățile de calcul efectiv: în timp ce $f_i(x, y)$ este un polinom, $f_p(x, y)$ a trebuit să fie înlocuită cu suma primilor 5 termeni ai seriei (14), ceea ce duce la abateri sensibile pentru expresia $1/\sqrt{f_p(x, y)}$ în vecinătatea frontierei; în afară de aceasta, însăși tehnica folosită pentru a calcula integralele $w_p(x, y)$ — mai puțin simple decît $w_i(x, y)$ — a trebuit să fie mai puțin precisă.

Presiunea medie și presiunea minimă sînt aci

$$p_m = \frac{1}{4} P, \quad p_p(0,0) = (4^{1/5} / \sqrt[5]{0,589}) (P/j_p),$$

de unde urmează

$$p_{\min} = p_p(0,0) = 0,48 \, p_m. \quad (22)$$

Este instructivă compararea formulelor (12), (22) și (4.23) : pentru un număr tot mai mare de laturi, rolul presiunilor infinite din colțuri e tot mai puțin important.

d) Rigiditatea geometrică la penetrație

Ar fi de reală utilitate să dispunem și în cazul ștanței cu bază plană ne-eliptică de o cantitate de același tip cu rigiditatea geometrică la penetrație din § 8. În acest scop, să scriem (2.17) sub forma

$$\delta = [(1 - \nu)/\mu] [V(x, y, 0)/2\pi], \quad (23)$$

unde $V(x, y, 0)$ este o constantă. Dacă aceasta din urmă depinde numai de domeniul \mathcal{D} și de sarcina P , și dacă ea e proporțională cu P (cum era cazul în (4.20)), se poate obține din (23) o relație de același tip cu (8.5), notînd pur și simplu

$$C_c = 2\pi P/V(x, y, 0). \quad (24)$$

Această mărime se va numi *rigiditate geometrică la penetrație* pentru o ștanță cu bază plană mărginită *oarecare*. Dacă C_c este cunoscută, deplasarea sub ștanță (în absența rotației) rezultă imediat. (Pentru evaluarea deplasărilor sub ștanțe cu bază plană neeliptică, vezi L. Galin [3], [4], § 2.10 ; V. Mossakovski [1], [2] ; N. Borodacev [3], care face uz de rezultatele lui G. Polya și G. Szegő [1].)

În ce privește exemplele de mai sus, putem face uz în cazul triunghiului de formulele (24), (11), (7) și de valoarea medie $w_t(x, y) = 27,15$ ce rezultă din tabloul de la pag. 662. Ca urmare, pentru triunghiul echilateral de arie $D_t = 3\sqrt{3} \text{ cm}^2$, obținem

$$C_{ct} = 2\pi (j_t/w_t) \cong 5,49 \text{ cm}. \quad (25)$$

În același mod, făcînd uz de formulele (24), (21), (17) și de valoarea medie $w_p(x, y) = 19,30$ ce rezultă din tabloul de la pag. 663, obținem pentru pătratul de arie $D_p = 4 \text{ cm}^2$,

$$C_{cp} = 2\pi (j_p/w_p) = 4,60 \text{ cm}. \quad (26)$$

Să amintim pe de altă parte formule de tip Saint Venant (8.23) pentru rigiditatea geometrică la penetrație pentru o ștanță cu bază plană eliptică, precum și faptul că această cantitate depinde numai într-o mică măsură de forma elipsei de contact. Aceasta sugerează încercarea de a utiliza (8.23) ca o formulă *aproximativă* pentru a determina pe C_c pentru ștanțe

cu bază plană *neeliptică* mărginită. Cu titlu de verificare, introducând (3) și (13) în (8.23) (nici în cazul formulei (5.15.23) nu se poate face mai mult), obținem

$$C_{et} = 2,84 \cdot 3^{-3/16} D_t = 2,31 D_t, \quad C_{ep} = 2,84 \cdot 6^{-1/8} D_p = 2,27 D_p, \quad (27)$$

și prin urmare, pentru triunghiul și pătratul de mai sus (ariile lor sînt diferite!),

$$C_{et} = 5,27 \text{ cm}, \quad C_{ep} = 4,54 \text{ cm}. \quad (28)$$

Valorile din (28) — calculate cu ajutorul unei formule care asimilează domeniul de contact cu o elipsă de aceeași arie și același moment polar central de inerție — diferă numai cu 4 %, respectiv cu 1 % de valorile (25), (26), obținute pe cu totul altă cale, cu ajutorul soluției aproximative (2).

Rigiditatea geometrică la penetrație calculată din (8.23) este *mai mică* decît cea din (25), respectiv (26). Ca și în problema torsiunii (vezi § 5.15, pag. 260), aceasta se explică prin prezența virfurilor: în vecinătatea lor, presiunile cresc mai repede decît în vecinătatea punctelor regulate ale frontierei. A utiliza (8.23), înseamnă a neglija acest fapt, ceea ce dă pentru sarcina totală P (și deci și pentru C_e) valori approximate prin lipsă.

Toate aceste raționamente au numai un caracter aproximativ. Mai mult, este probabil că ele necesită corecții importante, sau devin chiar inutilizabile pentru ștanțe cu bază plană mărginită ne-convexă, dublu conexă etc. Cu toate acestea, posibilitatea de-a obține cu ușurință (pe cale teoretică sau chiar experimentală) funcția lui Prandtl, și de aci și presiunea sub ștanță, precum și posibilitatea de a calcula penetrația cu ajutorul unor formule atît de simple ca (23), (24) și (8.23), nu poate fi neglijată ⁵⁾.

§ 11. DESPRE TENSIUNILE ÎN SEMISPAȚIU SUB ȘTANȚĂ PENTRU UN DOMENIU DE CONTACT ELIPTIC

Este de cea mai mare însemnătate să se determine efectiv starea elastică a semi-spațiului solicitat, acum cînd \mathcal{D} și $p(\xi, \eta)$ sînt cunoscute. Problema lui Neumann la care se ajunge, a fost studiată în §§ 9.4 și 9.5. Formulele lui Hertz (9.4.35) furnizează componentele deplasării, din care decurg cele ale tensiunii. Principala problemă *de calcul* constă deci în determinarea *efectivă* a potențialilor Ω, ω .

În practică, este necesar să se cunoască deplasările și tensiunile pe planul-frontieră (în \mathcal{D} și în exteriorul său), precum și în lungul axei Oz (mai ales pentru ștanța paraboloidală). Vom da numai unele indicații asupra rezultatelor, întrucît calculele corespunzătoare sînt prea fastidioase pentru a-și găsi locul aci.

⁵⁾ Pentru verificări experimentale recente, vezi R. Takano [1]; T. Tanli et al. [1].

a) Ștanța cu bază plană eliptică

În acest caz, tensiunile maxime apar pe frontiera domeniului de contact, unde $p(\xi, \eta)$ devine infinită. Deplasările pot fi calculate sub o formă ce cuprinde funcții elementare, precum și integrale eliptice ne-complete de prima speță. Dimpotrivă, componentele tensiunii pot fi explicitate numai prin intermediul unor funcții elementare. (Vezi A. Lurie [4], § 5.9.) Pentru $k = 0$, componentele deplasării se exprimă și ele numai prin funcții elementare.

Nu cunoaștem rezultate corespunzătoare cazului domeniului de contact plan mărginit neeliptic.

b) Ștanța paraboloidală

Componentele deplasării se exprimă prin funcții elementare, și integrale eliptice necomplete de prima și a doua speță. (Vezi A. Lurie [4], § 5.10). Componentele tensiunii (obținute pentru prima oară de N. Beliaev [3], „Tensiunile locale...”, § 9) pot fi deduse de aci prin operații de derivare.

Studiul repartiției tensiunilor pe \mathcal{D} duce la concluzia că punctele cele mai periclitate sînt cele situate în centrul elipsei de contact (dacă $k > 0,89$), respectiv la capetele axei mari (dacă $k < 0,89$) (ibid., §§ 12–14).

Axa Oz este axă principală. Componentele normale ale tensiunii tind foarte repede la zero pentru $z \rightarrow \infty$. În vecinătatea imediată a domeniului de contact, ele sînt toate tensiuni de compresiune, și de aceea (vezi § 4.3, pag. 134 și § 9.4, pag. 600) ele pot atinge valori foarte mari, fără a se produce fisuri sau trecere în stare de deformare plastică.

Tensiunile tangențiale maxime descresc mai lent și își atinge maximumul nu pe \mathcal{D} , ci la o anumită adîncime z situată între $0,5 a$ și $0,75 a$. Tensiunea tangențială maximală are valori cuprinse între $0,304 a_1$ și $0,325 a_1$. Criteriul de rezistență corespunzător are deci forma

$$0,63 a_1 \leq \sigma_s. \quad (1)$$

Anterior lui N. Beliaev, rezultate similare pentru $k = 0$ au fost obținute de către A. Dinnik [1]. În acest caz, tensiunile se exprimă numai prin funcții elementare. Relația (1) rămîne valabilă.

Reproducem aci graficul tensiunilor pentru cazul $k = 0$ (vezi A. Dinnik [1], cap. 2, fig. 3), și un grafic calculat cu ajutorul formulelor date de A. Lurie [4], § 5.10, pentru cazul $k = 0,9$; $\nu = 0,3$.

Pe ambele grafice figurează repartiția tensiunilor reduse (împărțite la $a_1 = \sigma_{s|\max}$) în lungul axei Oz , ca funcții de adîncimea redusă z/a . (Această repartiție își păstrează dacă nu valorile, cel puțin caracterul, chiar dacă presiunile reale pe \mathcal{D} sînt înlocuite cu $p = \text{const}$. Aceasta se vede ușor dacă se compară graficele de față cu cele date de H. Deresiewicz [5].) Este

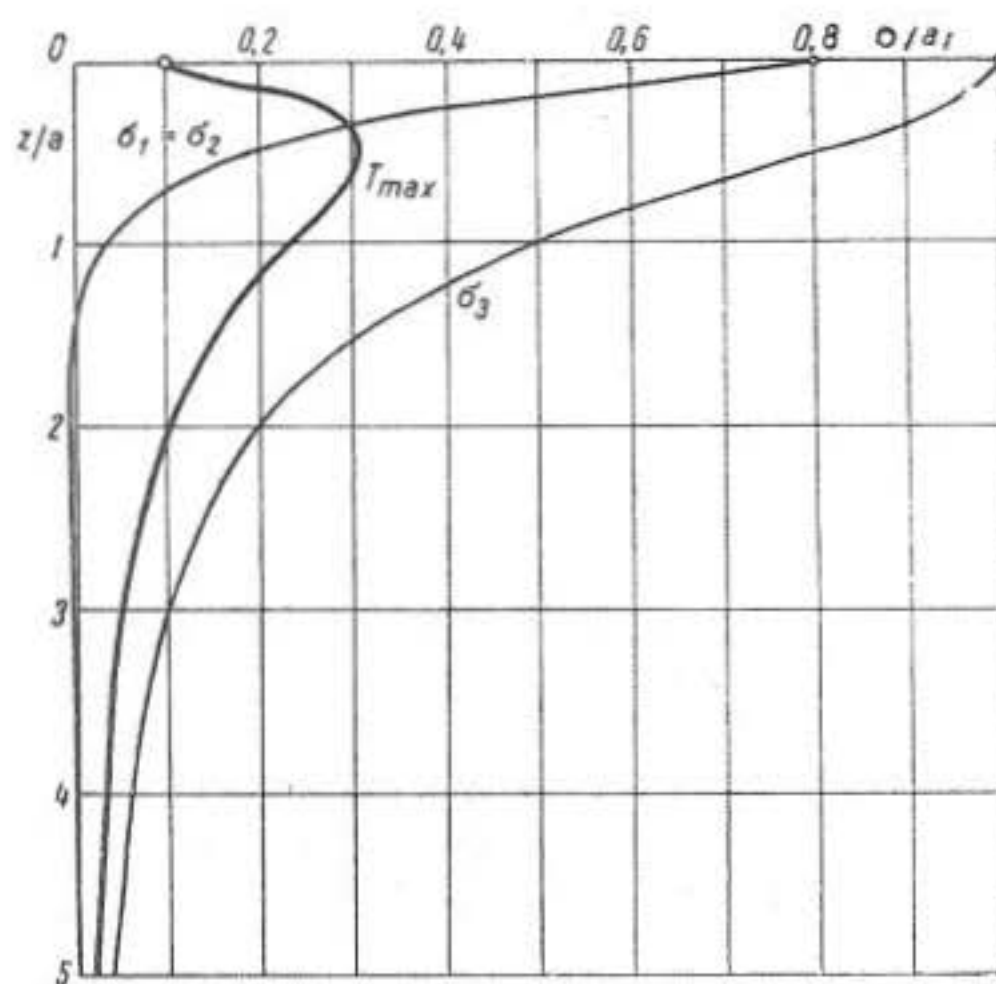


Fig. 10.11.1

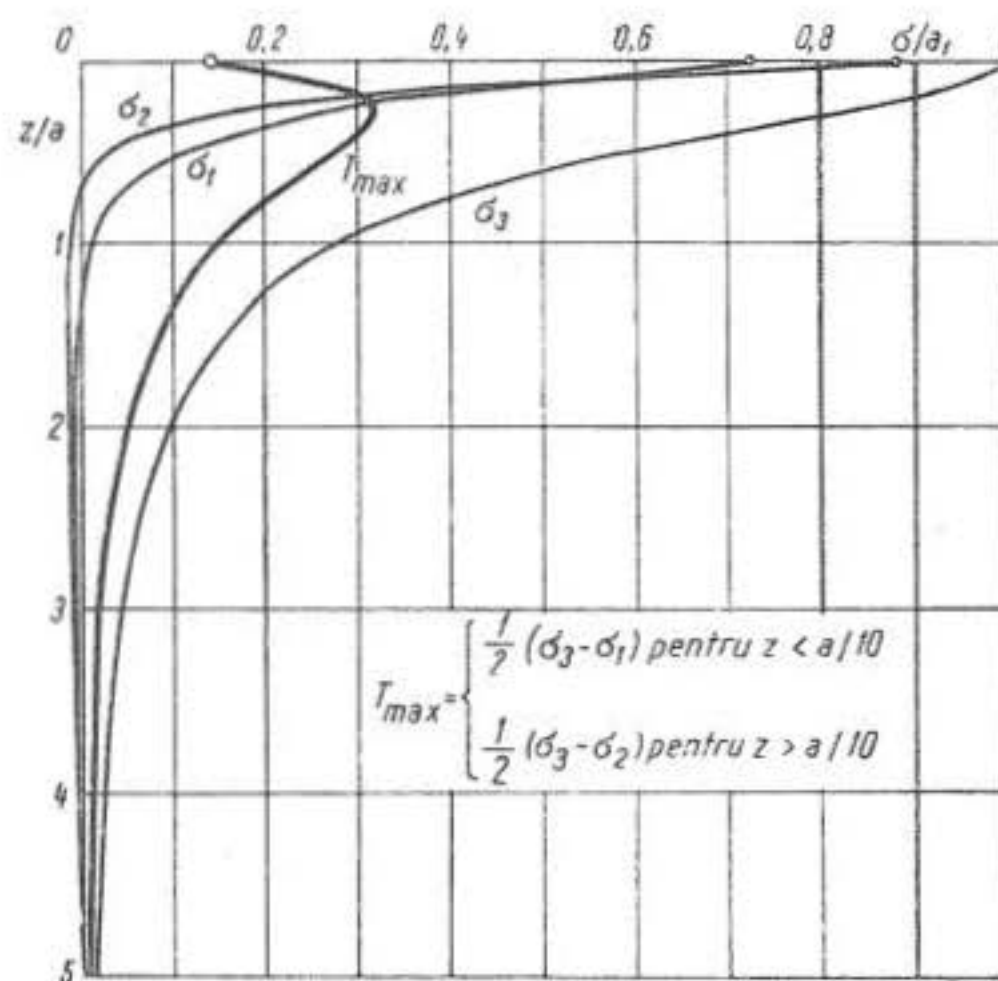


Fig. 10.11.2

vizibil că valorile σ_3 — și chiar și σ_1 și σ_2 — pot fi considerabile : singura cantitate ce trebuie păstrată între limite convenabile, este T_{\max} .

Dacă $0,63 \sigma_1$ este mai mare decât σ_s pentru materialul considerat, virfurile de tensiune din graficele de mai sus sînt inevitabil retezate. În fapt, materialul nu rezistă la astfel de sarcini în regim elastic, ci trece în starea de deformare plastică. Prin aceasta, tensiunile sînt redistribuite în așa fel, încît straturi mai profunde ale materialului rezultă a fi mai puternic solificate decît se vede din aceste grafice. (Vezi și § 13, exemplul c.)

§ 12. REDUCEREA PROBLEMEI CONTACTULUI LA PROBLEMA ȘTANȚEI PARABOLOIDALE

a) Corpuri în contact

Să presupunem acum că două corpuri elastice, mărginite de suprafețele $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$, vin în contact într-un punct O . Să presupunem că acest punct este punct eliptic pentru ambele suprafețe, și că normala și planul tangent la \mathcal{S}_1 și \mathcal{S}_2 există în O . Normalele sînt deci opuse, iar planele tangente coincid.

Vom raporta fiecare din cele două corpuri la cîte un sistem de coordonate propriu : $Ox_1y_1z_1$ și $Ox_2y_2z_2$. Axele z vor fi normalele *interioare* în O , iar axele x și y vor fi tangentele la liniile de curbură pe fiecare din suprafețe.

Dezvoltînd în serii Taylor funcțiile $z_1(x_1, y_1)$ și $z_2(x_2, y_2)$ care caracterizează cele două suprafețe în vecinătatea lui O , și neglijînd termenii de ordin superior, obținem în primă aproximație

$$z_1(x_1, y_1) = \frac{1}{2} [\partial^2 z_1(0, 0) / \partial x_1^2] x_1^2 + \frac{1}{2} [\partial^2 z_1(0, 0) / \partial y_1^2] y_1^2, \quad (1)$$

și o expresie similară pentru funcția $z_2(x_2, y_2)$.

Să amintim încă relația care definește curbura $1/\rho$ a curbei obținute prin secționarea unei suprafețe, cu un plan ce formează unghiul λ cu normala la suprafață în punctul considerat. Anume, considerînd un sistem de coordonate curbilinii ortogonale u, v pe suprafață (a nu se confunda cu componentele deplasării !) și amintind notațiile lui Monge

$$p = \partial z / \partial u, \quad q = \partial z / \partial v, \quad r = \partial^2 z / \partial u^2, \quad s = \partial^2 z / \partial u \partial v, \quad t = \partial^2 z / \partial v^2, \quad (2)$$

obținem (vezi G. Vrănceanu [1], vol. 2, § 15.1, sau V. Smirnov [2], vol. 2, pct. 131 și 132) :

$$(1 + p^2 + q^2) \frac{\cos \lambda}{\rho} = \frac{r du^2 + 2s du dv + t dv^2}{(1 + p^2) du^2 + 2pq du dv + (1 + q^2) dv^2}. \quad (3)$$

Considerînd cazul unei secțiuni normale ($\lambda = 0$, $\cos \lambda = 1$), ținînd seama că în origine avem $p = q = 0$, și luînd pe rînd $du = 0$ și $dv = 0$, obținem din (3)

$$1/\rho' = r, \quad 1/\rho'' = t, \quad (4)$$

unde am notat cu ρ' și ρ'' razele de curbură principale în origine.

Să presupunem că domeniul cercetat în jurul originii este suficient de restrîns pentru ca suprafața \mathcal{S} să rămînă aici destul de apropiată pe planul ei tangent. În acest caz, putem lua drept coordonate carteziene în planul tangent, proiecțiile liniilor $u = \text{const.}$ și $v = \text{const.}$ de pe \mathcal{S} . Notînd cu x, y liniile de coordonate astfel obținute, deducem din (2) și (4) relațiile (valabile numai în vecinătatea originii!)

$$1/\rho' = \partial^2 z / \partial x^2, \quad 1/\rho'' = \partial^2 z / \partial y^2. \quad (5)$$

În primă aproximație, ecuația (1) a suprafeței \mathcal{S}_1 se poate scrie

$$z_1 = \frac{1}{2} x_1^2 / \rho'_1 + \frac{1}{2} y_1^2 / \rho''_1, \quad (6)$$

unde indicele (1) arată că este vorba de elemente relative la \mathcal{S}_1 , iar indicii (') și (') indică direcțiile principale corespunzătoare.

Pentru suprafața \mathcal{S}_2 avem în mod asemănător

$$z_2 = \frac{1}{2} x_2^2 / \rho'_2 + \frac{1}{2} y_2^2 / \rho''_2. \quad (7)$$

De aci se vede că forma (5.1) a ecuației suprafeței ștanței paraboloidale este valabilă ca o primă aproximație pentru ștanța de orice configurație, în vecinătatea oricărui punct eliptic al frontierei sale (vezi G. Vrănceanu [1], vol. 1, § 15).

Întrucît originea este punct eliptic pe ambele suprafețe, razele de curbură principale ale fiecăreia din ele sînt de același semn :

$$\rho'_1 \rho''_1 > 0, \quad \rho'_2 \rho''_2 > 0. \quad (8)$$

Sînt posibile două variante ale contactului. Dacă toate mărimile ρ sînt pozitive, el se numește *contact exterior* (vezi fig. 10.12.1); dacă două din ele sînt pozitive și două negative, el se numește *contact interior* (vezi fig. 10.12.2); cazul în care toate mărimile ρ sînt negative nu are sens.

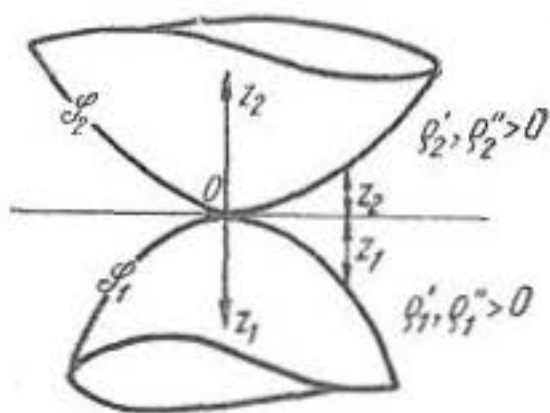


Fig. 10.12.1

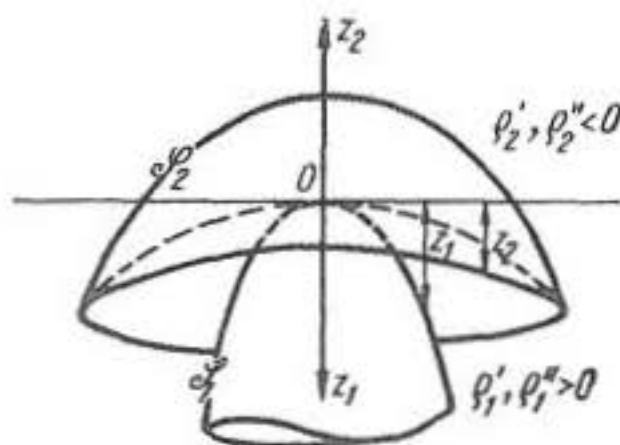


Fig. 10.12.2

În cazul contactului exterior avem $z_1 > 0$, $z_2 > 0$ în vecinătatea originii. Dimpotrivă, în cel al contactului interior avem $z_1 > 0$, $z_2 < 0$, sau $z_1 < 0$, $z_2 > 0$.

Analogia dintre expresiile (6), (7) și (5.1) sugerează posibilitatea de a se folosi în problema contactului soluția deja cunoscută a problemei ștanței paraboloidale. Anume, în § 5 distanța pe verticală de la un punct al suprafeței ștanței la *acel* punct de pe planul-frontieră al semispațiului cu care el coincide după deformație, era notată cu z . În problema contactului, un rol analog va fi atribuit distanței pe verticală dintre *acele* două puncte de pe \mathcal{S}_1 și \mathcal{S}_2 care coincid după deformație. Neglijînd — ca și în problema ștanței — deplasările tangențiale pe \mathcal{D} , și amintind că axele Oz_1 și Oz_2 sînt opuse, urmează că această distanță — pe care o vom nota cu z — este egală cu

$$z = z_1 + z_2 = \frac{1}{2} x_1^2 / \rho'_1 + \frac{1}{2} y_1^2 / \rho''_1 + \frac{1}{2} x_2^2 / \rho'_2 + \frac{1}{2} y_2^2 / \rho''_2. \quad (9)$$

Pentru a face uz de rezultatele din problema ștanței, trebuie mai întîi să găsim în planul tangent în O un nou sistem de axe, în care expresia distanței z să se reducă la o *sumă de pătrate*.

b) Schimbarea de coordonate

Să notăm cu 2α unghiul $\widehat{x_1 O x_2}$, care caracterizează poziția axelor Ox_2y_2 față de axele Ox_1y_1 . Acest unghi este desigur cunoscut, întrucît forma și poziția reciprocă a corpurilor de frontieră \mathcal{S}_1 și \mathcal{S}_2 sînt cunoscute.

Să introducem un nou sistem de axe Oxy , a căror poziție este definită de unghiurile $\alpha_1 = \widehat{x_1 O x}$ și $\alpha_2 = \widehat{x_2 O x}$, legate desigur prin relația

$$\alpha_1 - \alpha_2 = 2\alpha. \quad (10)$$

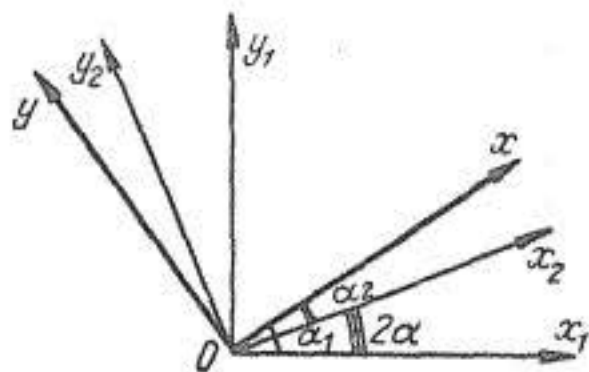


Fig. 10.12.3

Schimbarea de coordonate se face după formulele (valabile pentru $j = 1, 2$)

$$\begin{aligned} x_j &= x \cos \alpha_j - y \sin \alpha_j, \\ y_j &= x \sin \alpha_j + y \cos \alpha_j. \end{aligned} \quad (11)$$

Introducînd (11) în (9), obținem expresia

$$z = \frac{1}{2} x^2 / \rho' + \frac{1}{2} y^2 / \rho'' + (G_1 \sin 2\alpha_1 + G_2 \sin 2\alpha_2) xy, \quad (12)$$

unde am folosit notațiile

$$\begin{aligned} 1/\rho' &= (\cos^2 \alpha_1) / \rho'_1 + (\sin^2 \alpha_1) / \rho''_1 + (\cos^2 \alpha_2) / \rho'_2 + (\sin^2 \alpha_2) / \rho''_2, \\ 1/\rho'' &= (\sin^2 \alpha_1) / \rho'_1 + (\cos^2 \alpha_1) / \rho''_1 + (\sin^2 \alpha_2) / \rho'_2 + (\cos^2 \alpha_2) / \rho''_2, \end{aligned} \quad (13)$$

și de cantitățile (cunoscute)

$$2G_1 = 1/\rho_1'' - 1/\rho_1', \quad 2G_2 = 1/\rho_2'' - 1/\rho_2'. \quad (14)$$

Să considerăm și curburile medii (cunoscute) în origine

$$2H_1 = 1/\rho_1' + 1/\rho_1'', \quad 2H_2 = 1/\rho_2' + 1/\rho_2''. \quad (15)$$

Adunînd termen cu termen relațiile (13), obținem evident

$$1/\rho' + 1/\rho'' = 2(H_1 + H_2), \quad (16)$$

astfel că *suma* cantităților definite în (13) este cunoscută.

Pentru *diferența* lor, avem din (13) și (14):

$$1/\rho'' - 1/\rho' = 2G_1 \cos 2\alpha_1 + 2G_2 \cos 2\alpha_2. \quad (17)$$

Ne rămîne să alegem α_1, α_2 în așa fel încît (12) să se reducă la

$$z = \frac{1}{2} x^2/\rho' + \frac{1}{2} y^2/\rho'', \quad (18)$$

ceea ce se realizează impunînd condiția

$$G_1 \sin 2\alpha_1 + G_2 \sin 2\alpha_2 = 0. \quad (19)$$

Întrucît, pentru a satisface relația (10), este suficient să luăm

$$\alpha_1 = \alpha + \beta, \quad \alpha_2 = -\alpha + \beta, \quad (20)$$

unde β este necunoscut, relația (19) devine

$$(G_1 + G_2) \sin 2\beta \cos 2\alpha + (G_1 - G_2) \sin 2\alpha \cos 2\beta = 0. \quad (21)$$

Această relație permite determinarea unghiului β , așadar a unghiurilor α_1, α_2 , și deci și a coeficienților ρ', ρ'' din (18). Pentru a obține aceste din urmă valori sub o formă cît mai simplă, să revenim la relațiile (16) și (17), în care să ținem seama de (20). Căpătăm astfel

$$1/\rho' + 1/\rho'' = 2(H_1 + H_2), \quad (22)$$

$$1/\rho'' - 1/\rho' = 2(G_1 + G_2) \cos 2\alpha \cos 2\beta - 2(G_1 - G_2) \sin 2\alpha \sin 2\beta,$$

de unde urmează

$$\begin{aligned} 1/\rho' &= H_1 + H_2 - (G_1 + G_2) \cos 2\alpha \cos 2\beta + (G_1 - G_2) \sin 2\alpha \sin 2\beta, \\ 1/\rho'' &= H_1 + H_2 + (G_1 + G_2) \cos 2\alpha \cos 2\beta - (G_1 - G_2) \sin 2\alpha \sin 2\beta. \end{aligned} \quad (23)$$

Privind relația (21) și prima din relațiile (23) ca un sistem de ecuații pentru necunoscutele $\sin 2\beta, \cos 2\beta$, putem scrie

$$\begin{aligned} (G_1 - G_2) \sin 2\alpha \sin 2\beta - (G_1 + G_2) \cos 2\alpha \cos 2\beta &= 1/\rho' - (H_1 + H_2), \\ (G_1 + G_2) \cos 2\alpha \sin 2\beta + (G_1 - G_2) \sin 2\alpha \cos 2\beta &= 0. \end{aligned} \quad (24)$$

Determinantul principal al acestui sistem este cantitatea cunoscută și pozitivă

$$\Delta = G_1^2 + G_2^2 + 2G_1G_2 \cos 4\alpha, \quad (25)$$

și soluția sistemului (24) se obține sub forma

$$\begin{aligned} \sin 2\beta &= + [(1/\rho' - H_1 - H_2) (G_1 - G_2) \sin 2\alpha] : \Delta, \\ \cos 2\beta &= - [(1/\rho' - H_1 - H_2) (G_1 + G_2) \cos 2\alpha] : \Delta. \end{aligned} \quad (26)$$

Ridicînd la pătrat și adunînd, regăsim evident valoarea Δ , ceea ce conduce în definitiv la egalitatea

$$1/\rho' - H_1 - H_2 = \pm \sqrt{\Delta}. \quad (27)$$

Relațiile (16) și (27) dau acum valorile

$$1/\rho' = H_1 + H_2 - \sqrt{\Delta}, \quad 1/\rho'' = H_1 + H_2 + \sqrt{\Delta}, \quad (28)$$

unde am ales semnele în așa fel încît $\rho' \geq \rho'' > 0$, ceea ce corespunde unei anumite alegeri a axelor Oxy .

Expresia (18) este acum determinată.

Introducînd (28) în (26), deducem

$$\sin 2\beta = - [(G_1 - G_2) \sin 2\alpha] : \sqrt{\Delta}, \quad \cos 2\beta = [(G_1 + G_2) \cos 2\alpha] : \sqrt{\Delta}, \quad (29)$$

astfel că unghiul β , și deci și unghiurile α_1, α_2 sînt de asemenea cunoscute.

Faptul că trebuie întotdeauna să avem $\rho' > 0, \rho'' > 0$ decurge din aceea că z este pozitiv. Aceasta nu rezultă din raționamentul care a condus la (28), întrucît nu am făcut uz aci de nici un fel de condiții restrictive relative la valorile absolute și semnele razelor de curbură. Dar simpla examinare a figurii 10.12.2 arată că, în cazul contactului interior, aceste valori trebuie supuse anumitor relații pentru ca cele două corpuri să rămînă *exterioare unul celuilalt*. După cum urmează din (28), pentru aceasta este necesar și suficient să avem

$$-(H_1 + H_2) < \sqrt{\Delta} < H_1 + H_2. \quad (30)$$

Metoda de mai sus — mai simplă ca cea a lui Hertz — a fost propusă de A. Lurie [4], § 5.11. O soluție grafică a aceleiași probleme aparține lui D. Gazis [1].

OBSERVAȚIE. Se poate întîmpla ca unele din cele patru mărimi ρ să tindă la infinit — așadar ca punctul de contact să fie un punct *parabolic*. Raționamentele de mai sus rămîn valabile, și toate aceste formule vor putea fi folosite chiar dacă unul (sau ambele) din corpuri are formă cilindrică, conică etc. în vecinătatea punctului de contact. La limită, ele își păstrează sensul cînd unul din corpuri se reduce la semispațiu.

c) Cazuri particulare

1° Să presupunem că cele două sisteme de axe coincid : $Ox_1y_1 = Ox_2y_2$ (de ex. : contactul a două suprafețe de rotație, cu axe paralele ; liniile de curbură sînt desigur curbele meridiene, și paralelele pe cele două suprafețe). Unghiul 2α din figura 10.12.3 este nul, iar (25) ia forma

$$\Delta = (G_1 + G_2)^2. \quad (31)$$

Dacă $G_1 + G_2 > 0$, atunci $\sqrt{\Delta} = G_1 + G_2$, iar din (28) căpătăm

$$1/\rho' = H_1 + H_2 - (G_1 + G_2), \quad 1/\rho'' = H_1 + H_2 + (G_1 + G_2),$$

de unde, ținînd seama de (14) și (15) :

$$1/\rho' = 1/\rho'_1 + 1/\rho'_2, \quad 1/\rho'' = 1/\rho''_1 + 1/\rho''_2. \quad (32)$$

Pentru determinarea unghiurilor α_1, α_2 avem mai întîi din (29)

$$\sin 2\beta = 0, \quad \cos 2\beta = (G_1 + G_2) : \sqrt{\Delta} = 1, \quad (33)$$

astfel că axele Oxy rezultă a coincide cu cele inițiale, deoarece

$$\beta = \alpha_1 = \alpha_2 = 0. \quad (34)$$

Dacă însă $G_1 + G_2 < 0$, atunci avem $\sqrt{\Delta} = -(G_1 + G_2)$, și din (28) urmează :

$$1/\rho' = H_1 + H_2 + (G_1 + G_2), \quad 1/\rho'' = H_1 + H_2 - (G_1 + G_2),$$

de unde, ținînd seama de (14) și (15) :

$$1/\rho' = 1/\rho''_1 + 1/\rho''_2, \quad 1/\rho'' = 1/\rho'_1 + 1/\rho'_2. \quad (35)$$

Pentru a găsi unghiurile α_1, α_2 , avem mai întîi din (29) :

$$\sin 2\beta = 0, \quad \cos 2\beta = (G_1 + G_2) : \sqrt{\Delta} = -1, \quad (36)$$

astfel că, utilizînd și (20) :

$$\beta = \alpha_1 = \alpha_2 = \pi/2, \quad (37)$$

ceea ce arată că axele Oxy se capătă prin rotirea cu 90° a axelor inițiale.

Condițiile $G_1 + G_2 \geq 0$, esențiale în clasificarea acestor cazuri, echivalează cu anumite relații între valorile ρ . Astfel, dacă $G_1 + G_2 > 0$, din (14) urmează

$$1/\rho''_1 - 1/\rho'_1 + 1/\rho''_2 - 1/\rho'_2 > 0, \quad (38)$$

ceea ce (vezi (32)) conduce la a scrie

$$\rho'' < \rho'. \quad (39)$$

(Amintim că ambele cantități sînt pozitive.) Dimpotrivă, dacă $G_1 + G_2 < 0$, expresia din (38) schimbă de semn; or, ținînd seama de (35), aceasta conduce la aceeași inegalitate (39). Rotația de axe efectuată în acest ultim caz are deci rostul de a face ca raza de curbură mai mare să corespundă axei Ox . Este vorba așadar de o convenție de notație, și nu de un fapt mecanic.

În condițiile de mai sus, contactul exterior este întotdeauna posibil. Contactul interior e posibil numai dacă avem (vezi (32), (35))

$$1/\rho'_1 + 1/\rho'_2 > 0, \quad 1/\rho''_1 + 1/\rho''_2 > 0. \quad (40)$$

Dacă de pildă avem $\rho'_2 < 0$, $\rho''_2 < 0$, așadar suprafața \mathcal{S}_1 realizează contactul în interiorul suprafeței \mathcal{S}_2 , din (40) urmează

$$\rho'_1 < -\rho'_2, \quad \rho''_1 < -\rho''_2, \quad (41)$$

ceea ce este ușor de înțeles intuitiv (vezi fig. 10.12.2).

2° Cele de mai sus rămîn valabile dacă \mathcal{S}_1 și \mathcal{S}_2 sînt suprafețe de rotație cu axele în cruce. Alegînd drept axe Ox_j , Oy_j tangentele la cercul paralel, respectiv la meridianul din O pe \mathcal{S}_j ($j = 1, 2$), trebuie să luăm $2\alpha = 90^\circ$, și relația (25) devine

$$\Delta = (G_1 - G_2)^2. \quad (42)$$

Dacă $G_1 - G_2 > 0$, atunci $\sqrt{\Delta} = G_1 - G_2$, și din (28), (14) și (15), obținem

$$1/\rho' = 1/\rho'_1 + 1/\rho'_2, \quad 1/\rho'' = 1/\rho''_1 + 1/\rho''_2. \quad (43)$$

Din (29) urmează

$$\sin 2\beta = -(G_1 - G_2) : \sqrt{\Delta} = -1, \quad \cos 2\beta = 0, \quad (44)$$

astfel că, ținînd seama și de (20), avem

$$\beta = 3\pi/4, \quad \alpha_1 = \pi, \quad \alpha_2 = \pi/2. \quad (45)$$

Dacă însă $G_1 - G_2 < 0$, atunci $\sqrt{\Delta} = -(G_1 - G_2)$, și (43) se înlocuiește prin

$$1/\rho' = 1/\rho''_1 + 1/\rho'_2, \quad 1/\rho'' = 1/\rho'_1 + 1/\rho''_2. \quad (46)$$

Pentru a calcula unghiurile, din (29) deducem acum

$$\sin 2\beta = -(G_1 - G_2) : \sqrt{\Delta} = 1, \quad \cos 2\beta = 0, \quad (47)$$

și deci, utilizînd și (20):

$$\beta = \pi/4, \quad \alpha_1 = \pi/2, \quad \alpha_2 = 0. \quad (48)$$

3° Să presupunem că punctul O este un punct ombilical pe ambele suprafețe (vezi G. Vrănceanu [1], vol. 2, § 15.1), așadar că

$$\rho'_1 = \rho''_1 = \rho_1, \quad \rho'_2 = \rho''_2 = \rho_2. \quad (49)$$

Acesta este de pildă cazul unor corpuri de rotație în jurul normalei comune în O . Poziția reciprocă a axelor este indiferentă, și putem alege $2\alpha = 0$. Din (14) și (25) deducem

$$G_1 = G_2 = 0, \quad \Delta = 0. \quad (50)$$

Pentru a obține soluția, trebuie să folosim direct (22), de unde

$$1/\rho' = 1/\rho'' = H_1 + H_2 = 1/\rho_1 + 1/\rho_2. \quad (51)$$

Poziția axelor Oxy este indiferentă.

4° Formulele de mai sus rămân utilizabile pentru a studia contactul a două sfere. Pentru contactul exterior, rămâne valabilă relația (51). Dacă contactul este interior — fie de exemplu $\rho_2 < 0$ — trebuie să avem $\rho_1 < -\rho_2$, iar (51) ia forma

$$1/\rho' = 1/\rho'' = 1/\rho_1 - 1/|\rho_2|. \quad (52)$$

5° Conform observației de la pag. 672, putem examina în același mod și cazuri în care unul din corpuri este un cilindru. Dacă \mathcal{S}_1 și \mathcal{S}_2 sînt cilindri cu axe paralele, raționamentele din 4° rămîn valabile: este suficient să luăm în (32) și (35)

$$1/\rho_1'' = 1/\rho_2'' = 0. \quad (53)$$

6° Fie că \mathcal{S}_1 este o sferă de rază ρ_1 , iar \mathcal{S}_2 este un cilindru circular de rază ρ_2 . Vom lua drept axe Ox_2 și Oy_2 — generatoarea, respectiv tangenta la cercul paralel în O . Axele Ox_1y_1 pot fi alese arbitrar, astfel că le vom face să coincidă cu Ox_2y_2 . Formulele din 1° rămîn valabile, și avem mai întîi

$$1/\rho_1' = 1/\rho_1'' = 1/\rho_1, \quad 1/\rho_2' = 1/\rho_2, \quad 1/\rho_2'' = 0. \quad (54)$$

În cazul contactului exterior, din (14) urmează

$$G_1 + G_2 = 1/\rho_2 > 0, \quad (55)$$

astfel că din (32) obținem

$$1/\rho' = 1/\rho_1, \quad 1/\rho'' = 1/\rho_1 + 1/\rho_2. \quad (56)$$

În cazul contactului interior (sferă de rază $\rho_1 > 0$ într-un tub cilindric de rază $\rho_2 < 0$), condiția de posibilitate a contactului este $\rho_1 < -\rho_2$. De data aceasta, (55) se înlocuiește cu

$$G_1 + G_2 = 1/\rho_2 < 0, \quad (57)$$

astfel că trebuie să utilizăm formulele (35), de unde urmează

$$1/\rho' = 1/\rho_1 + 1/\rho_2 = 1/\rho_1 - 1/|\rho_2|, \quad 1/\rho'' = 1/\rho_1. \quad (58)$$

După cum se vede, în ambele cazuri avem $\rho' > \rho'' > 0$.

§ 13. PROBLEMA CONTACTULUI ELASTIC FĂRĂ FRECARÉ

a) Condiția la limită. Ecuația integrală a problemei

Să considerăm acum cele două corpuri de frontiere \mathcal{S}_1 și \mathcal{S}_2 raportate la coordonatele $Ox_1y_1z_1$ și $Ox_2y_2z_2$. Să presupunem că frontierele lor sînt de clasă C^1 , așadar forțele ce le fac să intre în contact sînt pentru fiecare din ele echivalente cu cîte o rezultantă dirijată după normala comună în punctul de contact inițial.

Domeniul de contact va fi notat cu \mathcal{D} ; punctele de pe \mathcal{S}_1 , respectiv \mathcal{S}_2 , care în urma deformației coincid, vor fi notate cu x^1 și x^2 , deplasările elastice corespunzătoare vor fi notate cu u^1 și u^2 .

Ca și în problema ștanței, vom neglija valorile pe \mathcal{D} ale componentelor u_1 și u_2 ale deplasării, și ne vom fixa atenția asupra deplasării normale $u_3 \equiv w$. Vom presupune că eventualele deplasări rigide ale celor două corpuri se reduc la niște translații — δ_1 și — δ_2 , paralele cu normala comună în O . Prin urmare, deplasările totale⁶⁾ ale punctelor x^1 și x^2 vor fi egale cu $w_1 - \delta_1$, respectiv $w_2 - \delta_2$.

Întrucît numai puncte aflate pe aceeași verticală intră în contact, abscisele și ordonatele punctelor x^1 și x^2 coincid. După deformație, cotele lor devin

$$z_1^* = z_1 + w_1 - \delta_1, \quad z_2^* = z_2 + w_2 - \delta_2. \quad (1)$$

Distanța dintre punctele x^1 și x^2 devine după deformație

$$z_1^* + z_2^* = z_1 + z_2 + w_1 + w_2 - (\delta_1 + \delta_2). \quad (2)$$

Să introducem notațiile

$$z = z_1 + z_2, \quad \delta = \delta_1 + \delta_2. \quad (3)$$

(De altfel, determinarea separată a cantităților δ_1 și δ_2 nu e nici posibilă, și nu are nici sens mecanic.) Cu aceasta, relația (2) se va scrie

$$z^* = z + w_1 + w_2 - \delta. \quad (4)$$

Dar întrucît în \mathcal{D} avem evident $z^* = 0$, din (4) obținem

$$w_1 + w_2 = \delta - z \text{ în } \mathcal{D}, \quad (5)$$

⁶⁾ Două corpuri deformabile, presate unul asupra celuilalt, suportă deplasări de ansamblu — egale cu o „translație la infinit”, adică în punctele cele mai îndepărtate — peste care se suprapune deplasarea elastică locală. Necesitatea de a considera astfel de translații la infinit provine din faptul că soluția lui Hertz (9.4.35) este regulată la infinit, așadar nu cuprinde nici un termen care să descrie o deplasare de ansamblu.

ceea ce este similar cu (2.17). Ținând acum seama de expresia (12.18) a distanței z , obținem în axele determinate în § 12 :

$$w_1 + w_2 = \delta - \frac{1}{2} x^2/\rho' - \frac{1}{2} y^2/\rho'' \quad \text{în } \mathcal{D}. \quad (6)$$

Să privim acum cele două corpuri în contact ca fiind approximate prin niște semispații elastice — ceea ce este îngăduit în vecinătatea lui \mathcal{D} , dacă $d(\mathcal{D})$ este mic față de razele de curbură. Fiecare din aceste semispații este supus unei sarcini normale *necunoscute*, repartizate pe un domeniu de contact de asemenea *necunoscut*. Dar acest domeniu este *același* pentru ambele semispații; sarcina va fi și ea *aceeași* (în mărime și semn, întrucât axele Oz_1 și Oz_2 sînt opuse).

Se înțelege că acest punct de vedere nu neglijează forma și poziția reciprocă reală a celor două corpuri: căci tocmai acești factori definesc membrul al doilea din condiția la limită (6).

Or, pentru un semispațiu elastic, deducem din (2.10), (2.11)

$$w|_{z=0} = [(1 - \nu)/2\pi\mu] \iint_{\mathcal{D}} [p(\xi, \eta)/\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}] dD. \quad (7)$$

Întrucât constantele elastice ale celor două corpuri sînt în general diferite, vom nota — ca și în (2.14) —

$$\theta_1 = (1 - \nu_1)/2\pi\mu_1, \quad \theta_2 = (1 - \nu_2)/2\pi\mu_2. \quad (8)$$

Întrucât avem $\mathcal{D}_1 \equiv \mathcal{D}_2$ și $p_1(x, y) = p_2(x, y)$, din (7) urmează

$$w_j|_{z=0} = \theta_j \iint_{\mathcal{D}} [p(\xi, \eta)/\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}] dD, \quad j = 1, 2. \quad (9)$$

Introducînd aceste expresii în (6), obținem în definitiv

$$\delta - \frac{1}{2} x^2/\rho' - \frac{1}{2} y^2/\rho'' = (\theta_1 + \theta_2) \iint_{\mathcal{D}} [p(\xi, \eta)/\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}] dD \quad \text{în } \mathcal{D}, \quad (10)$$

ceea ce constituie ecuația integrală a problemei, deplin similară cu (5.2).

b) Ștanța echivalentă și semispațiul echivalent

Soluția problemei de contact se obține deci din cea a problemei ștanței paraboloidale, prin simpla înlocuire a coeficientului θ cu suma $\theta_1 + \theta_2$, și prin introducerea în ecuația integrală a problemei, a coeficienților ρ' , ρ'' din § 12.

Altfel spus, problema contactului elastic este *identică* cu problema penetrației unei ștanțe paraboloidale de configurație caracterizată prin mărimile (12.28) (*ștanța echivalentă*), într-un semispațiu elastic definit prin intermediul constantelor (8) (*semispațiul echivalent*).

Notînd cu H curbura medie în origine a ștanței echivalente, deducem din (12.16) relația

$$H = H_1 + H_2. \quad (11)$$

Pentru coeficientul ei de rotunjire h , căpătăm din (12.28)

$$h = \rho''/\rho' = 1 - 2\sqrt{\Delta}/(H + \sqrt{\Delta}). \quad (12)$$

În fine, din (10) se vede că materialul semispațiului echivalent este caracterizat de coeficientul

$$\theta = \theta_1 + \theta_2. \quad (13)$$

Problema are sens numai dacă $H > 0$ și $0 \leq h \leq 1$ (admițînd și cazul limită $h = 0$). Desigur, aceasta trebuie asigurat prin natura corpurilor în contact.

Introducînd (6.3) în (12.14), căpătăm mai întîi

$$G_1 = [(1-h_1)/(1+h_1)] H_1, \quad G_2 = [(1-h_2)/(1+h_2)] H_2. \quad (14)$$

Introducînd mai departe aceste expresii în (12.25), obținem

$$\Delta = \frac{(1-h_1)^2}{(1+h_1)^2} H_1^2 + 2 \frac{(1-h_1)(1-h_2)}{(1+h_1)(1+h_2)} (\cos 4\alpha) H_1 H_2 + \frac{(1-h_2)^2}{(1+h_2)^2} H_2^2; \quad (15)$$

astfel, intrucît avem $h_1, h_2 \in [0,1]$, conchidem evident că

$$0 \leq \sqrt{\Delta} \leq H. \quad (16)$$

Din (12) urmează acum și $h \in [0,1]$. Desigur, ștanța echivalentă este cu atît mai turtită, cu cît $\sqrt{\Delta}$ este mai apropiat de H . Pentru ca h să depășească o valoare dată h_0 , trebuie să avem

$$\sqrt{\Delta}/H \leq (1-h_0)/(1+h_0), \quad (17)$$

(vezi (12)), ceea ce se poate verifica în fiecare problemă concretă, în funcție de valorile $\rho'_1, \rho''_1, \rho'_2, \rho''_2$ și α cunoscute.

Cu aceasta, rezultatele din §§ 5–8 și 11 se transpun acum cuvînt cu cuvînt pentru problema contactului a două corpuri elastice.

Formulele (5.32) și (5.42)–(5.44) pentru mărimile a_1, a, b, δ rămîn valabile. Rămîne valabilă și relația (7.9) care permite determinarea raportului b/a , precum și toate formulele (7.12)–(7.21). Cele spuse în §§ 7 și 8 relativ la rolul redus al excentricității elipsei de contact, conduc la a afirma acum că soluția problemei contactului a două corpuri elastice depinde de *proprietățile mecanice ale celor două corpuri* — exprimate prin inter-

mediul cantității θ din (13) —, de sarcina totală P , și de suma curburilor medii ale celor două corpuri — exprimată prin intermediul cantității H din (11). Dimpotrivă, ea este *practic independentă de coeficienții de rotunjire* (sau de curburile gaussiene) și de poziția reciprocă a celor două corpuri, exprimate prin intermediul coeficientului de rotunjire h al ștanței echivalente, definit în (12) — atâta timp cât acesta nu este prea mic.

Configurația fiecărui corp în parte (și în particular și forma domeniului de contact) se manifestă prin intermediul expresiei $p(\xi, \eta)$, care păstrează forma (5.5).

Dacă unul din corpuri este rigid, mărimea θ_j corespunzătoare lui este nulă (vezi (8) pentru $\mu_j = \infty$). Dacă unul din corpuri este un semispațiu, atunci avem $H_j = 0$.

Calculule efectuate pentru determinarea deplasărilor și tensiunilor în cazul semispațiului elastic solicitat de o șanță paraboloidală își păstrează valabilitatea în vecinătatea imediată a domeniului de contact — singura porțiune a corpului care ne interesează, dat fiind că fenomenul (vezi § 11) are un caracter puternic localizat. În particular, rămân valabile cele spuse privitor la poziția și solicitarea punctelor celor mai periclitate.

c) Exemplu: contactul dintre roată și șină

Să considerăm schematic problema contactului roții de locomotivă de frontieră \mathcal{S}_2 cu șina de frontieră \mathcal{S}_1 .

Fie că raza roții (roată alergătoare) este de 60 cm, iar raza de curbură a suprafeței șinei — de 30 cm. Ambele corpuri sînt executate din oțel carbon avînd constantele $E \cong 2,15 \cdot 10^6$ kgf/cm² și $\nu \cong 0,3$.

Desigur, avem de utilizat formulele din § 12, c, exemplul 2°. Avem mai întîi

$$1/\rho'_1 = (1/30) \text{ cm}^{-1}, \quad 1/\rho''_1 = 0, \quad 1/\rho'_2 = (1/60) \text{ cm}^{-1}, \quad 1/\rho''_2 = 0, \quad (18)$$

astfel că din (12.14), (12.15) urmează

$$\begin{aligned} H_1 &= -G_1 = (1/60) \text{ cm}^{-1}, \\ H_2 &= -G_2 = (1/120) \text{ cm}^{-1}. \end{aligned} \quad (19)$$

Din (11) și (12.42) obținem acum

$$\begin{aligned} H &= (1/40) \text{ cm}^{-1}, \\ \sqrt{\Delta} &= -(G_1 - G_2) = (1/120) \text{ cm}^{-1}, \end{aligned} \quad (20)$$

și mai departe, din (12.28) sau (12.46):

$$1/\rho' = (1/60) \text{ cm}^{-1}, \quad 1/\rho'' = (1/30) \text{ cm}^{-1}. \quad (21)$$

Din (12) — sau direct din definiția (6.2) — avem de asemenea

$$h = 1/2. \quad (22)$$

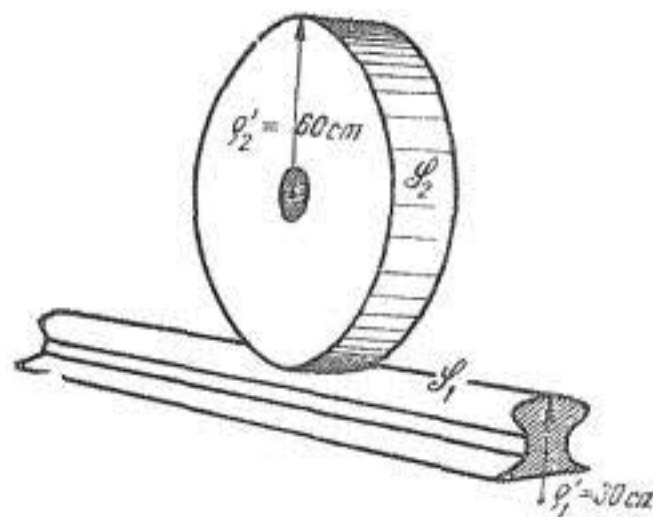


Fig. 10.13.1

Valorile $H = (1/40) \text{ cm}^{-1}$ și $h = 1/2$ caracterizează ștanța echivalentă. Mai departe, din (8) rezultă

$$\theta_1 = \theta_2 = (1 - \nu) / 2\pi\mu = (1 - \nu^2) / \pi E = 1347 \cdot 10^{-10} \text{ cm}^2/\text{kgf}, \quad (23)$$

și deci din (13) căpătăm pentru caracterizarea semispațiului echivalent,

$$\theta = 2694 \cdot 10^{-10} \text{ cm}^2/\text{kgf}. \quad (24)$$

Soluția ecuațiilor lui Hertz se obține folosind tabloul de la pag. 644, de unde pentru $h = f(k) = 1/2$ căpătăm

$$k = 0,776. \quad (25)$$

Valorile $K(k)$ și $E(k)$ se obțin din tabelele de integrale eliptice complete (vezi § 4, pag. 632; nu este recomandabilă o precizie exagerată, date fiind ipotezele simplificatoare pe care se bazează teoria contactului). Obținem

$$K(0,776) = 1,971, \quad E(0,776) = 1,288. \quad (26)$$

Din formulele (5.42)–(5.44) și (5.32) avem pe rînd

$$\begin{aligned} a &= 0,0374 P^{1/3} \text{ cm}, \quad b = 0,0236 P^{1/3} \text{ cm}, \quad D = \pi ab = 0,002773 P^{2/3} \text{ cm}^2, \\ \delta &= 0,0000213 P^{2/3} \text{ cm}, \quad a_1 = 541 P^{1/3} \text{ kgf/cm}^2. \end{aligned} \quad (27)$$

Presiunea pe domeniul de contact este deci cunoscută sub forma

$$p(\xi, \eta) = 541 P^{1/3} \sqrt{1 - \xi^2/a^2 - \eta^2/b^2} \text{ kgf/cm}^2, \quad (28)$$

unde a , b au valorile din (27), iar P se măsoară în kgf.

Cantitățile din (27) pot fi obținute și cu ajutorul formulelor aproximative din § 7—cu toate că avem $k \cong 0,8$. Din (7.9) deducem mai întîi

$$b/a = h^{2/3} = 0,63, \quad (29)$$

astfel că din (7.18) și (7.21) urmează

$$\delta = 0,0000216 P^{2/3} \text{ cm}, \quad a_1 = 553 P^{1/3} \text{ kgf}. \quad (30)$$

Coeficientul a_1 se poate obține și din (7.43), folosind valoarea δ din (30):

$$a_1 = 521 P^{1/3} \text{ kgf}. \quad (31)$$

Formulele (7.41) și (7.42) și aceeași valoare pentru δ dau atunci

$$ab = 0,000916 P^{2/3} \text{ cm}^2. \quad (32)$$

Din (29) și (32) deducem acum

$$a = 0,038 P^{1/3} \text{ cm}, \quad b = 0,024 P^{1/3} \text{ cm}. \quad (33)$$

După cum se vede, erorile comise datorită utilizării formulelor aproximative sînt de ordinul a cel mult 2—3 %, aşadar mult mai mici decît cele ce trebuie să provină din diferitele presupuneri simplificatoare ce stau la baza teoriei contactului.

Luînd $P = 7800$ kgf (de unde $P^{1/3} = 19,83$), obţinem din (27):

$$a = 0,742 \text{ cm}, \quad b = 0,468 \text{ cm}, \quad D = 1,09 \text{ cm}^2, \quad \delta = 0,0084 \text{ cm}, \quad a_1 = 10,730 \text{ kgf/cm}^2. \quad (34)$$

Dimensiunile liniare ale domeniului de contact sînt deci cu adevărat mici faţă de razele de curbură. De asemenea, penetraţia este suficient de mică pentru ca să fie îngăduită scrierea condiţiilor la limită pe suprafaţa *nedeformată* a corpurilor în contact.

Presiunea maximă din (34) este cu mult peste limita de plasticitate a oţelurilor uzuale. Pentru aprecierea rezistenţei şinei şi a roţii trebuie folosită formula (11.1). Faptul că diferenţa $\sigma_3 - \sigma_2$ atinge $6\,500$ kgf/cm² la o adîncime de 2—4 mm, arată că deformarea plastică este inevitabilă.

OBSERVAŢIE. Problema—de mare importanţă practică—a contactului dintre roată şi şină, a fost de repetate ori examinată: N. Beliaev [3]; H. Poritsky [1] (cu rezultate apropiate de cele ale lui Beliaev); Z. Rudakov [1]; G. Filonenko [1] (cu o evaluare aproximativă a efectelor dinamice, care rezultă a fi considerabile).

d) Exemplu: bula elastică pe un semispaţiu rigid

Să considerăm o bulă de oţel de frontieră \mathcal{S}_1 aşezată pe un semispaţiu rigid de frontieră \mathcal{S}_2 ; contactul are loc sub acţiunea greutăţii proprii a bulei. Pentru acelaşi material ca în exemplul c, avem deci

$$\theta_1 = 1347 \cdot 10^{-10} \text{ cm}^2/\text{kgf}, \quad \theta_2 = 0. \quad (35)$$

Luînd pentru greutatea specifică a oţelului valoarea de $7,8 \cdot 10^{-3}$ kgf/cm³, obţinem

$$P = 32,7 \cdot 10^{-3} R^3 \text{ kgf}, \quad (36)$$

raza R a bulei fiind exprimată în centimetri. Mai departe, avem

$$H_1 = 1/R, \quad H_2 = 0, \quad H = 1/R, \quad h = 1, \quad k = 0, \quad (37)$$

şi deci din (5.42), (5.44) şi (5.32) urmează

$$a = b = 2,18 \cdot 10^{-3} R^{1/3} \text{ cm}, \quad \delta = 4,76 \cdot 10^{-6} R^{1/3} \text{ cm}, \quad a_1 = 3\,310 R^{1/3} \text{ kgf/cm}^2. \quad (38)$$

Dimensiunile liniare ale domeniului \mathcal{D} cresc mai repede decît raza bulei, astfel că pentru valori mari ale lui R , teoria contactului elastic nu mai poate fi aplicată. Raportul a/R are valoarea $1/100$ pentru $R \cong 1$ m (aşadar $P \cong 33$ t), şi scade pînă la $1/10$ pentru $R \cong 1$ km. Cazurile realizabile în practică sînt deci cu siguranţă cuprinse în domeniul de valabilitate al teoriei contactului elastic. De altfel, pentru $R \geq 40$ cm, avem deja $a_1 \geq 11\,000$ kgf/cm².

§ 14. DESPRE ALTE METODE ȘI PROBLEME

Vom da aci unele indicații privitoare la problema ștanței pentru configurații diferite de cele considerate în §§ 4 și 5, pentru anumite cazuri particulare de astfel de configurații, precum și pentru alte proprietăți mecanice ale suprafețelor în contact.

Raționamentele de pînă aci sînt formal valabile oricare ar fi valorile constantelor ρ' , ρ'' . Dar cazul unor constante ρ' , ρ'' foarte mici cer un studiu aparte; punctul de contact inițial are caracterul unui „virf”, dimensiunile lui \mathcal{D} nu sînt mici față de ρ' , ρ'' , și problema se apropie de cea a unei ștanțe conice. Această din urmă problemă a fost rezolvată de A. Love [3] și — prin alte metode — de A. Lurie [4], § 5.7, și I. Sneddon [1], § 10.52.

Fie acum că una din constantele ρ' , ρ'' este foarte mare. Întrucît avem $\rho'' \leq \rho'$, din tabloul de la pag. 644 urmează $k \cong 1$, și deci $b \ll a$. Prin urmare, nici în acest caz domeniul de contact nu va avea dimensiuni mici în raport cu razele de curbura. Pentru $1/\rho' \rightarrow 0$, acțiunea ștanței echivalează în primă aproximație cu cea a unui cilindru parabolic, de curbă directoare

$$Z = \frac{1}{2} y^2 / \rho''. \quad (1)$$

Acest cilindru intră în contact cu semispațiul în lungul unei generatoare. Domeniul de contact este alungit și îngust, iar lungimea sa nu poate fi determinată. Astfel de ștanțe au fost studiate de A. Dinnik [1] și N. Beliaev [3]. Punctele cele mai solicitate se găsesc la adîncimea $z = 0,78 b$ (cu tensiuni tangențiale ce variază foarte puțin între $0,7 - 1,1 t$), unde $2b$ este lățimea domeniului de contact. (Rezultatul este similar celui de la pag. 666 pentru domenii de contact eliptice; aceasta se vede ușor dacă înlocuim acolo pe a prin $b/\sqrt{1-k^2}$.) Presiunea maximă este $a_1 = 2P/\pi b$ (unde P este sarcina pe unitatea de lungime pe linia de contact inițial), iar tensiunea tangențială maximală este aproximativ egală cu $0,32 a_1$. Criteriul de rezistență are deci aceeași formă ca în (11.1).

Contactul cilindrilor este studiat ca problemă plană de către L. Galin [4], capitolul 1 (cu o analiză detaliată a lucrărilor privitoare la această chestiune); S. Mihlin [1], §§ 68—71; N. Mushelishvili [5], capitolul 6; I. Ștaerman [1], capitolul 2 (continuat de B. Romalis [2]), și [2]. Menționăm aci dificultatea de a se determina deplasările și penetrația δ . Această dificultate poate fi pusă în legătură cu observațiile din § 7.10 asupra soluției lui Kelvin și Somigliana. Pentru determinarea lui δ , vezi de exemplu I. S. Rabinovici [1]; Tsu Tao Loo [1]. Pentru anumite chestiuni speciale, vezi M. Dlugaci [1], capitolul 4; A. Kalandia [2], [3]; I. S. Rabinovici [2]; B. Romalis [1].

Condiția $1/\rho' = 0$ nu echivalează însă cu (1). Într-adevăr, problema poate fi studiată reținîndu-se în $Z = \varphi(X, Y)$ termeni de ordin superior. (Termeni de ordin impar nu pot apare: în acest caz ștanța n-ar fi exterioară semispațiului.)

Dacă ambele cantități ρ' , ρ'' sînt foarte mari, sîntem conduși la problema contactului de ordin superior: distanța dintre ștanță și semispațiu este un infinit mic de ordin de mărime superior ordinului 2. Ecuația (5.4) se înlocuiește cu o ecuație în care în membrul al doilea apar termeni de grad 4. Această problemă a fost abordată de I. Ștaerman [1], § 4.3 (fără determinarea stării elastice în semispațiu); vezi și H. Deresiewicz [6].

Problema contactului poate fi mai ușor studiată pentru o ștanță de rotație. A. Lurie [4], §§ 5.4—5.7, rezolvă complet problema ștanței cu bază circulară plană, problema contac-

tului de ordin 2 și superior, și problema ștanței conice. De remarcat că odată cu creșterea ordinului contactului, punctul de presiune maximă se deplasează către periferia discului de contact. Aceleași probleme au fost tratate de către I. Sneddon [1], § 10.52, prin intermediul unor anumite ecuații integrale duale și al transformării lui Mellin. Vezi încă lucrarea inițială a lui V. Abramov [1]. Dintre lucrările mai recente, vezi E. Deutsch [7]; I. Sneddon [4]; I. Ufliand [2], părțile III și IV.

În ultimul deceniu, problema de contact a fost intens studiată de către V. Dovnorovici [1] (ștanțe definite de funcții polinomiale, aplicații ale metodei lui Ritz); K. Egorov [1], V. Gubenko [2]—[4], V. Gubenko și V. Mosakovskii [1] (domeniu de contact în formă de coroană circulară); V. Gubenko [1] (tehnica diferențierii fracționare; vezi și N. Rostovțev [5]); V. Mosakovskii și V. Gubenko [1] (echivalență între problemele plane și cele pentru ștanța cu bază plană circulară); M. Leonov [1], [2] și G. Popov [1], [2] (domeniu de contact circular); L. Payne [1] (simetrie axială); N. Rostovțev [1]—[4] (probleme plane și axial simetrice). Unele din aceste rezultate se referă la cazul sarcinii *excentrice*.

O atenție sporită se acordă problemei *contactului cu frecare* (tensiuni normale și tangențiale în \mathcal{D}). Dacă legea de frecare este cea a lui Coulomb, se vede ușor că în \mathcal{D} trebuie să existe porțiuni în care punctele celor două suprafețe sînt *antrenate* împreună în deformare, și porțiuni în care suprafețele *alunecă* una pe cealaltă. Determinarea liniei de separație între aceste porțiuni pune probleme extrem de dificile. Cu referire la acest cerc de idei, menționăm mai întâi lucrarea de pionierat a lui E. Reissner și H. Sagocci [1]; a se vedea apoi G. Cattaneo [1], [2]; H. Deresiewicz [1], [2]; E. Deutsch [8]; L. Goodman [1]; V. Gubenko [4]; M. Hetenyi și P. MacDonald [1]; I. Kizina și D. Grilikii [1]; J. Lubkin [1]; R. Mindlin [3]; R. Mindlin și H. Deresiewicz [1]; V. Mosakovskii [3], [7]; V. Mosakovskii și N. Fotieva [1]; V. Mosakovskii et al. [1]; M. Pacelli [1], [2]; A. de Pater [1]; N. Rostovțev [3]; J. Smith și Chang Ken Lin [1]; I. Ufliand [1]; P. Vermeulen și K. Johnson [1]; W. Wernitz [1]. Menționăm în mod special aplicațiile metodelor operaționale, aparținînd lui R. Muki [2], I. Sneddon [3], I. Ufliand [2] (cap. 7—12).

Printre problemele referitoare la unele corpuri de configurație specială, vezi V. Alexandrov [1]; B. Abramian et al. [1]; N. Arutiunian și B. Abramian [2].

Pentru cazul corpurilor neomogene, a se vedea cu titlu de exemplu V. Mosakovskii [6].

Lucrări ca cele ale lui N. Kilcevskii [4], [5] și E. Kostiuk [1] prezintă metode de studiu bazate pe utilizarea calculatoarelor electronice.

Printre cercetările cu caracter experimental, vezi de exemplu L. Dobrovolskii și V. Koptov [1], [2]; W. Goldsmith și P. Lyman [1]; A. Orlov și S. Pineghin [1].

Problemele de contact referitoare la *stratul elastic* sînt abordate de către V. Alexandrov [1], [2]; V. Alexandrov și V. Babeșko [1]; L. Keer [1], [2]; I. Ufliand [2]. Vezi încă și B. Korenev [3] (aplicații la problema plăcilor pe fundație elastică) și D. Șerman [8], § 3.3.

Pentru problema *dinamică* a contactului — oscilații întreținute sau nu — și pentru problema șocului corpurilor elastice, vezi N. Borodacev [1], [2], [4]; A. Dinnik [1] (cap. 4, 5 și 9); W. Goldsmith [1]; N. Kilcevskii [1]; I. Metelitin [1]; M. Mișicu [4]; V. Zakorko și N. Rostovțev [1].

Problema contactului pentru corpuri care nu sînt elastice este studiată într-un mare număr de lucrări. Cităm aci, cu titlu de exemplu, G. Graham [1] (corpuri visco-elastice); N. Kilcevskii și V. Boiko [1] (zone plastice); M. Predeleanu [1] (fluaaj); R. Shield și D. Drucker [1] (sarcini-limită).

ANEXĂ

Vom aminti aici — în genere fără demonstrații — anumite elemente de analiză și de teoria funcțiilor complexe. Unele rezultate (în particular cele utilizate cu titlu de exemplu în cap. 5 și 6) vor fi expuse în detaliu. Altele vor fi numai schițate, pentru a sugera cel puțin temeiul anumitor calcule și raționamente.

Adesea vom da enunțurile în condiții mai restrictive, urmărind nu rigoarea formulării (pentru teorii al căror loc nu e să fie studiat aici), ci sesizarea fenomenului matematic.

Ca bibliografie generală pentru §§ 4—11 recomandăm: L. Ahlfors [1]; A. Markușevici [1]; I. Privalov [2]; V. Smirnov [2], volumul 3, partea 2; S. Stoilov [1]; G. Valiron [1], capitolele 12—15. Un bogat material asupra teoriei funcțiilor complexe cu aplicații la problemele mecanicii este dat de C. Iacob [5], capitolele 1—3, și M. Lavrentiev și V. Șabat [1].

§ 1. FUNCȚII DE O VARIABILĂ

a) Clase de funcții

Date fiind două numere reale $a < b$, mulțimea numerelor r cu proprietatea $a \leq r \leq b$ poartă numele de *interval închis* (sau *segment*) și se notează $[a, b]$. Mulțimea numerelor r cu proprietatea $a < r < b$ se numește *interval deschis* și se notează $]a, b[$.

Notăția $r \in [a, b]$ înseamnă „ r aparține intervalului $[a, b]$ ”.

O funcție (reală sau complexă) $f(r)$ se numește *continuă* în $r_0 \in [a, b]$ dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există un număr $\delta(\varepsilon, r_0)$ astfel încât

$$|f(r) - f(r_0)| < \varepsilon \text{ pentru } |r - r_0| < \delta(\varepsilon, r_0) \quad (1)$$

(așadar, dacă diferența $f(r) - f(r_0)$ tinde la zero odată cu $r - r_0$).

Dacă limitele din membrul al doilea există, atunci se notează

$$f(r_0 + 0) = \lim_{r \rightarrow r_0, r > r_0} f(r), \quad f(r_0 - 0) = \lim_{r \rightarrow r_0, r < r_0} f(r). \quad (2)$$

Condiția necesară și suficientă pentru ca $f(r)$ să fie continuă în $r_0 \in [a, b]$ este ca limitele din (2) să existe, să fie finite, egale, și egale cu $f(r_0)$:

$$f(r_0 - 0) = f(r_0 + 0) = f(r_0). \quad (3)$$

Orice punct în care funcția $f(r)$ nu este continuă, se numește *punct de discontinuitate*. Un punct în care limitele din (2) există, sînt finite, dar nu verifică (3), se numește *punct de discontinuitate de prima speță*.

Dacă $f(r)$ este continuă în toate punctele intervalului $[a, b]$, ea se zice a fi *continuă pe $[a, b]$* . (Tot astfel, pe $]a, b[$.) Mulțimea funcțiilor continue pe $[a, b]$ poartă numele de *clasa $C^0[a, b]$* (sau pe scurt *clasa C^0* , dacă intervalul se subînțelege).

Dacă numărul δ din (1) este *independent* de r_0 , funcția este *uniform continuă* în $[a, b]$. Orice funcție uniform continuă este și continuă. (Reciproca este valabilă numai pentru funcții continue într-un interval închis și mărginit.)

Dacă există un număr $\delta(\varepsilon)$ astfel că pentru orice sistem *fini*t de intervale $[a_i, b_i]$ disjuncte (fără puncte comune) din $[a, b]$ avem

$$\sum_{i=1}^p |f(a_i) - f(b_i)| < \varepsilon \quad \text{pentru} \quad \sum_{i=1}^p |a_i - b_i| < \delta(\varepsilon), \quad (4)$$

atunci funcția $f(r)$ este *absolut continuă*. Orice funcție absolut continuă este și uniform continuă (nu și reciproc!).

Noțiunile de continuitate uniformă și absolută nu precizează natura dependenței dintre mărimile ε și δ , adică dintre valorile $r - r_0$ și valorile $f(r) - f(r_0)$. Cel mai simplu tip de legătură între acestea este dat de condiția ca să existe un număr $\mu > 0$, astfel încît pentru oricare $r_1, r_2 \in [a, b]$, raportul

$$|f(r_1) - f(r_2)| : |r_1 - r_2|^\mu \quad (5)$$

să fie mărginit. Dacă (5) este mărginit pentru un anumit μ , el rămîne mărginit pentru orice $\nu < \mu$. Pornind de aci, se spune că $f(r)$ satisface în $[a, b]$ *condiția lui Hölder*¹⁾ (sau este *hölderiană*) de exponent μ , dacă există două constante $\mu > 0$, $H > 0$, așa ca

$$|f(r_1) - f(r_2)| \leq H |r_1 - r_2|^\mu \quad \text{pentru} \quad r_1, r_2 \in [a, b] \quad (6)$$

(adică $f(r_1) - f(r_2)$ tinde spre zero *cel puțin tot atît de repede* ca $|r_1 - r_2|^\mu$).

Dacă această condiție este satisfăcută pentru r_2 arbitrar, dar r_1 fix, se spune că $f(r)$ este *hölderiană în punctul r_1* (relativ la $[a, b]$).

μ este *cel mai mare* exponent, iar H , *cea mai mică* constantă pentru care condiția (6) este satisfăcută. Rolul esențial îl joacă aci μ , de existența căreia depinde faptul dacă raportul (5) este mărginit sau nu; valoarea acestei margini poate fi modificată prin înmulțirea funcției cu o constantă.

Orice funcție hölderiană este continuă: pentru $\delta \leq (\varepsilon/H)^{1/\mu}$, condiția (1) rezultă îndeplinită. Este deci firesc ca clasa funcțiilor hölderiene să

¹⁾ Întrucît pentru $\mu = 1$ această condiție a fost inițial considerată de către R. Lipschitz, ea este ades numită *condiția lui Lipschitz de ordin μ* .

fie notată C_μ^0 . (Valoarea $\mu = 0$ trebuie exclusă, întrucât în acest caz (6) atrage după sine numai mărginirea funcției.) Reciproca nu este adevărată.

Funcția $f(r)$ se numește *derivabilă* dacă raportul

$$[f(r) - f(r_0)] : [r - r_0] \quad (7)$$

are o limită finită pentru $r \rightarrow r_0$. Această limită se notează $f'(r)$.

Dacă $f(r)$ este derivabilă și cu derivată mărginită (în particular, continuă) pe $[a, b]$, din teorema creșterilor finite rezultă că ea aparține clasei C_1^0 . Există însă funcții în C_1^0 care nu sînt totuși derivabile: acesta este de pildă cazul funcției $f(r) = |r|$ în orice interval ce conține originea.

Funcțiile din clasa C_1^0 posedă însă o proprietate importantă: ele sînt absolut continue. (Reciproca nu este adevărată.) O funcție derivabilă cu derivată mărginită (în particular, continuă) este deci absolut continuă.

Dacă $\mu > 1$, din (6) rezultă că $f'(r) \equiv 0$, așadar $f(r) = \text{const.}$ Eliminînd acest caz banal, se ia întotdeauna $0 < \mu \leq 1$.

În definitiv, condiția lui Hölder poate fi privită ca o proprietate *intermediară* între cea de continuitate și cea de derivabilitate (cu prima derivată continuă).

Funcțiile pentru care $f'(r) \in C^0[a, b]$ se numesc *netede*.

În general, se notează cu $C_\mu^p[a, b]$ (sau C_μ^p , dacă intervalul se subînțelege) clasa funcțiilor de p ori derivabile și pentru care $f^{(p)}(r) \in C_\mu^0[a, b]$.

Ținînd seama de cele de mai sus, avem evident

$$C^{p+1} \subset C_\mu^p \subset C_\nu^p \subset C^p \text{ pentru } 0 < \nu < \mu \leq 1,$$

unde $C^{p+1} \neq C_1^p$, și $C_\nu^p \neq C^p$ pentru orice $\nu > 0$. (Semnul „ \subset ” — incluziune — arată că termenul din membrul întîi este o parte a celui din membrul al doilea.)

Dacă $f(r)$ este definită în $[a, b]$ și acest interval poate fi împărțit într-un număr finit de subintervale în care $f(r)$ aparține unei anumite clase C_μ^p vom spune că $f(r)$ aparține clasei C_μ^p *pe porțiuni*. Vom avea astfel de-a face cu funcții continue pe porțiuni, netede pe porțiuni etc.

O funcție se numește *cu variație mărginită* pe $[a, b]$ dacă, considerînd o diviziune d oarecare: $a = r_0 < r_1 < \dots < r_{i-1} < r_i < \dots < r_n = b$ a intervalului $[a, b]$, și formînd suma

$$v = \sum_{i=1}^n |f(r_i) - f(r_{i-1})|, \quad (8)$$

mulțimea valorilor v pentru toate diviziunile posibile ale lui $[a, b]$ este mărginită. În acest caz, există o margine superioară strictă, care se numește *variație totală* a funcției. Clasa acestor funcții se notează $V[a, b]$, sau pe scurt V .

Funcțiile cu variație mărginită posedă proprietăți importante. Astfel, orice funcție cu variație mărginită este diferența a două funcții monoton crescătoare. De aci se deduce că orice funcție cu variație mărginită este continuă, abstracție făcând cel mult de o mulțime cel mult numerabilă de puncte de discontinuitate de prima speță.

Există funcții continue (și chiar derivabile) care *nu sînt* cu variație mărginită.

Funcțiile absolut continue (în particular deci, funcțiile de clasă C_1^0) sînt însă cu variație mărginită. (Reciproca nu este adevărată.)

Prin urmare, *orice rezultate pentru $f \in V$ rămîn valabile pentru funcțiile absolut continue; mai particular, pentru $f \in C_1^0$; mai particular încă, pentru funcțiile derivabile cu derivata mărginită; mai particular în fine, pentru $f \in C^1$.*

De asemenea, ele sînt valabile pentru funcțiile ce satisfac *condițiile lui Dirichlet*: funcții continue (afară de un număr finit de discontinuități de prima speță) și al căror interval de definiție poate fi împărțit într-un număr finit de subintervale în care funcția este monotonă. (O funcție monotonă pe porțiuni este evident cu variație mărginită.) Mai particular, ele rămîn valabile pentru funcțiile continue (afară de un număr finit de discontinuități de prima speță) cu un număr finit de maxime și minime în intervalul de definiție.

Pe viitor, cînd un rezultat va fi formulat pentru $f \in V$, nu vom mai sublinia toate aceste categorii de funcții pentru care el rămîne în particular valabil.

Definițiile de mai sus pot fi convenabil extinse și asupra funcțiilor de mai multe variabile. (Vezi de ex. M. Nicolescu et al. [1], vol. 1, cap. 8.)

b) Integrale

Trecînd la proprietățile integrale ale funcțiilor, precizăm că în general, vom face uz de *integrala în sensul lui Riemann*.

Să considerăm toate diviziunile posibile d ale unui interval $[a, b]$ și să considerăm *norma* $\nu(d) = \max (r_i - r_{i-1})$ a acestei diviziuni. O funcție $f(r)$ se numește *integrabilă* pe $[a, b]$, dacă există un număr I cu proprietatea ca pentru orice $\varepsilon > 0$, să existe $\delta(\varepsilon) > 0$, astfel ca pentru orice diviziune de normă $\nu(d) < \delta(\varepsilon)$ și pentru orice puncte $\rho_i \in [r_{i-1}, r_i]$, să avem

$$\left| I - \sum_{i=1}^n f(\rho_i) (r_i - r_{i-1}) \right| < \varepsilon. \quad (9)$$

Numărul I se numește *integrala definită* a funcției $f(r)$ de la a la b :

$$I = \int_a^b f(r) \, dr. \quad (10)$$

O funcție al cărei *modul* este integrabil, se numește *absolut integrabilă* pe $[a, b]$. Orice funcție integrabilă pe un interval mărginit este totodată mărginită și absolut integrabilă. Reciproca nu este adevărată.

Condiții suficiente de integrabilitate sînt: $f(r) \in V[a, b]$ sau $f(r) \in C^0[a, b]$ pe porțiuni (cel mult cu discontinuități de speța întâia).

Ca funcție de limita sa superioară, integrala definită este o funcție continuă și cu variație mărginită. În punctele de continuitate ale lui $f(r)$, avem

$$\frac{d}{dr} \int_{r_0}^r f(r) dr = f(r). \quad (11)$$

Dacă intervalul de integrare este infinit, sau dacă $f(r)$ nu este mărginită, avem de-a face cu *integrale improprii*, a căror valoare — în anumite împrejurări — poate fi definită prin procese de trecere la limită convenabile.

Pentru chestiunile amintite în acest paragraf, vezi M. Nicolescu et al. [1]; G. Valiron [1], §§ 3.26—3.31; §§ 3.35—3.38; §§ 4.42—4.47; §§ 4.54—4.58; capitolul 5; M. Zamansky [1], capitolele 7, 10 și 13.

§2. DISTRIBUȚII DE O VARIABILĂ

Să începem prin a aminti noțiunea de *funcțională*: o lege de corespondență de la o mulțime de *funcții* (domeniul ei de definiție), la o mulțime de *numere* — reale sau complexe — (codomeniul, sau domeniul valorilor funcționalei).

O funcțională \mathfrak{F} se numește *omogenă* și *aditivă*, dacă pentru orice pereche de funcții f_1, f_2 și orice pereche de numere a_1, a_2 avem

$$\mathfrak{F}(a_1 f_1 + a_2 f_2) = a_1 \mathfrak{F}(f_1) + a_2 \mathfrak{F}(f_2), \quad (1)$$

(desigur, dacă ambii membri din (1) au sens).

Mai departe, \mathfrak{F} se numește *continuă* dacă pentru orice șir de funcții din domeniul ei de definiție $f_n(r)$ ce tind către $f(r)$, avem

$$\lim \mathfrak{F}(f_n) = \mathfrak{F}(f) = \mathfrak{F}(\lim f_n). \quad (2)$$

(Evident, aceasta implică în prealabil definirea noțiunii de limită.)

O funcțională omogenă, aditivă și continuă, se numește *funcțională liniară*.

Două funcționale sînt *egale*, dacă posedă același domeniu de definiție și au același efect asupra tuturor funcțiilor din el.

Pentru orice pereche de funcții reale integrabile f, g definite în $] - \infty, \infty [$, se poate considera numărul, numit *produsul lor scalar*:

$$\langle f, g \rangle = \int f(r) g(r) dr \quad (3)$$

(limitele de integrare infinite vor fi subînțelese). Pentru $g(r)$ dat, relația (3) pune în corespondență oricărei funcții $f(r)$ numărul $\langle f, g \rangle$. Se verifică ușor că aceasta este o funcțională liniară.

Asemenea cu (3), se poate considera și funcția, numită *produsul de convoluție* al lui $f(r)$ cu $g(r)$:

$$h(r) = f(r) * g(r) = \int f(\rho) g(r - \rho) d\rho. \quad (4)$$

Este evident că convoluția este o operație comutativă și asociativă.

Aceste noțiuni conduc la generalizări importante, dacă plecăm nu de la integralele din (3), (4), ci direct de la ideea de funcțională.

Pentru aceasta, să considerăm funcționala care pune în corespondență fiecărei funcții $\varphi(r)$, valoarea ei în originea $r = 0$:

$$\varphi(r) \Rightarrow \varphi(0). \quad (5)$$

Se verifică ușor că această funcțională este liniară. Dacă ea ar putea fi scrisă sub forma (3), ar trebui să existe o funcție $\delta(r)$ așa încît

$$\langle \delta, \varphi \rangle = \int \delta(r) \varphi(r) dr = \varphi(0). \quad (6)$$

Or, se poate demonstra că *nu există nici o funcție integrabilă* $\delta(r)$ care să verifice (6), astfel că această relație poate fi gîndită numai ca o transcriere formală a relației (5).

Să considerăm acum mulțimea \mathcal{K} a funcțiilor indefinit derivabile și identic nule în afara unui anumit interval finit (eventual altul pentru fiecare din ele). Acestea se numesc *funcții fundamentale*; funcționalele liniare definite în \mathcal{K} se numesc *distribuții* (sau *funcții generalizate*), iar mulțimea lor se notează \mathcal{K}' .

Prin urmare, (5) definește o distribuție, care nu poate fi redusă la o funcție propriu zisă; ea se numește *funcția delta* — cu toate că în fapt nu este o funcție.

Funcția $\delta(r)$ poate fi introdusă și cu ajutorul unor *funcții de tip delta* $\delta_n(r)$, care sînt absolut integrabile și verifică — pentru orice numere reale a, b — relațiile

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \delta_n(r) dr = \begin{cases} 1 & \text{dacă } 0 \in]a, b[, \\ 0 & \text{dacă } 0 \notin]a, b[. \end{cases} \quad (7)$$

Limita oricărui astfel de șir de funcții este tocmai $\delta(r)$, care poate fi deci privită ca fiind (euristic) definită de proprietățile (în fond contradictorii)

$$\delta(r) = 0 \text{ pentru } r \neq 0; \quad \delta(0) = \infty; \quad \int \delta(r) dr = 1. \quad (8)$$

Prin urmare, funcția $\delta(r)$ definită de (5) este tocmai *funcția delta a lui Dirac*, de uz frecvent în fizica teoretică.

Dacă vom interpreta funcțiile „obișnuite” ca descriind acțiunea unor factori mecanici sau fizici repartizați, (8) poate fi înțeleasă în schimb ca descrierea unei acțiuni *concentrate*, aplicate în originea O . Întrucît nu există nici o funcție integrabilă cu proprietățile (6) sau (8), aceasta poate fi privit numai ca un drum euristic, conducînd la descrierea acțiunilor concentrate, prin distribuții.

Mai departe, dacă o funcție $g(r)$ descrie efectul în r al unei anumite acțiuni în origine, și dacă $f(r)$ este un factor de proporționalitate, care evaluează intensitatea acțiunii g — este vizibil că produsul de convoluție este apt să descrie *superpoziția* de astfel de acțiuni, fiecare cu intensitatea ei, dacă efectul depinde numai de distanța $r - \rho$.

Cu ajutorul relațiilor (5), (6), putem considera și funcția $\delta(r - \rho)$, care pentru orice $\varphi \in \mathcal{K}$ posedă proprietatea

$$\langle \delta(r - \rho), \varphi(r) \rangle = \varphi(\rho), \quad (9)$$

ceea ce se poate scrie și sub forma

$$\delta * \varphi = \varphi. \quad (10)$$

Pentru orice $f, g \in \mathcal{K}$ avem ușor (întrucît derivatele există)

$$\langle f', g \rangle = f g \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f g' dr = \langle f, -g' \rangle. \quad (11)$$

Aceasta permite să se *definească* derivarea într-un sens generalizat, chiar dacă f, g nu mai sînt funcții fundamentale. În particular, pentru orice $\varphi \in \mathcal{K}$ avem :

$$\langle f', \varphi \rangle = \langle f, -\varphi' \rangle, \quad (12)$$

astfel că derivata de orice ordin a oricărei distribuții $f \in \mathcal{K}'$ (inclusiv, de pildă, a funcției δ) are sens.

Se poate arăta că operația de derivare este o operație *continuă* în \mathcal{K}' (și chiar și în mulțimi mai largi de distribuții). De exemplu, pentru funcția lui Heaviside (care nu aparține lui \mathcal{K}) :

$$H(r) = \begin{cases} 0 & \text{pentru } r < 0, \\ 1 & \text{pentru } r > 0, \end{cases} \quad (13)$$

se găsește ușor

$$[H(r)]' = \delta(r). \quad (14)$$

Regulile obișnuite de derivare (pentru sume, produse etc.) rămîn valabile. De exemplu se obține ușor

$$[r H(r)]' = r \delta(r) + H(r).$$

Dar întrucât avem

$$rH(r) = \begin{cases} 0 & \text{pentru } r < 0, \\ r & \text{pentru } r > 0, \end{cases}$$

rezultă imediat $[rH(r)]' = \underline{H}(r)$, astfel că egalitatea de mai sus dă

$$r\delta(r) = 0. \quad (15)$$

Același rezultat se poate obține remarcând că

$$\langle r\delta(r), \varphi(r) \rangle = \langle \delta(r), r\varphi(r) \rangle = [r\varphi(r)]|_{r=0} = 0, \quad (16)$$

așadar că efectul „funcției” $r\delta(r)$ asupra oricărei funcții fundamentale este același cu efectul funcționalei „zero”, care face să corespundă oricărei funcții fundamentale, numărul zero.

Pentru trei funcții, $f, g, \varphi \in \mathcal{K}$, dacă punem $h = f * g$ (vezi (4)) avem

$$\begin{aligned} \langle h, \varphi \rangle &= \int h(r) \varphi(r) dr = \int \left[\int f(\rho) g(r - \rho) d\rho \right] \varphi(r) dr = \\ &= \iint f(\rho) g(R) \varphi(R + \rho) d\rho dR, \end{aligned} \quad (17)$$

ceea ce sugerează să se definească convoluția a două distribuții prin intermediul a două operații succesive :

$$\langle f * g, \varphi \rangle = \langle g(R), \langle f(\rho), \varphi(R + \rho) \rangle \rangle. \quad (18)$$

Convoluția $f * g$ în \mathcal{K}' este de asemenea comutativă și asociativă.

Pentru convoluția $\delta * f$, unde $f \in \mathcal{K}'$, avem succesiv

$$\langle \delta * f, \varphi \rangle = \langle f(R), \langle \delta(\rho), \varphi(R + \rho) \rangle \rangle = \langle f(R), \varphi(R) \rangle,$$

astfel că distribuția $\delta * f$ are același efect asupra oricărei funcții din \mathcal{K} , ca și funcția f , și deci

$$\delta * f = f. \quad (19)$$

În mod similar, avem

$$\begin{aligned} \langle \delta' * f, \varphi \rangle &= \langle f(R), \langle \delta'(\rho), \varphi(R + \rho) \rangle \rangle = \langle f(R), \langle \delta(\rho), \\ &\quad -\varphi'(R + \rho) \rangle \rangle = \langle f(R), -\varphi'(R) \rangle = \langle f'(R), \varphi(R) \rangle, \end{aligned}$$

ceea ce înseamnă că

$$\delta' * f = f'. \quad (20)$$

Notînd cu \mathfrak{D} un operator diferențial liniar cu coeficienți constanți, deducem din (20)

$$\mathfrak{D} \delta * f = \mathfrak{D} f. \quad (21)$$

Să calculăm acum produsul scalar

$$\begin{aligned} \langle (f * g)', \varphi \rangle &= \langle f * g, -\varphi' \rangle = \langle g(R), \langle f(\rho), -\varphi'(R + \rho) \rangle \rangle = \\ &= \langle g(R), \langle f'(\rho), \varphi(R + \rho) \rangle \rangle = \langle f' * g, \varphi \rangle. \end{aligned}$$

Ținînd seama și de comutativitate, aceasta conduce la egalitatea

$$(f * g)' = f' * g = f * g'. \quad (22)$$

Această relație poate fi evident generalizată sub forma

$$\mathfrak{D}(f * g) = \mathfrak{D}f * g = f * \mathfrak{D}g. \quad (23)$$

Relațiile (22) pot fi privite ca fiind de același tip cu formulele de derivare în raport cu un parametru sub semnul integrală.

Cele de mai sus pot fi extinse pentru funcții de mai multe variabile. Astfel, $\delta(x, y)$ este funcționala care acționează după formula

$$\langle \delta(x, y), \varphi(x, y) \rangle = \varphi(0, 0). \quad (24)$$

O definiție euristică a acestei funcționale poate fi dată asemănător cu cea din (8); ea poate fi de asemenea înțeleasă ca descriind o anumită acțiune concentrată în plan printr-un proces de trecere la limită pentru șiruri de funcții de tip delta de două variabile, asemenea cu (7).

Pentru un studiu detaliat al teoriei distribuțiilor, vezi L. Schwartz [1], [2] (mai ales cap. 2 și 3); I. Ghelfand și G. Șilov [1] (pentru primele noțiuni, în special vol. 1, cap. 1 și 3). Pentru o introducere euristică simplă, vezi I. Sneddon [1], § 1.4. Funcția δ este amănunțit studiată (inclusiv indicații cu caracter istoric) de B. van der Pol și H. Bremmer [1], capitolul 5. Pentru unele aplicații importante, vezi H. Carslaw și J. Jaeger [1], capitolul 11. Vezi de asemenea R. Courant [1], capitolul 6, anexă; R. Cristescu și Gh. Marinescu [1]; A. Erdelyi [1].

§ 3. DOMENII ȘI FUNCȚII DE PUNCT ÎN PLAN

Pentru majoritatea noțiunilor fundamentale privind mulțimile de puncte din plan, a se vedea de exemplu N. Luzin [1]; M. Nicolescu et al. [1], volumul 2, capitolele 7 și 16; G. Valiron [1], §§ 1.15—1.16; M. Zamansky [1], capitolele 8—12.

a) Mulțimi de puncte. Domenii în \mathcal{E}_2

Amintim aci simbolurile de apartenență \in , de incluziune \subset , de reuniune sau sumă \cup (sau $+$), de mulțime vidă \emptyset , de complementară $\complement \mathfrak{M}$ a unei mulțimi \mathfrak{M} .

Dacă pentru $x, y \in \mathfrak{M}$ este definită o *distanță* $\rho(x, y)$, atunci \mathfrak{M} se numește *spațiu metric*. Exemplul cel mai comun este cel al *spațiului euclidian* (sau *aritmetic*) cu m dimensiuni \mathcal{E}_m , alcătuit din mulțimea tuturor sistemelor ordonate de m numere reale: $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$. Pentru $m = 1, 2, 3$, avem de-a face cu dreapta reală, cu planul, respectiv cu spațiul euclidian tridimensional. Distanța este definită aci de

$$\rho(x, y) = |x - y| = \sqrt{\sum_{i=1}^m (x_i - y_i)^2}. \quad (1)$$

Se numește *bulă* (deschisă, respectiv închisă) cu centrul în a și de rază r , mulțimea $B(a, r)$ a punctelor x care satisfac condiția $\rho(x, a) < r$, respectiv $\rho(x, a) \leq r$. O bulă în \mathcal{E}_2 se numește *disc* (sau *disc circular*).

Un punct x_0 se numește *limită* a unui șir de puncte x_n dacă $\lim \rho(x_n, x_0) = 0$ pentru $n \rightarrow \infty$. Aceasta se notează $x_0 = \lim x_n$, sau încă $x_n \rightarrow x_0$.

Un șir x_n pentru care $\lim \rho(x_n, x_m) = 0$ pentru $n, m \rightarrow \infty$, se numește *fundamental*. Un șir care posedă o limită se numește *convergent*.

Mai departe, presupunem cunoscute noțiunile de *vecinătate*, de *punct interior*, de *punct de acumulare*, *punct frontieră*, de *frontieră* fr \mathfrak{M} a unei mulțimi \mathfrak{M} ; de mulțime *deschisă*, *închisă*, *perfectă*, *densă* în altă mulțime sau în ea însăși — care se construiesc toate pornind de la noțiunea de bulă.

O mulțime se numește *mărginită* dacă există o bulă care o conține.

O mulțime se numește *compactă* dacă orice submulțime infinită a ei conține un șir fundamental. În \mathcal{E}_m , orice mulțime mărginită este compactă (teorema lui Weierstrass și Bolzano).

O mulțime \mathfrak{M} se numește *conexă*, dacă nu există două mulțimi deschise \mathcal{G}_1 și \mathcal{G}_2 astfel încît

$$\mathfrak{M} \subset \mathcal{G}_1 \cup \mathcal{G}_2, \quad \mathfrak{M} \cap \mathcal{G}_1 \neq \emptyset, \quad \mathfrak{M} \cap \mathcal{G}_2 \neq \emptyset, \quad (\mathfrak{M} \cap \mathcal{G}_1) \cap (\mathfrak{M} \cap \mathcal{G}_2) = \emptyset.$$

Intuitiv, aceasta revine la a spune că ea nu este alcătuită din două „bucăți” separate.

O mulțime deschisă și conexă se numește *domeniu*.

O mulțime perfectă și conexă se numește *continuu*.

În cele ce urmează, ne vom mărgini la a considera *mulțimi de puncte* în \mathcal{E}_2 . Completat cu punctul de la infinit (exterior oricărui disc), el se numește *planul închis*.

Vom avea frecvent de-a face cu *domenii*, precum și cu mulțimi mărginite și închise, care vor fi numite pe scurt *compacte*.

Vom nota adesea cu \mathcal{D} domeniile în \mathcal{E}_2 , și cu \mathcal{L} frontierele lor. (Notațiile corespunzătoare în \mathcal{E}_3 vor fi \mathcal{V} și \mathcal{S} .) Dacă \mathcal{D} este mărginit, atunci $\mathcal{D} + \mathcal{L}$ este un compact.

Întrucît vom întîlni frecvent domenii de tipul bulei, precizăm că frontiera unei bule se va nota cu S : în \mathcal{E}_3 ea se numește *sferă*, iar în \mathcal{E}_2 , *cerc*. Dacă raza bulei (sau sferei) este egală cu 1, (bula unitate, sau sfera unitate), vom folosi notațiile B_1 (sau S_1). În \mathcal{E}_2 , pentru a evita eventualele confuzii, se vor folosi notațiile menționate mai jos, la pag. 695.

Uneori, se va folosi denumirea de disc și pentru domenii altfel definite — dar atunci vor trebui date precizări suplimentare (de ex., *disc eliptic* pentru domeniul a cărui frontieră este o *elipsă*).

Amintim aci *teorema lui Borel și Lebesgue*: dacă un compact din \mathcal{C}_2 (chiar din \mathcal{C}_m) este conținut în reuniunea unei familii infinite de mulțimi deschise, atunci există o subfamilie finită a acestei familii, a cărei reuniune o conține de asemenea.

Considerind funcții de punct f continue definite în \mathcal{C}_2 și cu valori tot în \mathcal{C}_2 , se poate demonstra că *imagea* unui compact \mathfrak{M} (adică mulțimea punctelor $f(x)$, pentru $x \in \mathfrak{M}$) este de asemenea un compact; *imagea* unei mulțimi conexe este conexă; o funcție continuă pe un compact este uniform continuă.

Un domeniu \mathfrak{M} se numește *simplu conex* dacă complementara sa $\mathbb{C} \setminus \mathfrak{M}$ față de planul închis este conexă. (Astfel, un disc este un domeniu simplu-conex; în schimb, mulțimea deschisă a punctelor pentru care $\rho(x, a) > r$ nu are această proprietate, deoarece complementara sa este alcătuită din discul închis, plus punctul de la infinit. (Vezi și mai departe pag. 697 și pag. 743.)

Un domeniu se numește *multiplu conex*, și anume *m-conex*, dacă $\mathbb{C} \setminus \mathfrak{M}$ este alcătuită din m componente disjuncte. Astfel, interiorul unei coroane circulare este un domeniu dublu conex.

b) Curbe-frontieră. Domenii simplu conexe și multiplu conexe

Domeniile plane cu care vom avea de-a face vor fi caracterizate prin frontierele lor, care vor fi întotdeauna niște *curbe* în sensul lui C. Jordan. Pentru a le defini pe acestea din urmă, să considerăm planul raportat la un sistem de coordonate carteziane ortogonale x_1, x_2 și să considerăm funcțiile

$$x_1 = x_1(r), \quad x_2 = x_2(r), \quad r \in [a, b]. \quad (2)$$

Dacă funcțiile (2) sînt *uniforme* (unei valori date r îi corespunde o singură valoare x_1 și o singură valoare x_2) și *continue*, atunci mulțimea punctelor (x_1, x_2) parcurse în sensul definit de sensul de creștere al lui r poartă numele de *curbă jordaniană*, sau, dacă confuzia nu este posibilă, *curbă*. Pentru a evita apariția de eventuale puncte multiple pe frontieră, se consideră *curbe jordaniene simple*, așadar curbe pentru care egalitățile $x_1(r') = x_1(r'')$ și $x_2(r') = x_2(r'')$ pentru $r', r'' \in]a, b[$ atrag $r' = r''$. Dacă concluzia de mai sus rămîne valabilă pentru $r', r'' \in [a, b]$, curba se numește *deschisă*. Dacă pe lîngă egalitatea $r' = r''$ e posibilă și egalitatea $r' = a, r'' = b$, ea se numește *închisă*.

Condiția ca curba să fie simplă revine la a spune că funcțiile (2) stabilesc o corespondență *biunivocă* și *bicontinuă* între punctele segmentului $[a, b]$ și punctele curbei.

Un ansamblu de curbe jordaniane simple care nu se intersectează va purta numele de *linie jordaniană simplă* (sau, pe scurt, *linie*). Pe viitor vom considera numai domenii definite prin frontiera lor, o *linie jordaniană simplă*.

Orice curbă jordaniană simplă închisă \mathcal{L} împarte planul în două domenii disjuncte, ea însăși constituind frontiera lor comună: unul din aceste domenii este mărginit și simplu conex, iar celălalt este nemărginit și dublu conex.

Vom nota cu indicele „+” domenii mărginite, și cu „-” domenii nemărginite.

Un domeniu mărginit a cărui frontieră este o curbă simplă închisă jordaniană se va nota cu \mathcal{D}^+ ; domeniul nemărginit exterior acestei curbe se va nota \mathcal{D}^- ; curba însăși se va nota \mathcal{L} ; uneori, îi vom atribui și indicele suplimentar „0”. Este evident că $\mathcal{D}^- = \mathbb{C}(\mathcal{D}^+ + \mathcal{L})$.

Un domeniu a cărui frontieră \mathcal{L} este compusă dintr-o curbă simplă închisă \mathcal{L}_0 și m curbe simple închise $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \dots, \mathcal{L}_m$ interioare curbei \mathcal{L}_0 și exterioare una în raport cu cealaltă, se va nota cu tot \mathcal{D}^+ . Este vizibil că $\mathcal{D}^+ = \mathcal{D}_0^+ \cap \left(\bigcap_{j=1}^m \mathcal{D}_j^- \right)$.

Dacă \mathcal{L}_0 este în întregime aruncată la infinit, astfel că \mathcal{L} este compusă numai din curbele interioare $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \dots, \mathcal{L}_m$, plus punctul de la infinit, domeniul se va nota cu \mathcal{D}^- . Avem desigur $\mathcal{D}^- = \bigcap_{j=1}^m \mathcal{D}_j^-$.

\mathcal{D}^+ și \mathcal{D}^- sînt de același tip cu \mathcal{D}_0^+ , respectiv \mathcal{D}_0^- (un domeniu mărginit, fără sau cu goluri, respectiv planul nemărginit cu unul sau mai multe goluri). Dar în general (cînd $\mathcal{L} \neq \mathcal{L}_0$), \mathcal{D}^- nu este complementara lui $\mathcal{D}^+ + \mathcal{L}$.

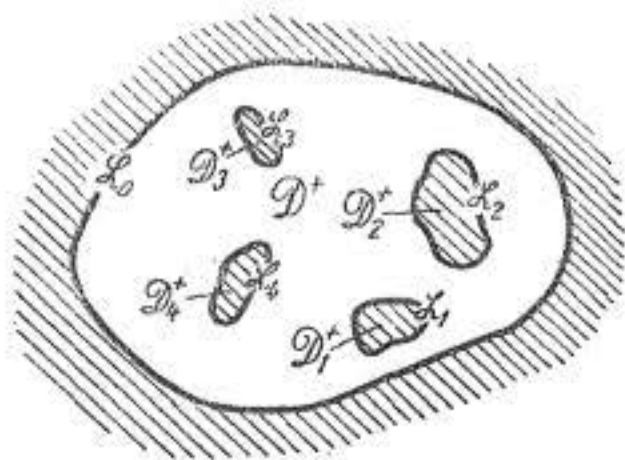


Fig. A.3.1

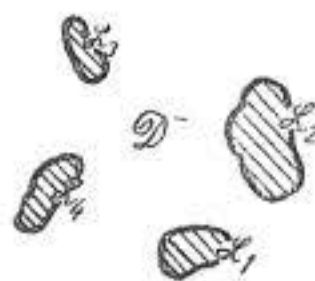


Fig. A.3.2

Dacă confuzia nu este posibilă, vom nota pe \mathcal{D}^+ sau \mathcal{D}^- simplu prin \mathcal{D} . Uneori, vom folosi caractere grecești oblice sau rusești: \mathcal{D} , \mathcal{D} etc. Subliniem că, pentru discul unitate, vom folosi întotdeauna (vezi de ex. §§ 7, 8, 9, 11) notația \mathcal{D}^+ , iar pentru planul cu un orificiu circular de rază 1, notația \mathcal{D}^- . Frontiera comună a acestor domenii (cercul unitate) se va nota γ .

Aceleași notații vor fi folosite uneori și pentru domenii de tip \mathcal{D}^+ sau \mathcal{D}^- — caz în care frontiera lor va fi notată cu \mathcal{H} . Ținând seama de context, nu există risc de confuzie. (Vezi de ex. § 6, unde notațiile \mathcal{H}^+ , \mathcal{H}^- apar în ambele accepțiuni.)

OBSERVAȚIE. Notațiile sînt alese în așa fel încît corpul elastic să poată ocupa domenii de oricare din aceste tipuri: \mathcal{D}_0^+ , \mathcal{D}_0^- , \mathcal{D}^+ , \mathcal{D}^- . În schimb, nu are sens să considerăm un corp definit de exemplu de reuniunea $\bigcup_{j=1}^m \mathcal{D}_j^+$.

Dacă trebuie să punem în evidență interiorul sau exteriorul corpului, vom scrie \mathcal{D}^i , respectiv \mathcal{D}^e . Dacă $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0$, putem avea $\mathcal{D}^i = \mathcal{D}_0^+$, dar și $\mathcal{D}^i = \mathcal{D}_0^-$, și deci $\mathcal{D}^e = \mathcal{D}_0^-$, respectiv $\mathcal{D}^e = \mathcal{D}_0^+$. Dacă frontiera nu se reduce la \mathcal{L}_0 , interiorul va fi \mathcal{D}^+ sau \mathcal{D}^- , iar exteriorul va fi $\mathcal{C}(\mathcal{D}^+ + \mathcal{L})$, respectiv $\mathcal{C}(\mathcal{D}^- + \mathcal{L})$.

Dacă confuzia nu este posibilă (în special, dacă \mathcal{L} se reduce la \mathcal{L}_0) vom folosi numai indicii $+$, $-$.

Dacă \mathcal{L} este compusă din curbe închise, orice punct frontieră poate fi unit cu orice punct exterior sau interior printr-o curbă jordaniană care nu are puncte comune cu frontiera, excepțind punctul inițial considerat. Astfel de puncte se numesc *accesibile*, și proprietatea de mai sus este echivalentă cu afirmația că orice punct-frontieră al unui domeniu mărginit de o astfel de linie jordaniană este accesibil atât din interior, cît și din exterior.

Orice curbă jordaniană interioară unui domeniu și care unește două puncte frontieră ale acestuia, se numește *tăietură*. Un domeniu mărginit de o linie jordaniană este simplu conex, dacă și numai dacă orice tăietură îl transformă într-o mulțime neconexă. Tot astfel, un domeniu este m -conex dacă și numai dacă există o tăietură care îl transformă într-un domeniu $(m-1)$ -conex.

Un domeniu \mathcal{D}^+ cu m componente interioare ale frontierei este $(m+1)$ -conex: unind fiecare \mathcal{L}_i cu \mathcal{L}_0 , se obține un domeniu mărginit și simplu conex $\tilde{\mathcal{D}}^+$. Aceeași afirmație este valabilă pentru domeniul \mathcal{D}^- cu aceleași m componente interioare ale frontierei în acest caz, componentele \mathcal{L}_i trebuie unite cu punctul de la infinit la care s-a redus \mathcal{L}_0 . Domeniul astfel obținut se notează $\tilde{\mathcal{D}}^-$.

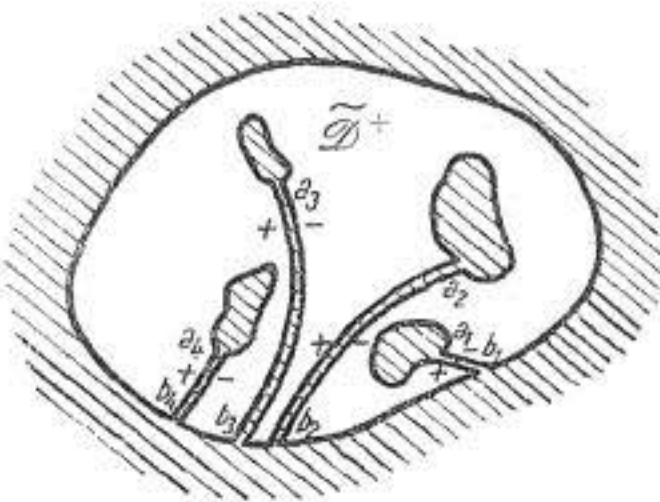


Fig. A.3.3

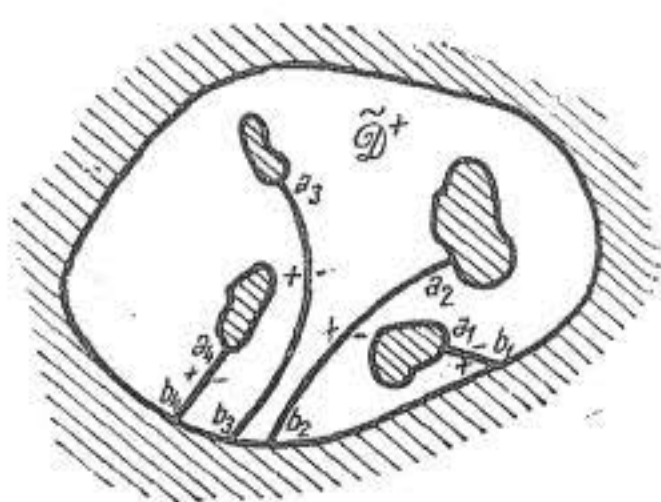


Fig. A.3.4

Desigur, dacă punctul de la infinit nu este un punct-frontieră, ci un punct interior pentru domeniul infinit considerat, ordinul de conexiune descrește cu o unitate (vezi de ex. pag. 694).

Subliniem că punctele ce aparțin tăieturilor trebuie privite ca ansamblul a două puncte, geometric confundate, dar situate pe *borduri* (margini) diferite ale tăieturii; o tăietură nu poate fi traversată. Bordurile ei se pot nota cu \pm (de ex., în așa fel încît \mathcal{L}_0 să fie parcurs în sensul trigonometric cînd trecem de la bordul $-$ la bordul $+$).

Pentru a înțelege intuitiv semnificația practicării de tăieturi, vezi figurile A.3.3. și A.3.4. Vezi și mai departe figurile A.5.2 și A.5.3.

Uneori se admit în alcătuirea lui \mathcal{L} și curbe \mathcal{L}_j deschise: acestea pot corespunde cazului-limită cînd un orificiu interior se reduce la o fisură interioară a corpului. Cazul unei curbe \mathcal{L}_0 deschise și cu capetele aruncate la infinit corespunde unor domenii nemărginite de tipul semiplanului, cu sau fără orificii.

c) Elemente geometrice fundamentale

Pentru orice domeniu mărginit \mathcal{D} , se poate defini *diametrul* său

$$d(\mathcal{D}) = \sup \rho(x, y), \quad \text{pentru } x, y \in \mathcal{D}. \quad (3)$$

Pentru a indica faptul că domeniul \mathcal{D} se reduce la un punct (de ex. în urma unui proces de deformare continuă), vom putea scrie $d(\mathcal{D}) \rightarrow 0$.

Nu insistăm aci asupra definirii în general a ariei domeniilor plane, întrucît chestiunea este mult mai delicată decît pare la prima vedere.

Amintim numai că, dacă funcțiile (2) ce definesc frontiera sînt *cu variație mărginită*, atunci \mathcal{D} posedă o arie. Mai mult, se poate demonstra că o curbă este *rectificabilă* (adică pe ea are sens noțiunea de *lungime a arcului de curbă*), dacă și numai dacă funcțiile (2) sînt *cu variație mărginită*. În acest caz, locul parametrului r îl poate lua lungimea arcului, care va fi notată cu s .

Curbele definite de funcții (2) de clasă C^p , $p \geq 1$, precum și de funcții de clasă C_1^0 , sînt cu certitudine rectificabile. Pe viitor, vom considera numai domenii mărginite de linii jordaniane rectificabile.

Pentru aria domeniului mărginit \mathcal{D}^+ vom avea prin definiție

$$D = \iint_{\mathcal{D}^+} dD. \quad (4)$$

(Elementul de arie $dx_1 dx_2$ în \mathcal{E}_2 se va nota cu dD .)

Pentru coordonatele x_1^0 , x_2^0 ale centrului său de greutate avem

$$x_1^0 = D^{-1} \iint_{\mathcal{D}^+} x_1 dD, \quad x_2^0 = D^{-1} \iint_{\mathcal{D}^+} x_2 dD. \quad (5)$$

Pentru momentele de inerție în axe oarecare, vom folosi notațiile

$$J_{11} = \iint_{\mathcal{D}^+} x_2^2 \, dD, \quad J_{12} = \iint_{\mathcal{D}^+} x_1 x_2 \, dD, \quad J_{22} = \iint_{\mathcal{D}^+} x_1^2 \, dD. \quad (6)$$

Momentul polar de inerție (momentul în raport cu originea) va fi

$$J_0 = J_{11} + J_{22}. \quad (7)$$

În cazul particular al unor axe centrale ($x_1^0 = x_2^0 = 0$), vom nota momentele cu l_{11} , l_{22} , l_{12} , l_0 . În axe oarecare, avem evident

$$\begin{aligned} l_{11} &= \iint_{\mathcal{D}^+} (x_2 - x_2^0)^2 \, dD, & l_{22} &= \iint_{\mathcal{D}^+} (x_1 - x_1^0)^2 \, dD, \\ l_{12} &= \iint_{\mathcal{D}^+} (x_1 - x_1^0)(x_2 - x_2^0) \, dD. \end{aligned} \quad (8)$$

Utilizându-se formulele (4)–(6), obținem teorema lui Steiner

$$J_{11} = l_{11} + D(x_2^0)^2, \quad J_{22} = l_{22} + D(x_1^0)^2, \quad J_{12} = l_{12} + D x_1^0 x_2^0, \quad (9)$$

ceea ce evidențiază caracterul minimal al momentelor centrale l_{11} , l_{22} , l_0 .

În axe centrale principale de inerție (unic determinate pentru un domeniu dat) avem $l_{12} = 0$. (Pentru poziția lor, vezi mai jos § 7, pag. 739.) Momentele centrale principale de inerție se vor nota l_1 , l_2 , astfel că în axe paralele cu acestea avem

$$J_{11} = l_1 + D(x_2^0)^2, \quad J_{22} = l_2 + D(x_1^0)^2, \quad J_{12} = D x_1^0 x_2^0. \quad (10)$$

Pentru ca toate aceste integrale să aibă sens, este suficient ca domeniul \mathcal{D}^+ să fie măsurabil Jordan ²⁾, deci ca curbele frontieră să fie definite de funcții (2) de clasă $C^0 \cap V$.

Dacă funcțiile (2) sînt de clasă C^1 și derivatele lor nu se anulează (pentru aceeași valoare a lui r), curba se numește *netedă*.

Întrucît ecuația normalei la o curbă plană este

$$[x_1 - x_1(r)] : x_1'(r) = [x_2 - x_2(r)] : x_2'(r),$$

rezultă că o curbă netedă are peste tot o normală (și deci și o tangentă) ce variază continuu cu r — ceea ce explică denumirea.

Evident, o astfel de curbă este rectificabilă, iar lungimea arcului de curbă e dată de

$$s - s_0 = \int_{r_0}^r \sqrt{[x_1'(r)]^2 + [x_2'(r)]^2} \, dr. \quad (11)$$

²⁾ Ceea ce înseamnă că frontiera sa are arie nulă.

Pe viitor, vom alege întotdeauna drept parametru r pentru astfel de curbe, chiar lungimea arcului de curbă s .

Dacă curba considerată este jordaniană, închisă, cu derivate $x'_1(s)$, $x'_2(s)$ continue, și dacă $x'_1(a+0) = x'_1(b-0)$, $x'_2(a+0) = x'_2(b-0)$, ea se va numi *curbă netedă închisă*.

Un ansamblu finit de curbe jordaniene netede deschise cu capete comune două cite două și care nu se intersectează reciproc, se numește *curbă netedă pe porțiuni*. O astfel de curbă poate fi deschisă sau închisă. Ea are deci un număr finit de puncte de discontinuitate pentru direcția tangentei (puncte unghiulare).

Un ansamblu finit de curbe netede pe porțiuni care nu se intersectează reciproc se numește *linie netedă pe porțiuni*.

Vom nota cu s versorul tangentei, și cu n versorul normalei la curbă, dirijați în așa fel încât axele (n, s) să fie orientate la fel ca axele (x_1, x_2) (așadar cu sensul trigonometric de la n spre s). Dacă curba considerată este închisă, vom alege în genere pentru n direcția normalei *exterioare*; în acest caz, sensul crescător al valorilor lui s coincide cu sensul direct trigonometric. Atunci când curba este o componentă interioară a frontierei unui corp elastic, necesitatea de a alege drept normală, normala *exterioară corpului*, obligă de a lua pentru n normala interioară la curbă. Sensul de parcurs pe curbă va fi în acest caz cel retrograd.

Notînd cu n_1, n_2 cosinuşii directori ai normalei n , și cu $\hat{\theta}$ unghiul de la direcția axei Ox_1 la direcția n , (aceasta este un caz particular al notației ce va fi introdusă în fig. A.7.3 pentru o rotație oarecare a axelor), avem formulele

$$\begin{aligned} x'_1(s) &= \cos(s, x_1) = -\cos(n, x_2) = -n_2 = -\sin \hat{\theta}, \\ x'_2(s) &= \cos(s, x_2) = \cos(n, x_1) = n_1 = \cos \hat{\theta}. \end{aligned} \quad (12)$$

Presupunerea că curbele-frontieră sînt netede pe porțiuni nu este totuși îndestulătoare: chiar pentru a defini raza de curbură, trebuie să facem uz de formula

$$R = (x_1'^2 + x_2'^2)^{3/2} : (x_1'x_2'' - x_2'x_1''). \quad (13)$$

Dacă dorim ca curbura $1/R$ să varieze continuu cel puțin pe porțiuni, trebuie ca funcțiile (2) să fie de clasă cel puțin C^2 pe porțiuni.

În general, se pot considera curbe de clasă C_μ^p , definite de funcții (2) de clasă C_μ^p . Dacă aceste funcții sînt desfășurabile în serii după puterile parametrului, curba se numește *analitică*. Este ușor de înțeles ce înseamnă *curbă* (respectiv *linie*) *de clasă C_μ^p pe porțiuni*, *analitică pe porțiuni* etc. În particular, curbele jordaniene sînt curbe de clasă C^0 , cele netede sînt de clasă C^1 , cele cu curbură continuă — de clasă C^2 etc.

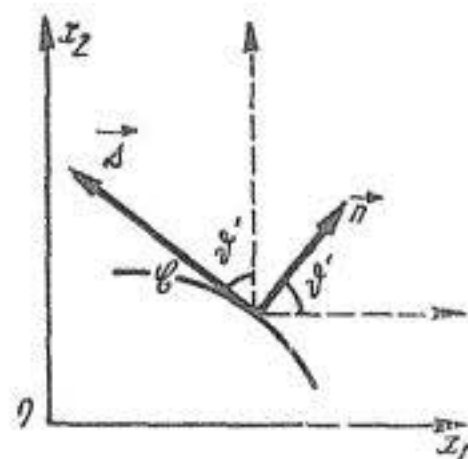


Fig. A.3.5

Cel mai adesea este suficient să ne limităm la așa-numitele *curbe Liapunov*, care satisfac următoarele condiții:

- a) sînt netede pe porțiuni;
- b) există un număr d astfel încît dreptele paralele cu normala la curbă într-un punct x intersectează cel mult odată acea porțiune a curbei care e situată în interiorul cercului $S(s; d)$;
- c) există o constantă $H > 0$ și o constantă $0 < \mu \leq 1$, astfel încît pentru normalele n, n_0 în două puncte x, x_0 avem

$$\widehat{(n, n_0)} \leq H |x - x_0|^\mu. \quad (14)$$

În aceste relații, numerele d, H, μ nu sînt funcții de punct.

Condiția a) arată că curbele Liapunov au tangentă ce variază continuu pe porțiuni. Condiția b) poate fi interpretată ca o condiție suficientă pentru a putea scrie ecuațiile (2) sub forma $x_2 = f(x_1)$. Condiția c) este o condiție de mărginire uniformă a variației direcției normalei (sau tangentei).

Întrucît curbura este definită prin formula

$$1/R = d\widehat{(s, x_1)}/ds, \quad (15)$$

se vede că condiția (14) este apropiată de condiția ca curba să fie de clasă C^2 . În fapt, se poate demonstra că dacă curba este cu curbura continuă, condițiile lui Liapunov sînt satisfăcute. Curbele Liapunov pot fi deci privite ca intermediare între curbele de clasă C^1 și C^2 .

d) Funcții de punct în plan

Vom avea de repetate ori de-a face cu funcții de punct (reale sau complexe) definite în anumite domenii sau pe anumite linii din plan.

Pentru funcțiile de punct din plan, se pot da generalizări ale noțiunilor din § 1. Dar în ce privește funcțiile de punct pe anumite linii rectificabile, este mai simplu ca acestea să fie privite ca funcții de lungimea arcului de curbă pe fiecare componentă a liniilor considerate. Evident, astfel de funcții pot aparține diferitelor clase C_μ^p .

În particular, prezintă deosebit interes funcțiile ce satisfac condiția

$$|f(x) - f(x_0)| \leq H |x - x_0|^\mu. \quad (16)$$

Dacă $x, x_0 \in \mathfrak{M}$, funcția f se zice că este *hölderiană pe* \mathfrak{M} .

Dacă \mathfrak{M} este o linie, condiția (16) trebuie să fie separat verificată pe fiecare din curbele ce intră în alcătuirea acesteia. Pe o curbă netedă, $f(x)$ poate fi privită ca funcție de s .

Apropierea dintre formulele (14) și (16) este vizibilă.

Menționăm încă faptul că pe o curbă Liapunov, cosinușii directori n_1, n_2 și cosinusul unghiului φ format de normala într-un punct x cu direcția din x în alt punct x_0 , sînt funcții hölderiene.

Printr-un oarecare abuz de notație, dacă o curbă este de clasă C_μ^p (sau V) în raport cu un parametru definit pe o altă curbă, fie ea \mathcal{L} , vom scrie că ea este de clasă $C_\mu^p(\mathcal{L})$ (sau $V(\mathcal{L})$).

Pentru detalii asupra clasificării funcțiilor și curbelor, vezi C. Miranda [1], § 1; F. Gahov [1], § 1.2; N. Mushelişvili [4], capitolul 1 și Anexa 1; I. Vekua [1], §§ 1.1 și 1.2.

Unele din aceste proprietăți (de ex. cele relative la curbele Liapunov) pot fi generalizate și la cazul *suprafețelor* din \mathcal{L}_3 .

În cele ce urmează, vom folosi frecvent formule de legătură între valorile unor funcții în \mathcal{D} , și valorile lor pe \mathcal{L} . De fiecare dată în aceste formule vor interveni *valorile la limită* ale funcțiilor, în sensul definit în (1.1.6)–(1.1.8) — cu modificările cuvenite de notații: \mathcal{D} și \mathcal{L} , în loc de \mathcal{V} și \mathcal{S} . Dacă \mathcal{L} este o curbă simplă închisă, avem deci

$$\begin{aligned} f^+(x_0) &= \lim f(x) \text{ pentru } x \in \mathcal{D}^+, x \rightarrow x_0 \in \mathcal{L}, \\ f^-(x_0) &= \lim f(x) \text{ pentru } x \in \mathcal{D}^-, x \rightarrow x_0 \in \mathcal{L}, \end{aligned} \quad (17)$$

(dacă aceste limite există!). În cazul unei frontiere cu mai multe componente, indicii $+$, $-$ trebuie înlocuiți prin i , e (vezi pag. 696). Dacă în alcătuirea frontierei intră curbe deschise, pentru acestea se poate defini (ținând seama de sensul de parcurs) o vecinătate „dreaptă” și una „stângă” a fiecărui punct care nu este un capăt, și deci se pot considera și aci valori la limită de tip (17).

e) Formule integrale

Cea mai frecvent utilizată formulă integrală — făcînd uz de valori în domeniu, și de valori la limită ale anumitor funcții — va fi formula lui Riemann-Ostrogradskii (vezi de ex. M. Nicolescu et al. [1], vol. 2, cap. 9)

$$\oint_{\mathcal{E}} [P_1(x_1, x_2) n_1 + P_2(x_1, x_2) n_2] ds = \iint_{\mathcal{A}^+} (P_{1,1} + P_{2,2}) dD, \quad (18)$$

unde am notat cu \mathcal{E} frontiera domeniului (simplu conex sau multiplu conex) $\mathcal{A}^+ \subseteq \mathcal{D}$.

Această formulă este valabilă dacă \mathcal{E} este o curbă netedă pe porțiuni, iar funcțiile P_1 , P_2 au derivate parțiale de primul ordin mărginite și integrabile (în particular, continue) în \mathcal{A}^+ . Pentru detalii asupra cadrului de valabilitate al acestei formule (și în general al formulilor stokiene) vezi O. Kellog [1], § 4.12; K. Krickeberg [1]; M. Nicolescu et al. [1], volumul 2, capitolele 9 și 19; S. Stoilov [1], volumul 2, § 1.2; vezi de asemenea I. Ghelfand și G. Șilov [1], § 3.1, pct. 1.

Ținînd seama de (12), putem pune (18) și sub forma

$$\oint_{\mathcal{E}} P_1 dx_2 - P_2 dx_1 = \iint_{\mathcal{A}^+} (P_{1,1} + P_{2,2}) dD. \quad (19)$$

Dacă \mathcal{A}^+ este multiplu conex, sensul de parcurs este cel direct pe componenta exterioară a lui \mathcal{E} , și cel retrograd pe componentele interioare.

§ 4. FUNCȚII DE PUNCT CA FUNCȚII DE DOUĂ VARIABLE COMPLEXE CONJUGATE

a) Variabile z, \bar{z}

Toate formulele din capitolele 5 și 6 presupun că avem de-a face cu planul raportat la coordonate carteziane ortogonale x_1, x_2 , așadar planul în care s-a stabilit o corespondență biunivocă între puncte și perechile ordonate de numere reale (x_1, x_2) . Atașând fiecărui punct numărul complex $z = x_1 + i x_2$ (punctul de la infinit se notează z_∞), rezultă că orice funcție de punct $G(x_1, x_2)$ poate fi privită ca funcție de variabila complexă z .

Proprietățile acestei funcții nu apar însă ca o generalizare firească a celor ale funcției inițiale. În afară de aceasta, dacă — așa cum este frecvent cazul — funcția $G(x_1, x_2)$ este dată prin intermediul unei „formule”, care permite construirea valorii $G(x_1, x_2)$ prin operații precizate asupra numerelor x_1, x_2 — această formulă nu poate fi în general transcrisă numai cu ajutorul variabilei z .

Introducând însă și operația de *conjugare*, și considerînd variabilele complexe conjugate

$$z = x_1 + i x_2, \quad \bar{z} = x_1 - i x_2, \quad (1)$$

obținem evident

$$x_1 = \operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \quad x_2 = \operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}). \quad (2)$$

Prin urmare, este convenabil ca orice funcție (reală sau complexă) de punct $G(x_1, x_2)$ să fie pusă sub forma

$$G(x_1, x_2) \equiv G(z, \bar{z}), \quad (3)$$

unde membrul al doilea poate fi întotdeauna *efectiv* scris cu ajutorul unei formule, dacă membrul întâi posedă această proprietate.

(Remarcăm că, printr-un anumit abuz de notație, vom păstra simbolul funcțional G , independent de faptul că avem de-a face cu variabilele x_1, x_2 sau z, \bar{z} .)

Desigur, \bar{z} este în fapt o funcție (chiar funcție continuă) de z . Aceasta nu este însă o funcție derivabilă, întrucît raportul

$$\frac{\delta \bar{z}}{\delta z} = \frac{\delta x_1 - i \delta x_2}{\delta x_1 + i \delta x_2} = \frac{1 - (\delta x_2 / \delta x_1)^2}{1 + (\delta x_2 / \delta x_1)^2} - 2i \frac{(\delta x_2 / \delta x_1)}{1 + (\delta x_2 / \delta x_1)^2} \quad (4)$$

nu posedă o limită unic determinată pentru $\delta z \rightarrow 0$.

Toemai aceasta explică motivul pentru care nu este convenabil a privi funcția G ca funcție de o singură variabilă complexă z .

Dacă pentru un z dat, valoarea funcției $G(z, \bar{z})$ este deplin determinată (așadar, dacă G depinde de punct, și nu și de drumul pe care acest

punct a fost atins), funcția se numește *uniformă*. Dacă pentru $z' \neq z''$ avem $G(z', \bar{z}') \neq G(z'', \bar{z}'')$, funcția se numește *univalentă*.

Așadar, pentru o funcție uniformă, unui punct z îi corespunde cel mult o valoare $G(z, \bar{z})$; pentru o funcție univalentă, unei valori G îi corespunde cel mult un punct z în așa fel încît $G = G(z, \bar{z})$.

b) Operatori diferențiali

Să privim formulele (1) ca definind o schimbare de variabile *independente*. Folosind pentru derivatele parțiale în raport cu z, \bar{z} notația adoptată în § 1.1, pag. 33, avem deci

$$G_{,1} = \frac{1}{2}(G_{,1} - iG_{,2}), \quad G_{,\bar{1}} = \frac{1}{2}(G_{,1} + iG_{,2}), \quad (5)$$

sau încă

$$G_{,1} = G_{,1} + G_{,\bar{1}}, \quad G_{,2} = i(G_{,\bar{1}} - G_{,1}). \quad (6)$$

De aci obținem ușor mai departe

$$G_{,\bar{1}\bar{1}} = \frac{1}{4}(G_{,11} + G_{,22}) = \frac{1}{4}\Delta G, \quad G_{,\bar{1}1} = \frac{1}{4}(G_{,11} - G_{,22} - 2iG_{,12}), \quad (7)$$

(unde Δ este operatorul lui Laplace în 2 variabile).

Avînd în vedere utilizarea coordonatelor polare

$$z = R \exp(i\chi), \quad (8)$$

se stabilesc și formulele

$$\begin{aligned} G_{,R} &= [\exp(i\chi)] G_{,\bar{1}} + [\exp(-i\chi)] G_{,1}, \\ G_{,\chi} &= iR \{ [\exp(i\chi)] G_{,\bar{1}} - [\exp(-i\chi)] G_{,1} \}, \end{aligned} \quad (9)$$

sau încă

$$G_{,\bar{1}} = \frac{1}{2} [\exp(-i\chi)] [G_{,R} - iR^{-1} G_{,\chi}]. \quad (10)$$

(Expresia derivatei în raport cu \bar{z} obținîndu-se — ca și în (5) de altfel — prin trecerea în membrul al doilea la cantitatea conjugată.)

Din (7) și (10) căpătăm încă pentru operatorul lui Laplace

$$\Delta G = G_{,11} + G_{,22} = 4G_{,\bar{1}\bar{1}} = G_{,RR} + R^{-1} G_{,R} + R^{-2} G_{,\chi\chi}. \quad (11)$$

Pentru orice funcție complexă de clasă C^1

$$f(x_1, x_2) \equiv f(z, \bar{z}) = f_1(x_1, x_2) + if_2(x_1, x_2) \quad (12)$$

unde f_1, f_2 sînt reale, obținem din (5) formulele

$$\begin{aligned} f_{,3} &= \frac{1}{2} [(f_{1,1} + f_{2,2}) + i(f_{2,1} - f_{1,2})], \\ f_{,\bar{3}} &= \frac{1}{2} [(f_{1,1} - f_{2,2}) + i(f_{2,1} + f_{1,2})]. \end{aligned} \quad (13)$$

În particular, avem evident (compară cu (4))

$$\bar{\partial}_{,3} = 0, \quad (14)$$

ceea ce subliniază caracterul *exterior* al operației de conjugare, și permite să considerăm formal variabilele $\bar{z}, \bar{\bar{z}}$ ca *variabile independente* din punctul de vedere al proprietăților diferențiale.

Subliniem faptul că toate operațiile care își au originea în (1)–(6) au un caracter formal: \bar{z} și $\bar{\bar{z}}$ nu sînt variabile independente, „derivatele” din (5) nu sînt în fapt derivate (limite de rapoarte de creșteri elementare) etc. Totuși, acest mod a raționa este extrem de util, și el poate fi riguros fundamentat. (Vezi L. Ahlfors [1], § 2.1, pag. 41–42). Totodată, el poate fi privit ca un drum euristic ce conduce la anumite rezultate, întotdeauna cu puțință de verificat *à-posteriori*.

„A integra în raport cu \bar{z} ” — înseamnă *a găsi o funcție a cărei derivată* — în sensul din (5) — *în raport cu \bar{z} să fie funcția dată*. În calcularea acestor integrale nu e deci vorba nici odată de drumuri de integrare, de condiții la limită etc. Din (14) se vede limpede de ce este îngăduit să tratăm aci pe \bar{z} și $\bar{\bar{z}}$ ca variabile *independente*, din punctul de vedere al proprietăților legate de operațiile de derivare. Anumite precauțiuni sînt desigur necesare (vezi de ex. N. Mushelişvili [5], § 2.2) — dar raționamente ca de exemplu cele din (5.2)–(5.4) sînt întotdeauna permise; iar formula lui Pompeiu (vezi mai jos, pag. 710) permite să înlăturăm orice dubiu, chiar și în cazul unor funcții care nu sînt funcții analitice de o singură variabilă complexă.

Pentru a găsi extremele funcției $G(x_1, x_2)$, trebuie să căutăm soluțiile sistemului

$$G_{,1} = G_{,2} = 0, \quad (15)$$

și să verificăm dacă în punctele corespunzătoare avem

$$(G_{,12})^2 - G_{,11} G_{,22} < 0. \quad (16)$$

În acest caz, avem un maximum sau un minimum, după cum $G_{,11}$ (sau — ceea ce este același lucru — $G_{,22}$) este negativ sau pozitiv.

Ținînd seama de (5)–(10), putem înlocui (15) prin ecuația

$$G_{,3} = 0, \quad (17)$$

sau încă, dacă este convenabil să facem uz de coordonate polare :

$$G_{,R} - i R^{-1} G_{,\chi} = 0, \quad (18)$$

Întrucît avem

$$\begin{aligned} (G_{,12})^2 - G_{,11} G_{,22} &= 4 [G_{,\bar{3}\bar{3}} G_{,\bar{\bar{3}}\bar{\bar{3}}} - (G_{,\bar{3}\bar{\bar{3}}})^2] = \\ &= R^{-2} [(G_{,R\chi} - R^{-1} G_{,\chi})^2 - G_{,RR} (G_{,\chi\chi} + R G_{,R})], \end{aligned} \quad (19)$$

de aci deducem ușor condițiile ce înlocuiesc condiția (16).

În fine, întrucît avem

$$G_{,\bar{s}\bar{s}} = \frac{1}{4} [\exp(-2i\chi)] [(G_{,RR} - R^{-1}G_{,R} - R^{-2}G_{,\chi\chi}) - 2i(R^{-1}G_{,R\chi} - R^{-2}G_{,\chi})],$$

deducem ușor

$$\begin{aligned} G_{,11} = G_{,\bar{s}\bar{s}} + G_{,ss} + 2G_{,s\bar{s}} &= \frac{1}{2} (G_{,RR} - R^{-1}G_{,R} - R^{-2}G_{,\chi\chi}) \cos 2\chi - \\ &- (R^{-1}G_{,R\chi} - R^{-2}G_{,\chi}) \sin 2\chi + \frac{1}{2} (G_{,RR} + R^{-1}G_{,R} + R^{-2}G_{,\chi\chi}), \end{aligned} \quad (20)$$

ceea ce permite să determinăm natura extremului în variabile complexe sau polare.

Aceste criterii *își pierd valabilitatea pe frontiera* domeniului; de aceea este necesar să se considere și valoarea la limită a derivatei normale $G_{,n}|_{\mathcal{L}}$, și să se caute și extremele derivatei tangențiale pe frontieră $G_{,s}|_{\mathcal{L}}$.

Dacă \mathfrak{z} se deplasează pe o curbă \mathcal{C} de clasă C^1 , din (1) și (3.12) urmează

$$\mathfrak{z}'(s) = x'_1(s) + ix'_2(s) = -n_2 + in_1 = i(\cos \hat{\vartheta} + i \sin \hat{\vartheta}),$$

adică

$$\mathfrak{z}'(s) = i \exp(i\hat{\vartheta}), \quad \exp(i\hat{\vartheta}) = -i\mathfrak{z}'(s). \quad (21)$$

Prin urmare, pentru versorii \mathbf{s} , \mathbf{n} definiți în (3.12), putem folosi *notațiile* complexe (acestea nu sînt egalități!)

$$\mathbf{s} = (x'_1, x'_2) = \mathfrak{z}'(s), \quad \mathbf{n} = (x'_2, -x'_1) = -i\mathfrak{z}'(s); \quad (22)$$

(înmulțirea cu $-i$ corespunde, evident, rotirii de 90° în sens retrograd).

Ținînd seama de (5), avem pentru orice funcție complexă $f_1 + if_2$:

$$f_{,\mathfrak{z}} \mathfrak{z}'(s) = \frac{1}{2} [(f_{,1} x'_1 + f_{,2} x'_2) + i(f_{,1} x'_2 - f_{,2} x'_1)],$$

de unde, utilizînd și (3.12):

$$f_{,\mathfrak{z}} \mathfrak{z}'(s) = \frac{1}{2} (f_{,s} + i f_{,n}), \quad (23)$$

și analog

$$\overline{f_{,\mathfrak{z}} \mathfrak{z}'(s)} = \frac{1}{2} (f_{,\bar{s}} - i f_{,\bar{n}}). \quad (24)$$

Pentru o funcție complexă oarecare deducem de aci

$$f_{,s} = f_{,s} z'(s) + \overline{f_{,s} z'(s)}, \quad f_{,x} = -i [f_{,s} z'(s) - \overline{f_{,s} z'(s)}]. \quad (25)$$

Dacă f este reală, atunci (24) decurge din (23) prin conjugare, iar (25) conduce la

$$f_{,s} = 2 \operatorname{Re} [f_{,s} z'(s)], \quad f_{,x} = 2 \operatorname{Im} [f_{,s} z'(s)]. \quad (26)$$

c) Integrala definită. Condiții de uniformitate

Integrala curbilinie

$$I(z, \bar{z}) = \int_{P_0}^P f(z, \bar{z}) dz + g(z, \bar{z}) d\bar{z} \quad (27)$$

— unde f, g sînt funcții complexe *uniforme* — se poate calcula prin separarea părților reală și imaginară; aceasta conduce la a calcula două integrale curbilinii reale pe curbe care merg din punctul P_0 în punctul (fix sau variabil) P . În general, astfel de integrale nu sînt uniforme.

Ca funcție de limita sa superioară, integrala (27) este o funcție derivabilă :

$$I_{,s} = f, \quad I_{,\bar{s}} = g. \quad (28)$$

Pentru a stabili condițiile în care (27) este o funcție uniformă, trebuie să utilizăm analogul complex al formulei lui Riemann-Ostrogradski (3.19), care poartă numele de *formula complexă a lui Stokes* (L. Milne-Thomson [3], § 3.25) :

$$\oint_{\mathcal{C}} f(z, \bar{z}) dz + g(z, \bar{z}) d\bar{z} = 2i \iint_{\mathcal{A}^+} (f_{,s} - g_{,\bar{s}}) dD, \quad (29)$$

unde \mathcal{C} este frontiera domeniului mărginit \mathcal{A}^+ (eventual multiplu conex).

Această formulă se demonstrează ușor, ținînd seama de relațiile (13), separînd partea reală de cea imaginară, și utilizînd (3.19). În particular, din (29) urmează

$$\operatorname{Re} \oint_{\mathcal{C}} f dz = -2 \operatorname{Im} \iint_{\mathcal{A}^+} f_{,\bar{s}} dD, \quad \operatorname{Im} \oint_{\mathcal{C}} f dz = 2 \operatorname{Re} \iint_{\mathcal{A}^+} f_{,s} dD. \quad (30)$$

Să admitem acum că $I(z, \bar{z})$ din (27) este uniformă în \mathcal{D} . De aci urmează evident

$$\oint_{\mathcal{C}} f dz + g d\bar{z} = 0 \quad (31)$$

pe orice curbă închisă \mathcal{C} situată în \mathcal{D} . Comparînd relațiile (29) și (31), rezultă că în orice porțiune $\mathcal{A}^+ \subseteq \mathcal{D}$, trebuie să avem

$$\iint_{\mathcal{A}^+} (f_{,i} - g_{,i}) dD = 0. \quad (32)$$

Or, dacă o funcție continuă este diferită de zero într-un punct, există un domeniu de măsură (arie) nenulă în care ea își păstrează semnul. Prin urmare, din (32) urmează condiția *necesară* de uniformitate:

$$f_{,i} = g_{,i} \text{ în } \mathcal{D}. \quad (33)$$

Fie acum, dimpotrivă, condiția (33) satisfăcută. Din (33) și (29) rezultă deci că (31) este verificată pe frontiera \mathcal{C} a oricărui domeniu $\mathcal{A}^+ \subseteq \mathcal{D}$.

Să presupunem mai întîi că \mathcal{D} este simplu conex. Atunci orice curbă simplă închisă \mathcal{C} conținută în \mathcal{D} definește un domeniu simplu conex \mathcal{A}^+ , pe frontiera căruia este verificată relația (31). Prin urmare, integrala $I(\zeta, \bar{\zeta})$ calculată pe orice curbă din \mathcal{D} , nu depinde de curbă, ci numai de capetele sale, și (33) rezultă a fi totodată o condiție *suficientă* de uniformitate a integralei (27).

Să presupunem în fine că \mathcal{D} este multiplu conex. În acest caz, există curbe simple închise \mathcal{C}' conținute în \mathcal{D} , care definesc domenii \mathcal{A}^+ multiplu conexe: de exemplu, o curbă \mathcal{C}^j care conține în interior o componentă \mathcal{L}_j . Întrucît (29) este valabilă pe frontiera lui \mathcal{A}^+ , urmează (ținînd seama de sensul opus de parcurs pe \mathcal{C}^j și \mathcal{L}_j , și presupunînd că funcțiile f, g sînt prelungibile pe \mathcal{L}_j):

$$\oint_{\mathcal{C}^j} f d\zeta + g d\bar{\zeta} = \oint_{\mathcal{L}_j} f d\zeta + g d\bar{\zeta}. \quad (34)$$

Întrucît nu există nici un motiv pentru ca această din urmă integrală să fie nulă, înseamnă că integrala pe \mathcal{C}^j poate fi diferită de zero, și deci valorile integralei $I(\zeta, \bar{\zeta})$ pe două curbe deschise ce formează împreună o curbă \mathcal{C}' care conține în interiorul ei o componentă \mathcal{L}_j a frontierei, pot fi diferite.

Prin urmare, (33) este condiția *necesară și suficientă* de uniformitate a integralei (27) numai în cazul unui domeniu simplu conex. În cazul unui domeniu multiplu conex, ea rămîne numai ca condiție *necesară* de uniformitate.

Să considerăm acum — mai general — o funcție de punct $\varphi(\zeta, \bar{\zeta})$ cu proprietăți care vor permite apoi să cuprindem și cazul integralei (27) în \mathcal{D} multiplu conex drept caz particular.

Pentru variația unei funcții φ între punctele A, B din \mathcal{D} , vom folosi notația

$$[\varphi]_A^B = \varphi(\zeta_B, \bar{\zeta}_B) - \varphi(\zeta_A, \bar{\zeta}_A). \quad (35)$$

Desigur, orice curbă închisă \mathcal{C}' poate fi privită ca parcursă pornind dintr-un punct al ei P^- și sosind în punctul P^+ , punctele P^- și P^+ fiind confundate geometric. Variația funcției φ se va scrie

$$[\varphi]_{P^-, P^+} = \varphi(\bar{z}_{P^+}, \bar{z}_{P^+}) - \varphi(\bar{z}_{P^-}, \bar{z}_{P^-}). \quad (36)$$

Dacă această variație nu depinde de P , vom scrie mai simplu

$$[\varphi]_{P^-, P^+} = [\varphi]_{\mathcal{C}'}, \quad (37)$$

subînțelegând că \mathcal{C}' e parcursă în sens direct.

Condiția de uniformitate a funcției φ într-o porțiune $\mathcal{D}' \subseteq \mathcal{D}$ se scrie deci

$$[\varphi]_{\mathcal{C}'} = 0 \quad (38)$$

pentru orice curbă închisă \mathcal{C}' din \mathcal{D}' .

Să demonstrăm că : dacă o funcție de punct $\varphi(\bar{z}, \bar{z})$, este continuă în $\mathcal{D} + \mathcal{L}$, uniformă în orice porțiune simplu conexă a lui \mathcal{D} , și satisface pentru orice puncte P, Q ce pot fi privite ca aparținând unei tăieturi, condiția

$$[\varphi]_{P^+}^{Q^+} = [\varphi]_{P^-}^{Q^-}, \quad (39)$$

atunci variația ei pe orice curbă închisă \mathcal{C}' din \mathcal{D} depinde numai de variația ei pe componentele interioare ale frontierei, cuprinse în \mathcal{C}' .

Într-adevăr, să atribuim rolul curbei \mathcal{C}' la două curbe simple închise $\mathcal{L}'_j, \mathcal{L}''_j$ care nu se intersectează, sînt conținute în \mathcal{D} , și cuprind în interior numai componenta \mathcal{L}_j a frontierei.

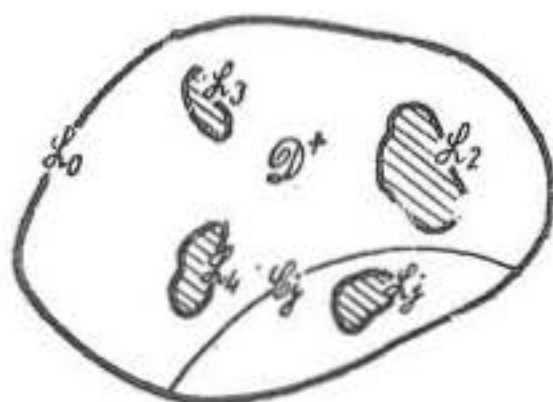


Fig. A.4.1 a

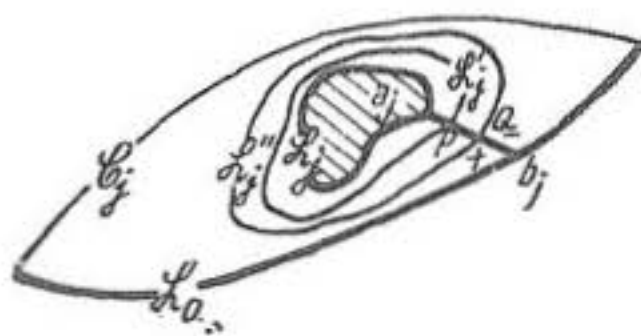


Fig. A.4.1 b

Fie \mathcal{C}_j o curbă care separă din \mathcal{D} un domeniu dublu conex care conține ambele curbe $\mathcal{L}'_j, \mathcal{L}''_j$. Fie a, b , o tăietură care transformă acest domeniu într-un domeniu simplu conex. În fine, fie P și Q punctele de intersecție ale acestei tăieturi cu \mathcal{L}'_j și \mathcal{L}''_j .

Întrucît curba $Q^- \mathcal{L}''_j Q^+ P^+ \mathcal{L}'_j P^- Q^-$ este situată într-o porțiune simplu conexă din \mathcal{D} , urmează că variația funcției φ în lungul ei este nulă. (Curba \mathcal{L}''_j este parcursă în sens direct, iar \mathcal{L}'_j , în sens retrograd.) Avem prin urmare, ținînd seama de (39) și de sensul de parcurs :

$$[\varphi]_{P^-, P^+} = [\varphi]_{Q^-, Q^+}.$$

Punctele P, Q fiind oarecare, rezultă evident că variațiile funcției φ nu depind de alegerea lor; întrucât funcția φ este continuă în $\mathcal{D} + \mathcal{L}$, avem în definitiv

$$[\varphi]_{\mathcal{L}'_j} = [\varphi]_{\mathcal{L}''_j} = [\varphi]_{\mathcal{L}_j}. \quad (40)$$

Rezultatul rămâne valabil dacă \mathcal{C}' are puncte duble. El se poate generaliza la curbe închise care conțin în interior mai multe componente interioare ale frontierei; în acest caz avem

$$[\varphi(\zeta, \bar{\zeta})]_{\mathcal{C}'} = \sum_{j=1}^m n_j [\varphi]_{\mathcal{L}_j}, \quad (41)$$

unde n_j este diferența dintre numărul de drumuri închise parcurse pe \mathcal{C}' în sens direct în jurul lui \mathcal{L}_j , și numărul celor parcurse în sens retrograd.

În figura A.4.2 am considerat din nou domeniul din figura A.3.1, și o curbă închisă $\mathcal{C}' = P_0 P P_0$. Aceasta poate fi descompusă în suma curbei închise $P_0 a e f h i j P l m n o P_0$, situată în întregime în domeniul simplu conex $\tilde{\mathcal{D}}^+$, și a anumitor curbe închise care conțin fiecare câte o singură componentă interioară a frontierei. Taieturile de pe figura A.3.3. sînt identice

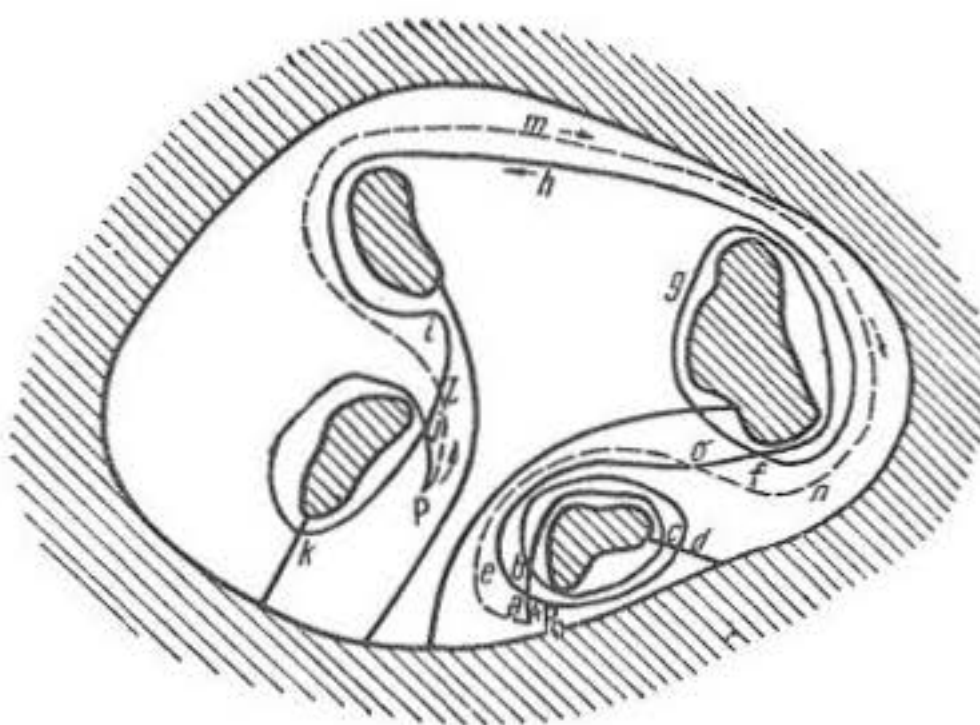


Fig. A.4.2

cu cele de pe figura A.4.2; ele sînt trasate în așa fel încît să traverseze numai aceste curbe închise, și nici o porțiune a curbei date a cărei traversare poate fi evitată.

Prin urmare, în acest exemplu avem

$$[\varphi]_{\mathcal{C}'} = -2 [\varphi]_{\mathcal{L}_1} + [\varphi]_{\mathcal{L}_2} - [\varphi]_{\mathcal{L}_3}.$$

Putem studia acum aspectul integralei (27) pe orice curbă din \mathcal{D}^+ . Într-adevăr, dacă condiția (33) este satisfăcută, aceasta este o funcție uniformă în orice porțiune simplu conexă din \mathcal{D}^+ . Întrucât funcțiile f și g sînt uniforme, ea satisface și condiția (39). Prin urmare, i se pot aplica cele spuse despre funcția $\varphi(\zeta, \bar{\zeta})$.

Pe orice curbă închisă \mathcal{C}' avem evident

$$[I]_{\mathcal{C}'} = \oint_{\mathcal{C}'} f d\zeta + g d\bar{\zeta}. \quad (42)$$

În particular, vom nota

$$I_j = \frac{1}{2\pi i} [I(\zeta, \bar{\zeta})]_{\mathcal{C}_j} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}_j} f d\zeta + g d\bar{\zeta}. \quad (43)$$

Intrucât am presupus că f și g sînt uniforme, integralele (43) sînt niște constante, numite *constantele ciclice*³⁾ sau *perioadele integralei* $I(\zeta, \bar{\zeta})$.

Evident, orice curbă deschisă \mathcal{C} mergînd din P_0 în P poate fi completată cu o curbă deschisă \mathcal{C}_1 mergînd din P în P_0 , formînd astfel o curbă închisă \mathcal{C}' . Alegînd pentru \mathcal{C}_1 o curbă simplă deschisă (care nu conține deci în interior nici o componentă interioară a frontierei), făcînd uz de formula (41) și ținînd seama de sensul de parcurs, obținem

$$[I]_{\mathcal{C} + \mathcal{C}_1} = \sum_{j=1}^m n_j [I]_{\mathcal{C}_j},$$

de unde

$$\int_{P_0 \mathcal{C} P} f d\zeta + g d\bar{\zeta} = \int_{P_0 \mathcal{C}_1 P} (f d\zeta + g d\bar{\zeta}) + \sum_{j=1}^m n_j \oint_{\mathcal{C}_j} f d\zeta + g d\bar{\zeta},$$

ceea ce se va scrie mai pe scurt

$$I(\zeta, \bar{\zeta}) = I_1(\zeta, \bar{\zeta}) + 2\pi i \sum_{j=1}^m n_j I_j, \quad (44)$$

unde integrala $I_1(\zeta, \bar{\zeta})$ poate fi calculată pe orice curbă \mathcal{C}_1 între P_0 și P , care nu iese din \mathcal{D}^+ , așadar nu traversează tăieturile.

În exemplul din figura A.4.2., integrala I_1 poate fi calculată de pildă pe curba $P_0 \text{ on } m \text{ l } P$. Avem deci

$$I(\zeta, \bar{\zeta}) = I_1(\zeta, \bar{\zeta}) + 2\pi i (-2I_1 + I_2 - I_4).$$

Din (44) rezultă deci: condiția *necesară și suficientă* pentru ca integrala (27) să fie o funcție uniformă în domeniul multiplu conex \mathcal{D}^+ , este ca să fie satisfăcută condiția (33), și ca perioadele I_j din (43) să fie nule.

d) Formula lui D. Pompeiu [1], [2]

Să considerăm o curbă simplă închisă \mathcal{C} în \mathcal{D} și să presupunem că ea nu cuprinde în interior nici o componentă a frontierei. Domeniul simplu conex mărginit de \mathcal{C} se va nota cu \mathcal{A}^+ . Să notăm cu $Z = X_1 + i X_2$ un punct curent în \mathcal{D} și să considerăm funcția

$$g(Z, \bar{Z}; \zeta) = \frac{f(Z, \bar{Z})}{Z - \zeta} \quad (45)$$

³⁾ Uneori, acest nume este atribuit constantelor $2\pi i I_j$.

pentru un punct oarecare, însă fix, $z \in \mathcal{A}^+ \subseteq \mathcal{D}$, f fiind o funcție uniformă $f(z, \bar{z}) \in C^1(\mathcal{D}) \cap C^0(\mathcal{D} + \mathcal{L})$.

Trasând un cerc γ' definit de $|Z - z| = \varepsilon$, și o tăietură de la γ' la \mathcal{C} , putem aplica formula (29) funcției (45). Obținem evident

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{f(Z, \bar{Z})}{Z - z} dZ - \oint_{\gamma'} \frac{f(Z, \bar{Z})}{Z - z} dZ = 2i \iint_{\mathcal{A}^+} \frac{\partial}{\partial \bar{Z}} \left[\frac{f(Z, \bar{Z})}{Z - z} \right] dX_1 dX_2. \quad (46)$$

Trecând la coordonate polare $Z = z + \varepsilon \exp(i\theta)$ pe γ' , obținem cu ajutorul primei teoreme a mediei

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \oint_{\gamma'} \frac{f(Z, \bar{Z})}{Z - z} dZ = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} \frac{f(z, \bar{z}; \varepsilon, \theta)}{\varepsilon \exp(i\theta)} \varepsilon i \exp(i\theta) d\theta = 2\pi i f(z, \bar{z}),$$

astfel că (46) conduce la formula lui Pompeiu

$$f(z, \bar{z}) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(Z, \bar{Z})}{Z - z} dZ - \frac{1}{\pi} \iint_{\mathcal{A}^+} \frac{\partial f(Z, \bar{Z})}{\partial \bar{Z}} \frac{dX_1 dX_2}{Z - z}. \quad (48)$$

În felul acesta se obțin valorile funcției f în \mathcal{A}^+ dacă se cunosc valorile sale pe \mathcal{C} , și valorile derivatei sale în \mathcal{A}^+ . Prin urmare, formula lui Pompeiu dă soluția ecuației $f_{,\bar{z}} = F$, dacă F și valoarea la limită a lui f sînt cunoscute.

Formula rămîne adevărată dacă \mathcal{C} este frontiera unui domeniu multiplu conex conținut în \mathcal{D} — și, în particular, dacă $\mathcal{C} = \mathcal{L}$ și $\mathcal{A}^+ = \mathcal{D}$ — cu condiția ca formula complexă a lui Stokes (29) să-și păstreze valabilitatea.

Trecînd în (48) la cantități complex conjugate și notînd apoi funcția \bar{f} din nou cu f , obținem și

$$f(z, \bar{z}) = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(Z, \bar{Z})}{\bar{Z} - \bar{z}} d\bar{Z} - \frac{1}{\pi} \iint_{\mathcal{A}^+} \frac{\partial f(Z, \bar{Z})}{\partial Z} \frac{dX_1 dX_2}{\bar{Z} - \bar{z}}. \quad (49)$$

Studiul amănunțit al formulei de tip Pompeiu (cadru de valabilitate, operatori diferențiali și integrali asociați etc.) ține de teoria funcțiilor analitice generalizate. Pentru detalii, vezi I. Vekua [1], capitolul 1.

§ 5. FUNCTII ANALITICE DE O VARIABILĂ COMPLEXĂ

Un deosebit interes îl prezintă studiul funcțiilor care din punct de vedere analitic sînt funcții de o singură variabilă complexă :

$$f = f(z). \quad (1)$$

a) Funcții uniforme. Serii. Singularități

Vom considera deocamdată numai funcții *uniforme* de z . Definițiile funcțiilor continue, hõlderiene, cu variație mărginită, sînt similare celor din domeniul real.

Dacă funcția considerată este *diferențiabilă* ca funcție de x_1, x_2 (sau, ceea ce e același lucru, de z, \bar{z}), atunci (1) echivalează cu

$$f_{,1} = 0. \quad (2)$$

În acest caz, $f(z)$ posedă o derivată unică

$$f'(z) = f_{,1}, \quad (3)$$

care nu depinde de direcția după care e atins punctul z . O astfel de funcție se numește *monogenă* sau *olomorfă* (într-un punct, respectiv un domeniu).

Ținînd seama de (4.5), obținem din (2) condițiile necesare pe care le verifică partea reală și partea imaginară a oricărei funcții monogene $f = f_1 + i f_2$: *ecuațiile lui Cauchy-Riemann*

$$f_{1,1} = f_{2,2}, \quad f_{1,2} = -f_{2,1}. \quad (4)$$

Verificarea ecuațiilor (4) nu este suficientă pentru a asigura monogeneitatea. Dacă însă f_1 și f_2 sînt diferențiabile (sau chiar numai continue) atunci funcția $f = f_1 + i f_2$ pentru care ecuațiile (4) sînt verificate, rezultă a fi monogenă (vezi de ex. I. Privalov [2], § 2.4).

Din ecuațiile (4) urmează că funcțiile f_1, f_2 satisfac ecuația lui Laplace. Astfel de funcții se numesc *armonice conjugate*.

Orice funcție armonică poate fi privită ca parte reală (sau imaginară) a unei funcții de o variabilă complexă, de clasă cel puțin C^2 . (Vom vedea că este suficient ca funcția să fie presupusă de clasă C^1 .) Acest fapt explică strînsa legătură dintre teoria funcțiilor de o variabilă complexă și studiul ecuației lui Laplace sau al unor ecuații înrudite (ecuația lui Poisson, ecuația biarmonică). Pentru o expunere consecventă a acestui punct de vedere în integrarea ecuației lui Laplace, vezi de exemplu G. Iacob [5], capitolul 1; S. Stoilov [1], volumul 2, §§ 1.1–1.8; capitolul 2.

Condiția (2) se cere satisfăcută pe *orice* drum parcurs de punctul \bar{z} în acel domeniu în care f are forma (1). Aceasta înseamnă că ecuațiile (2) sau (4) se înțeleg ca fiind satisfăcute în toate punctele *interioare*, dar nu în puncte frontieră ale domeniului de definiție. Acest fapt obligă la a considera numai *domenii* (mulțimi deschise și conexe) ca mulțimi de definiție pentru funcțiile ce ne vor interesa. Dacă anumite proprietăți vor fi valabile și pe frontieră, aceasta se va specifica aparte.

Făcînd uz de (4.5), ecuațiile (4) se pot pune și sub forma

$$f_{1,\bar{z}} = i f_{2,z}, \quad f_{1,z} = -i f_{2,\bar{z}}. \quad (5)$$

Din (4.24) deducem ca condiție echivalentă cu (2), condiția

$$f_{,z} = i f_{,\bar{z}}, \quad (6)$$

verificată pentru orice curbă din interiorul domeniului de definiție. În acest caz, din (4.23) obținem pentru $f = f(z)$:

$$f_{,s} z'(s) = f_{,s} = i f_{,n}. \quad (7)$$

Ecuatia (6) conduce la generalizarea formală a ecuațiilor (4):

$$f_{1,n} = f_{2,s}, \quad f_{1,s} = -f_{2,n}. \quad (8)$$

În cele ce urmează ne vom ocupa mai întâi de funcții olomorfe definite în domenii \mathcal{D} , mărginite de linii \mathcal{L} cu componente închise.

Dacă $f(z)$ este olomorfă în \mathcal{D} , atunci pentru orice curbă netedă pe porțiuni \mathcal{C} (închisă sau deschisă) cuprinsă în \mathcal{D} , poate fi definită integrala

$$\int_{\mathcal{C}} f(z) dz, \quad (9)$$

a cărei valoare depinde în general atât de funcția $f(z)$, cât și de curba \mathcal{C} . Un rezultat fundamental îl constituie *teorema lui Cauchy*: dacă $f(z)$ este olomorfă în \mathcal{D} , atunci avem

$$\oint_{\mathcal{C}} f(z) dz = 0, \quad (10)$$

unde \mathcal{C} este frontiera oricărui domeniu (eventual multiplu conex) $\mathcal{A}^+ \subset \mathcal{D}$.

Teorema rămâne valabilă și pe \mathcal{L} , dacă $f(z) \in C^0(\mathcal{D} + \mathcal{L})$. Dacă \mathcal{A}^+ este multiplu conex, (10) se înțelege ca *sumă* a integralelor luate pe toate componentele lui \mathcal{L} (în sens direct pe \mathcal{L}_0 , și în sens retrograd pe \mathcal{L}_j , $j = 1, 2, \dots, m$).

Dacă \mathcal{D} este simplu conex, din (10) urmează că integrala (9) nu depinde de drumul (deschis) \mathcal{C} , ci numai de $f(z)$ și de capetele acestui drum. În acest caz, funcția

$$g(z) = \int_{z_0}^z f(z) dz \quad (11)$$

privită ca funcție de limita superioară de integrare este de asemenea olomorfă în \mathcal{D} , întrucât ea este uniformă și monogenă, derivata ei fiind

$$g'(z) = f(z). \quad (12)$$

Orice funcție $g(z)$ ce verifică relația (12) se numește o *primitivă* a lui $f(z)$. Integrala definită (11) este una din primitivele lui $f(z)$, și calculul cu primitive poate fi folosit în domeniul complex, ca și în cel real.

Ținând seama de cele spuse relativ la integrala (4.27), din (4.43), (4.44) avem pentru $f(z)$ olomorfă într-un domeniu multiplu conex:

$$\int_{\mathcal{C}} f(z) dz = \int_{\mathcal{C}_1} f(z) dz + 2\pi i \sum_{j=1}^m n_j I_j, \quad (13)$$

unde

$$I_j = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}_j} f(z) dz. \quad (14)$$

Curba \mathcal{C}_1 are aceleași capete și același sens cu \mathcal{C} , și nu traversează nici una din tăieturile ce transformă domeniul \mathcal{D} într-un domeniu simplu conex $\tilde{\mathcal{D}}$. Funcția $\int_{\mathcal{C}_1} f(z) dz$ este deci uniformă.

Asupra naturii funcției (13) vom reveni în (60).

Teorema lui Cauchy (10) conduce la *formula lui Cauchy*: dacă $f(z)$ este olomorfă în \mathcal{D} , atunci pe orice curbă închisă \mathcal{C} interioară lui \mathcal{D} avem

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(t)}{t - z} dt, \quad z \in \mathcal{A}^+, \quad \mathcal{C} = \text{fr } \mathcal{A}^+, \quad t \in \mathcal{C}. \quad (15)$$

Formula rămâne valabilă pentru un ansamblu de curbe închise, situate în interiorul lui \mathcal{D} , și definind un domeniu $\mathcal{A}^+ \subset \mathcal{D}$. Ea rămâne valabilă și pe \mathcal{L} , dacă $f(z) \in C^0(\mathcal{D} + \mathcal{L})$.

Prin derivare, căpătăm din (15)

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(t)}{(t - z)^{n+1}} dt; \quad z \in \mathcal{D}, \quad t \in \mathcal{C}. \quad (16)$$

Orice funcție olomorfă în \mathcal{D} are deci derivate de orice ordin în \mathcal{D} , și împărțirea funcțiilor în clase C^p își pierde sensul. Despre existența și comportarea derivatelor (16) pe \mathcal{L} nu se poate spune nimic a-priori.

În vecinătatea oricărui punct z_0 aparținând domeniului ei de olomorfie, funcția $f(z)$ poate fi scrisă sub forma unei dezvoltări în *serie Taylor*:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n (z - z_0)^n, \quad (17)$$

unde

$$f_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} f(t) (t - z_0)^{-n-1} dt; \quad t \in \mathcal{C}, \quad n \geq 0. \quad (18)$$

Un punct în care (17) nu este valabilă se numește *punct singular* (de caracter uniform — întrucât $f(z)$ este uniformă).

Reciproc, considerînd serii de forma (17), unde coeficienții sînt niște numere complexe oarecare, se poate demonstra:

a) *prima teoremă a lui Abel*: dacă seria (17) este convergentă în z_1 , ea este absolut convergentă în interiorul cercului $S(z_0, |z_1 - z_0|)$;

b) *teorema lui Cauchy-Hadamard*: seria (17) este absolut convergentă în interiorul cercului $S(z_0, R^0)$ (numit *cerc de convergență*) unde ⁴⁾

$$1/R^0 = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|f_n|}; \quad (19)$$

⁴⁾ Dată fiind o mulțime de numere reale a_n , se notează $\overline{\lim} a_n$ acela dintre punctele de acumulare ale mulțimii situat cel mai la dreapta pe axa reală.

în exteriorul acestui cerc, seria este divergentă; despre convergența ei pe însuși cercul considerat, nu se poate spune nimic a priori.

Convergența seriei (17) este uniformă în orice compact interior cercului de convergență.

În interiorul cercului de convergență, suma seriei (17) este o funcție olomorfă, iar seria (17) rezultă a fi chiar seria Taylor a acestei funcții. În felul acesta, se stabilește în fond identitatea între definiția olomorfiei după Cauchy (cu ajutorul noțiunii de monogeneitate) și definiția analiticității după Weierstrass (cu ajutorul seriilor de puteri convergente).

Există deci o corespondență biunivocă între funcțiile olomorfe și seriile Taylor corespunzătoare lor: aceasta este *teorema de unicitate* pentru seriile Taylor (fără echivalent în domeniul real).

Din convergența uniformă a seriei (17) rezultă că derivata de orice ordin a sumei sale poate fi obținută prin derivare termen cu termen. Raza de convergență a seriilor astfel obținute este deci tot R^0 (ceea ce rezultă și direct din (19)).

Din (18) urmează, în interiorul cercului de convergență:

$$|f_n| \leq M(R)/R^n, \quad n \geq 0, \quad \text{unde } M(R) = \max |f(z)|, |z - z_0| = R. \quad (20)$$

În particular, pentru $R < R^0$ avem evident $M(R) \leq M$, și deci

$$|f_n| \leq M/R^n \text{ pentru } R < R^0. \quad (21)$$

Coincidența între dezvoltările în serii Taylor (convergente) și funcțiile olomorfe într-un cerc conduce la considerarea *seriilor Laurent*:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n (z - z_0)^n. \quad (22)$$

Partea corespunzătoare indicilor $n \geq 0$ poartă numele de *parte regulată*; cea corespunzătoare indicilor $n < 0$, de *parte principală* a seriei.

Partea regulată este o serie Taylor, convergentă în interiorul cercului $S(z_0, R^0)$. Prin intermediul unei inversiuni $Z = 1/(z - z_0)$, partea principală din (22) devine partea regulată a unei funcții de Z , nule în origine:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_{-n} (z - z_0)^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{-n} Z^n. \quad (23)$$

Notînd cu $1/R^1$ raza de convergență a seriei în Z obținute, avem din (19):

$$R^1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|f_{-n}|}. \quad (24)$$

Prin urmare, partea principală a dezvoltării (22) converge absolut și uniform în orice punct $|Z| < 1/R^1$, așadar în exteriorul cercului $S(z_0, R^1)$.

Orice serie Laurent este deci absolut convergentă în interiorul unei *coroane circulare*, și uniform convergentă în orice compact interior coroanei considerate. Valoarea R^1 depinde numai de coeficienții părții principale, iar R^0 , numai de coeficienții părții regulate a funcției. Pentru ca dezvoltarea să aibă sens, trebuie desigur să avem $R^1 < R^0$.

În această coroană, suma $f(z)$ a seriei (22) este olomorfă, și avem

$$f_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} f(t) (t - z_0)^{-n-1} dt; \quad t \in \mathcal{C}, n = 0, +1, +2, \dots, \quad (25)$$

ceea ce generalizează (18); \mathcal{C} este o curbă simplă închisă din interiorul coroanei, și care conține în interior cercul de rază R^1 .

În cazul particular în care $f(z)$ este olomorfă în interiorul unui cerc cu centrul în z_0 , avem $f_n = 0$ pentru $n < 0$ (vezi (10)).

Făcînd uz de o translație și o omotetie, vom scrie adesea (22) sub forma

$$(\zeta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n \zeta^n, \quad (26)$$

unde

$$f_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} f(\sigma) \sigma^{-n-1} d\sigma, \quad (27)$$

unde am notat cu γ cercul-unitate, cu $\sigma = \exp(i\theta)$ un punct curent de pe γ , cu ζ un punct curent din plan. (Aceasta presupune că $f(\zeta)$ e prelungibilă pe γ .)

Dacă seria (26) se reduce la partea ei regulată, funcția este olomorfă în interiorul unui cerc cu centrul în origine, *inclusiv* în origine. Dacă $f_n = 0$ pentru $n > m \geq 0$ (și desigur și pentru $n < 0$), funcția se reduce la un polinom de grad m . Relațiile (18) arată legătura dintre anularea coeficienților f_n de la un anumit indice în sus, și proprietatea funcției de a fi un polinom (deci, de a avea derivate nule de la un anumit ordin în sus). În acest caz, chestiunea de convergență nu se pune, suma are sens pentru orice punct la distanță finită (dar nu și în punctul de la infinit!) și deci avem $R^0 = \infty$.

Dacă funcția nu este un polinom, dar totuși avem $R^0 = \infty$, ea se numește *funcție întreagă* (exemple elementare: $\exp \zeta$, $\sin \zeta$).

Dacă seria (26) se reduce la partea sa principală, funcția este olomorfă în exteriorul unui cerc cu centrul în origine, *inclusiv* în punctul de la infinit. Dacă $f_{-n} = 0$ pentru $n > m > 0$, funcția se reduce la un polinom în $1/\zeta$, și suma are sens în orice punct din plan, cu excepția originii: avem deci $R^1 = 0$. O funcție a cărei parte principală este un polinom de grad m în $1/\zeta$ se zice că are un *pol* de ordin m în origine (sau în general în punctul z_0 , corespunzător originii în transformarea despre care am vorbit mai sus). Întrucît atașăm termenul constant la partea regulată a funcției, rezultă că punctul de la infinit poate fi eventual un pol de ordin zero (pentru alte puncte, utilizarea acestei noțiuni nu are sens). O astfel de funcție este deci olomorfă într-o coroană circulară de raze $R^1 = 0$ și R^0 , *ceea ce nu trebuie confundat cu proprietatea de olomorfie în cercul de rază R^0* .

O funcție care nu are alte singularități în afară de poli se numește *meromorfă*. Orice funcție meromorfă poate fi pusă sub forma raportului a două funcții întregi. Într-un domeniu mărginit, o funcție meromorfă poate avea numai un număr finit de poli.

Dacă partea principală din (26) are o infinitate de termeni, originea (sau punctul z_0 care-i corespunde) se numește *punct singular esențial* (de caracter uniform) al funcției considerate.

O deosebită importanță o are *reziduul* funcției $f(z)$ în z_0 :

$$f_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} f(z) dz. \quad (28)$$

Dacă \mathcal{C} conține în interior *mai mulți* poli (dar nu și alte singularități), integrala (28) rezultă egală cu *suma* reziduurilor respective. Această teoremă — care poartă numele de *teorema reziduurilor* — permite calcularea simplă a anumitor integrale curbilinii.

Dacă z_0 este un pol de ordin p , putem scrie

$$f(z) = (z - z_0)^{-p} g(z), \quad g(z_0) \neq 0, \quad (29)$$

și atunci pentru reziduul în z_0 obținem valoarea

$$f_{-1} = [(p-1)!]^{-1} g^{(p-1)}(z_0). \quad (30)$$

Nu insistăm aci asupra teoremelor clasice relative la funcțiile olomorfe sau meromorfe. Pentru informații, vezi oricare din tratatele indicate la pag. 684.

b) Funcții multiforme

Vom aminti acum unele proprietăți esențiale ale funcțiilor *multiforme*, pornind de la două funcții elementare.

Fie mai întâi funcția

$$z = \zeta^p, \quad p \text{ întreg}, \quad p \geq 2. \quad (31)$$

Această funcție este uniformă, dar nu și univalentă; notînd

$$z = R \exp(i\chi), \quad \zeta = \rho \exp(i\theta), \quad (32)$$

și ținînd seama că

$$\exp(2\pi i) = \cos 2\pi + i \sin 2\pi = 1, \quad (33)$$

constatăm că celor p puncte distincte

$$\zeta_k = \rho \exp\left[i\left(\theta + k \frac{2\pi}{p}\right)\right], \quad k = 0, 1, 2, \dots, p-1, \quad (34)$$

le corespunde un același punct $z = \rho^p \exp(ip\theta)$.

Funcția (31) devine însă univalentă dacă restrîngem domeniul ei de definiție la un domeniu care să nu conțină puncte (34) distincte, de pildă la un sector

$$k(2\pi/p) < \theta < (k+1)(2\pi/p). \quad (35)$$

Să considerăm acum funcția

$$z = \zeta^{1/p}, \quad p \text{ întreg}, \quad p \geq 2, \quad (36)$$

care este (abstracție făcând de notație) inversa funcției (31). Această funcție este univalentă, dar nu și uniformă. Într-adevăr, întrucît pentru orice k întreg avem

$$\zeta = \rho \exp(i\theta) = \rho \exp[i(\theta + 2k\pi)], \quad (37)$$

din (36) rezultă mai departe

$$\delta_k = \sqrt[p]{\rho} \exp\left[i\left(\frac{\theta}{p} + k\frac{2\pi}{p}\right)\right], \quad k = 0, 1, 2, \dots, p-1, \quad (38)$$

așadar p puncte distincte în planul δ .

Prin urmare dacă punctul ζ descrie o curbă închisă J care nu trece prin origine și nu o cuprinde în interior, atunci drept imagine a lui J în planul δ se obțin p curbe închise distincte \mathcal{L} , rotite unele față de altele de unghiuri $2\pi/p$ și care în transformarea $\zeta = \delta^p$ au toate aceeași imagine J . Într-un domeniu în care nu există curbe închise care conțin în interior originea, funcția (36) se zice că are p ramuri uniforme (deci olomorfe). Pentru a le deosebi între ele, este suficient să precizăm valoarea $\delta_{0,k}$ ce corespunde unui anumit punct ζ_0 .

Dacă însă curba J conține originea în interior, imaginea sa este o curbă deschisă, și e necesară parcurgerea lui J de p ori pentru ca punctul-imagine să revină în planul δ la poziția inițială. Ramurile funcției nu mai sînt deci separate, și prin variația lui ζ se trece continuu de pe o ramură a funcției pe alta.

Efectuînd o tăietură de la J la origine, se obțin din nou p ramuri distincte, continue și uniforme, ale funcției în domeniul modificat. Dar pe cele două borduri ale tăieturii funcția ia valori (are determinări) diferite, care trebuie precizate stabilind ramura pe care ne aflăm (așadar, prin continuitate).

Să luăm drept exemplu cazul $p = 3$:

$$\delta = \zeta^{1/3}. \quad (39)$$

Din (38) avem deci

$$\delta = \zeta^{1/3} = \sqrt[3]{\rho} \exp\left[i\left(\frac{\theta}{3} + k\frac{2\pi}{3}\right)\right], \quad k = 0, 1, 2. \quad (40)$$

Luînd drept curbă J cercul-unitate γ din planul ζ , obținem imaginile din figurile A.5.1 sau A.5.2, după cum considerăm domeniul J^+ (discul unitate), sau același domeniu tăiat în lungul semiaxe ξ_1 negative, așadar după segmentul $[-1, 0]$. În aceste figuri, am însemnat cu indici ('), (''), ('''') punctele-imagine ce corespund primei, celei de a doua și celei de a treia parcurgeri a cercului γ în același sens. În figura A.5.2, segmentul $[-1, 0]$ are trei imagini (duble) posibile. Întrucît pe semi-axa ξ_1 negativă avem $\theta = \pi$, putem nota aci

$$\zeta = -\tau = \tau \exp(i\pi), \quad 0 \leq \tau \leq 1, \quad (41)$$

astfel că din (40) deducem (folosind formula lui Euler (9.6))

$$\delta = \zeta^{1/3} = \begin{cases} (1/2) \sqrt[3]{\tau} (1 + i\sqrt{3}), \\ -\sqrt[3]{\tau}, \\ (1/2) \sqrt[3]{\tau} (1 - i\sqrt{3}). \end{cases} \quad (42)$$

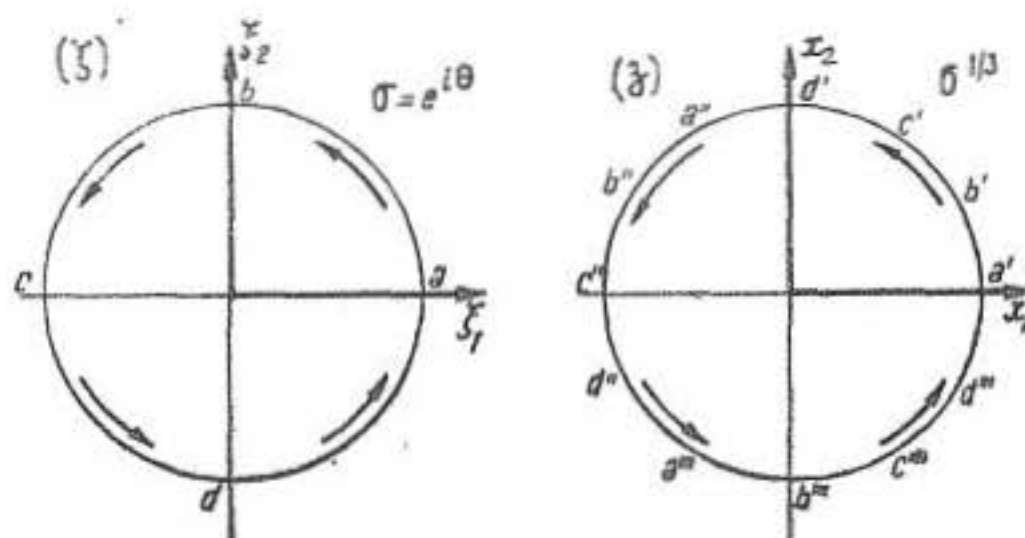


Fig. A.5.1

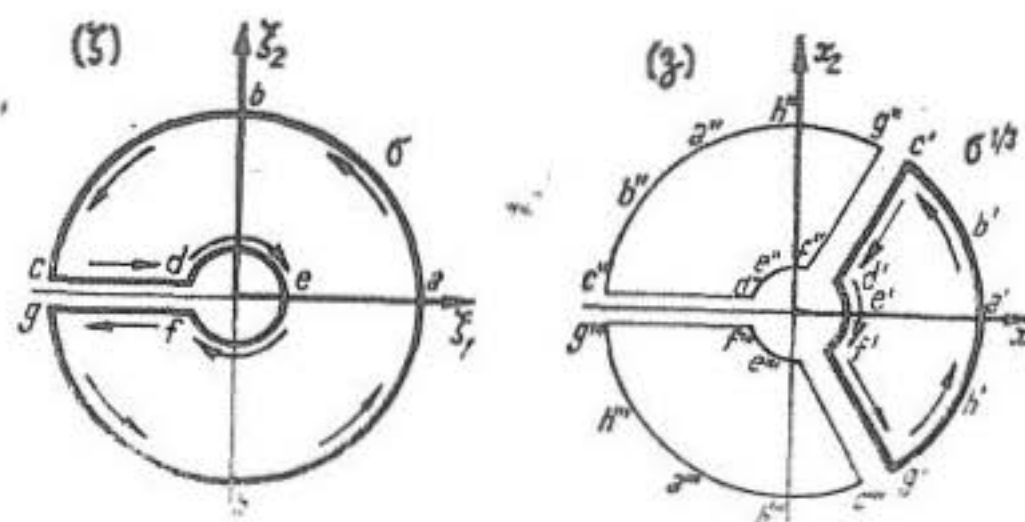


Fig. A.5.2

Pentru a separa ramurile funcției, să considerăm de pildă punctul $\zeta_0 = 1$, căruia îi corespund imaginile $z_{0;0} = 1$, $z_{0;1} = -\frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3})$ și $z_{0;2} = -\frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})$ (adică punctele a' , a'' , a''' din fig. A.5.2). Ramura corespunzătoare lui $k = 0$ dă atunci valorile

$$\zeta^{1/3} = \begin{cases} \sqrt[3]{\zeta} (1 + i\sqrt{3}) & \text{pe bordul superior,} \\ \sqrt[3]{\zeta} (1 - i\sqrt{3}) & \text{pe bordul inferior.} \end{cases} \quad (43)$$

Ramura $k = 1$ dă valorile $-\sqrt[3]{\zeta}$ pe bordul superior, respectiv $\sqrt[3]{\zeta} (1 + i\sqrt{3})$ pe cel inferior. În fine, ramura $k = 2$ dă valorile $\sqrt[3]{\zeta} (1 - i\sqrt{3})$, respectiv $-\sqrt[3]{\zeta}$ pe bordurile considerate.

Alegând $p = 2$, obținem funcția cu două ramuri (vezi fig. A.5.3)

$$z = \zeta^{1/2}. \quad (44)$$

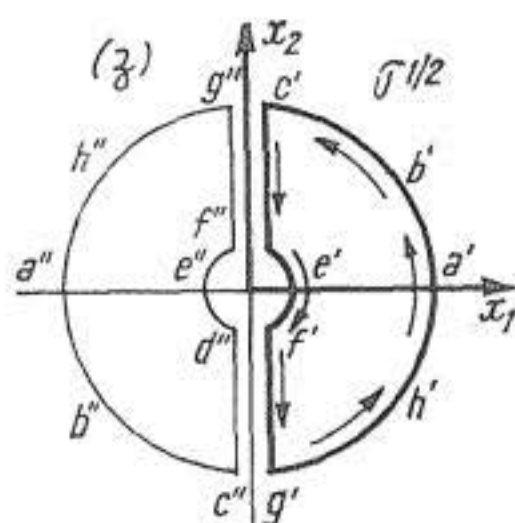


Fig. A.5.3

Din (41) urmează pentru ramura $k = 0$

$$\zeta^{1/2} = \begin{cases} i\sqrt{\zeta} & \text{pe bordul superior,} \\ -i\sqrt{\zeta} & \text{pe bordul inferior.} \end{cases} \quad (45)$$

A doua ramură $k = 1$ dă aceleași valori, cu semnele schimbate.

În figurile A.5.2 și A.5.3, imaginile cercului γ tăiat după segmentul $[-1, 0]$, prin intermediul ramurilor $k = 0$ ale funcțiilor (39), respectiv (44), sînt trasate îngroșat.

Funcția exponențială

$$z = \exp \zeta \quad (46)$$

este, ca și funcția (31), uniformă. Dat fiind că avem $\exp(2\pi i) = 1$, ea e periodică și deci nu poate fi univalentă. În orice bandă

$$2k\pi < \operatorname{Im} \zeta < (2k + 1)\pi, \quad (47)$$

ea devine însă univalentă. Spre deosebire de cazul funcției (31), pentru funcția (46) numărul benzilor de univalență nu este finit.

Inversa funcției exponențiale este funcția logaritmică

$$z = \ln \zeta,$$

care e univalentă, dar nu și uniformă.

Dacă ζ parcurge o curbă închisă \mathcal{M} ce nu conține în interior originea și nu trece prin ea, drept imagine a ei în planul z putem lua oricare dintre curbele închise \mathcal{L} , deplasate unele față de celelalte cu $2\pi i$; evident, numărul acestor curbe nu este finit. Dacă însă \mathcal{M} conține în interior originea, atunci imaginea sa este o curbă deschisă; la parcurgerea repetată a lui \mathcal{M} , punctul z descrie un drum continuu alcătuit din curbe deschise cu capete comune, deplasate unele față de celelalte cu $2\pi i$.

Folosind notația (4.37), avem pentru orice curbă \mathcal{C} care înconjură o singură dată originea în sens direct:

$$[\ln \zeta]_{\mathcal{C}} = 2\pi i. \quad (49)$$

În domenii în care nu există curbe închise care conțin în interior originea, funcția logaritmică — spre deosebire de funcția (36) — admite o *infinițate* de ramuri distincte. Întrucît

$$z = \exp(\ln z), \quad z^{1/p} = \exp[(\ln z)/p], \quad (50)$$

scriind relația (49) în planul z conchidem că $[z^{1/p}]_{\mathcal{C}} = \exp(2\pi i/p)$, ceea ce explică motivul pentru care funcția $z^{1/p}$ — spre deosebire de cea logaritmică — este periodică.

Pentru ambele funcții, originea e un punct singular de caracter *multiform*. Astfel de puncte se numesc *puncte de ramificare*.

Să arătăm cu acest prilej în ce fel formula (49) ne ajută să determinăm natura funcției $I(\zeta, \bar{\zeta})$ din (4.27). Anume, după o translație de axe, deducem evident

$$[\ln(\zeta - \zeta_j)]_{\mathcal{L}_h} = 2\pi i \delta_{jh}, \quad \zeta_j \in \mathcal{D}_j^+, \quad (51)$$

\mathcal{L}_h putînd fi înlocuit cu orice curbă închisă \mathcal{C} care conține în interior (ocolind-o o singură dată) componenta \mathcal{L}_h a frontierei domeniului multiplu conex \mathcal{D} , și numai pe ea.

(Remarcăm aci că funcția logaritmică satisface condițiile (4.37) și (4.39). Există funcții multiforme elementare care nu le satisfac, ca de pildă $\zeta^{1/p}$ sau $\zeta \ln \zeta$.)

Pentru funcția

$$a(\zeta) = \sum_{j=1}^m I_j \ln(\zeta - \zeta_j), \quad \zeta \in \mathcal{D}_j^+, \quad (52)$$

unde I_j sînt constantele (4.43), avem deci

$$[a(\zeta)]_{\mathcal{L}_j} = 2\pi i I_j, \quad (53)$$

de unde urmează că funcția $I_0(\zeta, \bar{\zeta}) = I(\zeta, \bar{\zeta}) - a(\zeta)$ are perioadele nule. Așadar, putem scrie

$$I(\zeta, \bar{\zeta}) = \sum_{j=1}^m I_j \ln(\zeta - \zeta_j) + I_0(\zeta, \bar{\zeta}), \quad (54)$$

unde $I_0(\zeta, \bar{\zeta})$ este o funcție uniformă în domeniul multiplu conex \mathcal{D} .

Alegerea funcției (52) nu este unică. În primul rînd, ea depinde de alegerea punctelor ζ_j în \mathcal{D}_j^+ . Mai departe, în loc de (51) putem scrie

$$[\ln(\bar{\zeta} - \bar{\zeta}_j)]_{\mathcal{L}_h} = -2\pi i \delta_{jh}, \quad \zeta_j \in \mathcal{D}_j^+, \quad (55)$$

astfel că din (51) și (55) urmează

$$\left[\frac{1}{2} \ln \frac{\zeta - \zeta_j}{\bar{\zeta} - \bar{\zeta}_j} \right]_{\mathcal{L}_h} = 2\pi i \delta_{jh}, \quad \zeta_j \in \mathcal{D}_j^+. \quad (56)$$

Cu aceasta, sîntem conduși, în loc de (52), la funcția

$$2b(\zeta, \bar{\zeta}) = \sum_{j=1}^m I_j \ln \frac{\zeta - \zeta_j}{\bar{\zeta} - \bar{\zeta}_j}, \quad (57)$$

ceea ce dă — în loc de (54) — reprezentarea

$$I(\zeta, \bar{\zeta}) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m I_j \ln \frac{\zeta - \zeta_j}{\bar{\zeta} - \bar{\zeta}_j} + I_0(\zeta, \bar{\zeta}). \quad (58)$$

Formula (54) separă termenul multiform din $I(\zeta, \bar{\zeta})$ sub forma unei funcții de o singură variabilă ζ . Formula (58) pune în evidență partea imaginară, multiformă, a funcției logaritmice, și o elimină cu totul pe cea reală, uniformă:

$$\ln \frac{\zeta - \zeta_j}{\bar{\zeta} - \bar{\zeta}_j} = 2i \arg(\zeta - \zeta_j). \quad (59)$$

Odată cu modificarea termenilor logaritmici, se modifică desigur și funcția $I_0(\zeta, \bar{\zeta})$; dar caracterul ei de funcție uniformă rămîne intact.

Aceste formule ne vor fi utile în două cazuri.

Mai întâi, din (54) urmează pentru $f(z)$ olomorfă în \mathcal{D}

$$g(z) = \int f(z) dz = \sum_{j=1}^m \gamma_j \ln(z - z_j) + g_0(z), \quad (60)$$

unde $g_0(z)$ este uniformă, deci olomorfă în \mathcal{D} , iar

$$\gamma_j = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{L}_j} f(z) dz. \quad (61)$$

Pe de altă parte, de formula (58) este comod să facem uz pentru a determina funcția armonică f_2 conjugată cu o funcție armonică dată f_1 . Anume, din (5) avem

$$f_2(z, \bar{z}) = \int f_{2,z} dz + f_{2,\bar{z}} d\bar{z} = -i \int f_{1,z} dz - f_{1,\bar{z}} d\bar{z}. \quad (62)$$

Dacă derivatele lui f_1 sînt uniforme, (62) este de tipul integralei (4.27), și atunci

$$f_2(z, \bar{z}) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m f_2^j \ln \frac{z - z_j}{\bar{z} - \bar{z}_j} + f_2^0(z, \bar{z}), \quad (63)$$

unde $f_2^0(z, \bar{z})$ este o funcție uniformă, și unde constantele

$$f_2^j = -\frac{1}{2\pi} \oint_{\mathcal{L}_j} f_{1,z} dz - f_{1,\bar{z}} d\bar{z} \quad (64)$$

sînt pur imaginare. Din (59) deducem acum că atît termenii logaritmici cît și funcția uniformă $f_2^0(z, \bar{z})$ au valori reale.

Dacă derivatele funcției f_1 sînt multiforme, poate fi convenabil să separăm mai întâi partea lor multiformă și să determinăm direct componenta corespunzătoare a conjugatei.

Exemplele simple ale funcțiilor (31), (46) pun în evidență legătura dintre proprietățile de uniformitate și univalență. Singura funcție univalentă în tot planul este funcția omografică (vezi § 8, exemplul α):

$$z = (a\zeta + b)/(c\zeta + d). \quad (65)$$

De aci se vede că funcții multiforme pot apare prin inversarea unor funcții uniforme, care nu sînt univalente în domeniile lor de definiție.

În general, să considerăm funcția uniformă

$$z = f(\zeta) = f_0 + f_1(\zeta - \zeta_0) + f_2(\zeta - \zeta_0)^2 + \dots \quad (66)$$

Dacă $f_1 = f'(\zeta_0) \neq 0$, atunci există un disc cu centrul în ζ_0 și de rază mai mică decît raza de convergență R^0 , în care funcția $f(\zeta)$ este univalentă. În domeniul-imagine al acestui disc, funcția $\zeta = f^{-1}(z)$ este deci uniformă și olomorfă.

Dacă însă $f'(\zeta_0) = 0$, un astfel de disc nu există și funcția inversă nu este desfășurabilă în serie Taylor. În schimb, dacă prima derivată nenulă în ζ_0 este $f^{(p)}(\zeta_0) \neq 0$, $p \geq 2$, atunci se obține seria

$$\zeta = \zeta_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n (z - z_0)^{n/p}. \quad (67)$$

Acest raționament sugerează a se considera mai general serii de puteri fracționare, numite *serii Lagrange* :

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n(z - z_0)^{n/p}. \quad (68)$$

Este evident că sumele unor astfel de serii sînt funcții multiforme, de același tip cu funcția elementară (36). (Notăm că, chiar dacă avem $f'(z_0) \neq 0$, inversa seriei (66) este — în exteriorul discului despre care am vorbit mai sus — de asemenea multiformă.)

Punctul z_0 poartă numele de *punct critic* (sau de *ramificare*) de ordin p . Dacă termenii cu puteri fracționare sînt în număr finit, el se numește *punct critic algebric*. În caz contrar el se numește *punct critic transcendent*.

Separarea ramurilor uniforme ale funcției multiforme (68) se face — în principiu — la fel ca în cazul funcției elementare (36), așadar prin determinarea domeniului de univalență al funcției inverse.

Notăm că pentru a calcula derivata unei funcții multiforme, trebuie să precizăm întotdeauna ramura uniformă la care ne referim (vezi pag. 712).

c) Prelungire analitică

Să considerăm o funcție $f_0(z)$, olomorfă într-un domeniu \mathcal{D} de frontieră \mathcal{L} . (Indicele „zero” arată aici faptul că funcția este olomorfă, deci uniformă.) Domeniul \mathcal{D} și funcția $f_0(z)$ primate împreună poartă numele de *element* $\{\mathcal{D}, f_0\}$. Un punct-frontieră se numește *regulat*, dacă există un disc cu centrul în acest punct și avînd raza nenulă, disc în care funcția $f_0(z)$ să fie desfășurabilă în serie Taylor (convergentă).

În felul acesta, prin punctele regulate se realizează *prelungirea* funcției $f_0(z)$ în afara domeniului ei inițial de definiție \mathcal{D} ; astfel apare ideea de funcție definită de *mai multe* elemente tayloriene, convergente în discuri ce se acoperă parțial.

Punctele-frontieră care nu sînt regulate se numesc *puncte singulare*. Prin repetarea operației de prelungire, sîntem conduși (în general, după un lanț infinit de operații) la a considera ansamblul elementelor tayloriene obținute prin toate operațiile de prelungire posibile, și mulțimea obținută prin reunirea tuturor discurilor de convergență ale acestor elemente. Această mulțime poartă numele de *domeniu de definiție complet* (weierstrassian) al funcției considerate, iar funcția $f(z)$ astfel definită, de *funcție analitică completă* (în sensul lui Weierstrass). Domeniul de definiție complet este prin construcție o mulțime deschisă, a cărei frontieră e alcătuită numai din puncte singulare.

Funcția $f(z)$ la care am fost conduși pornind de la $f_0(z)$ este în general *multiformă*. Într-adevăr, după un lanț de operații putem reveni în discul de convergență al unui element taylorian — dar fără garanția de a reveni la *același* element. În felul acesta, procesul de prelungire analitică al unei funcții olomorfe poate conduce la funcții multiforme.

Funcțiile uniforme care se pot obține în cursul procesului de prelungire poartă numele de *ramuri* ale funcției multiforme.

Un caz important în care prelungirea analitică se face însă cu păstrarea uniformității este dat de *teorema monodromiei*: dacă funcția olomorfă $f_0(z)$ poate fi prelungită analitic în lungul *oricărei* curbe jordaniene dintr-un domeniu simplu-conex \mathcal{D} , atunci funcția analitică $f(z)$ definită în \mathcal{D} prin acest proces este uniformă, deci olomorfă.

Procesul prelungirii analitice poate fi simplificat dacă se face uz și de elementele Laurent și Lagrange. (În vecinătatea unui punct critic sau a unui pol, este necesară o infinitate de elemente tayloriene — pe care le putem înlocui cu un singur element Lagrange sau Laurent.) Mulțimea *tuturor* elementelor obținute în procesul de prelungire poartă numele de *funcție analitică completă* (riemanniană), iar domeniul ei de definiție, *domeniu de definiție complet* (riemannian). Acesta se deosebește de domeniul weierstrassian prin aceea că conține punctele singulare ca puncte interioare.

Există rezultate care afirmă posibilitatea prelungirii analitice și permit construirea efectivă a funcției prelungite.

Astfel, fie că frontiera \mathcal{I} a unui domeniu \mathcal{D} în care este definită funcția $f(\zeta)$ conține un *arc de cerc* \mathcal{I}' (în particular: un segment de dreaptă). Luând originea în centrul cercului de rază R căruia îi aparține arcul \mathcal{I}' , vom spune că două puncte sînt *simetrice* față de \mathcal{I}' dacă ele au același argument și produsul afixelor lor este egal cu R^2 ; în acest sens, punctele ζ , $R^2/\bar{\zeta}$ sînt simetrice. Dacă arcul se reduce la un segment de dreaptă, alegînd această dreaptă drept axă reală, vom spune că punctele ζ , $\bar{\zeta}$ sînt simetrice.

Folosind acești termeni, se poate demonstra *principiul simetriei* (Riemann-Schwarz): fie dată funcția $f(\zeta)$ meromorfă în domeniul \mathcal{D} a cărui frontieră \mathcal{I} conține un *arc de cerc* \mathcal{I}' , pe care funcția $f(\zeta)$ este prelungibilă prin continuitate, și fie că imaginea \mathcal{Z}' a arcului \mathcal{I}' prin intermediul transformării $z = f(\zeta)$ este de asemenea un arc de cerc. Atunci funcția $f_*(\zeta)$ definită ca luînd în puncte simetrice cu ζ față de \mathcal{I} , valori simetrice cu $z = f(\zeta)$ față de \mathcal{Z}' , este prelungirea analitică (de asemenea meromorfă) a funcției $f(\zeta)$ în domeniul astfel extins.

Acest principiu stabilește deci o legătură simplă între ideea de *prelungire prin continuitate* pe o curbă-frontieră circulară și cea de *prelungire analitică* dincolo de această curbă, dînd totodată valorile funcției astfel prelungite.

El poate fi generalizat sub forma *principiului lui Schwarz*: dacă funcția $f(\zeta)$, meromorfă în domeniul \mathcal{D} a cărui frontieră \mathcal{I} conține un arc *analitic* \mathcal{I}' , este prelungibilă prin continuitate pe \mathcal{I}' , și dacă imaginea \mathcal{Z}' a acestui arc este de asemenea un arc analitic — atunci funcția dată poate fi prelungită analitic dincolo de \mathcal{I}' .

Principiul lui Schwarz e mai general decît principiul simetriei, dar el nu permite construirea atît de simplă a funcției prelungite.

d) Teoreme de unicitate

O funcție de punct este definită dacă se dă o mulțime de puncte, și o lege după care fiecărui punct i se pune în corespondență un punct (sau un număr) determinat. În anumite împrejurări, este suficient ca această lege să fie stabilită pentru o categorie mai restrânsă de elemente, pentru ca ea să rezulte totuși deplin caracterizată pe o mulțime mai cuprinzătoare.

Astfel, pentru determinarea unui polinom de grad p , este suficient să cunoaștem valoarea sa în $p + 1$ puncte; valori date arbitrar în alte puncte sînt fie inutile, fie nu „concordă” cu cele $p + 1$ valori deja date; de aci rezultă că două polinoame de grad p ale căror valori coincid în $p + 1$ puncte, sînt identice.

Funcțiile olomorfe se bucură de o proprietate analogă. Într-adevăr, fie dată o mulțime de puncte ζ_k care posedă un singur punct de acumulare ζ_0 , și o lege care pune în corespondență fiecărui ζ_k un număr complex δ_k . Dacă există o funcție olomorfă $z = f(\zeta)$ definită de aceste date, și dacă ea este definită și în ζ_0 , atunci ea trebuie căutată sub forma

$$f(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(\zeta - \zeta_0)^n, \quad (69)$$

unde coeficienții f_n trebuie determinați din condițiile

$$f(\zeta_k) = \delta_k. \quad (70)$$

Pentru aceasta, este necesar ca funcția căutată să fie mai întîi continuă în ζ_0 , așadar să existe limita

$$f(\zeta_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(\zeta_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \delta_k = f_0, \quad (71)$$

ceea ce determină coeficientul f_0 . Mai departe, este necesar să existe derivatele de orice ordin în ζ_0 , ceea ce conduce la valorile

$$\frac{f^{(p)}(\zeta_0)}{p!} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{f(\zeta_k) - \sum_{n=0}^{p-1} f_n(\zeta_k - \zeta_0)^n}{(\zeta_k - \zeta_0)^p} = f_p. \quad (72)$$

Așadar, dacă limitele ce apar în aceste formule există (ceea ce depinde în definitiv de șirurile ζ_k, δ_k), atunci toți coeficienții f_n pot fi determinați și funcția $f(\zeta)$ poate fi scrisă sub forma (69).

Seria din (69) este convergentă, dacă pentru raza ei de convergență avem $R^0 > 0$. Dacă și această proprietate (care depinde de coeficienții f_n , așadar tot de numerele ζ_k, δ_k) este satisfăcută, atunci funcția $f(\zeta)$ este construită și are o valoare deplin determinată în orice punct din interiorul cercului $S(\zeta_0, R^0)$. (Valori δ_k în puncte ζ_k care au drept punct de acumulare ζ_0 un punct singular, nu pot conduce la construcția dorită. Rezultatul $R^0 = 0$ va arăta aceasta.)

Prelungirea analitică a acestei funcții se poate face acum pe calea obișnuită, și în acest fel darea șirurilor ζ_k, δ_k se dovedește suficientă pentru a defini funcția analitică completă, în domeniul ei complet de existență.

Construcția de mai sus arată că *nu orice* șiruri de valori δ_k în puncte ζ_k determină o funcție olomorfă. Iar dacă ele o determină, atunci darea valorilor ei în alte puncte (de pildă, chiar pe o mulțime ce posedă numai două puncte de acumulare) este fie superfluă, fie contradictorie.

Din cele de mai sus decurge *teorema de unicitate* (interioară): două funcții olomorfe care coincid pe o mulțime de puncte ce posedă un punct de acumulare în domeniul lor de olomorfie, coincid. În particular, două funcții olomorfe ce coincid pe un subdomeniu al domeniului de olomorfie, sau pe un arc de curbă interior acestui domeniu, sau pe un arc-frontieră care conține un punct regulat, coincid.

De aci rezultă că nu ne putem da arbitrar valorile unei funcții olomorfe pe o astfel de curbă; în particular, *nu orice funcție de punct pe o curbă poate fi privită ca valoare pe acea curbă a unei funcții olomorfe* (compară de ex. cu problema lui Dirichlet pentru ecuația lui Laplace).

Raționamentele de mai sus sînt legate de faptul că punctul ζ_0 apare în definitiv a fi punct interior domeniului de olomorfie. Se poate cerceta chestiunea teoremelor de unicitate (și deci a datelor strict necesare pentru a defini o funcție olomorfă, și mai general o funcție analitică) chiar pentru puncte-frontieră ale domeniului complet de definiție. Pentru astfel de teoreme (studiate inițial de N. Luzin și I. Privalov [1]), vezi G. Goluzin [1], capitolul 10; A. Markușevici [1], § 3.6; I. Privalov [1], [2], § 12.4. Aci vom remarca numai că, dacă dezvoltarea din (69) nu este posibilă, rămîne de cercetat posibilitatea ca ζ_0 să nu fie punct de acumulare al mulțimii punctelor date (de ex., $\zeta_0 = 0$ pentru puncte date pe γ). Proprietățile pretinse în acest caz sînt mult mai puțin severe. Totuși, și aci trebuie spus că *nu orice* funcție dată pe un arc de curbă oarecare poate fi privită ca valoare la limită a unei funcții olomorfe într-un domeniu a cărui frontieră conține arcul în chestiune. De exemplu, condiția ca o funcție de punct pe cercul-unitate $f(\sigma)$ să fie cu variație mărginită este de natură să asigure „acordul” între valorile atribuite funcției pe γ , așa fel ca datele să nu fie contradictorii. Pentru a ne asigura însă că $f(\sigma)$ este chiar valoarea la limită a unei funcții olomorfe în discul unitate, e încă nevoie de alte condiții suplimentare.

De această chestiune ne vom ocupa în §§ 10, 11.

§ 6. REPRESENTAREA CONFORMĂ

În studiul aspectelor geometrice ale teoriei, pe primul plan stau următoarele probleme, puse încă de Riemann: dată fiind o funcție $f(\zeta)$ definită într-un domeniu \mathcal{A} din planul ζ , care sînt proprietățile geometrice ale domeniului-imaginii? Dat fiind un domeniu \mathcal{D} în planul z (cu eventuale suprapuneri), există oare o funcție $f(\zeta)$ așa fel ca \mathcal{D} să fie imaginea, prin intermediul transformării definite de această funcție, a unui domeniu \mathcal{A} din planul ζ ?

Vom aminti în legătură cu aceste probleme unele rezultate teoretice și formule de calcul. Ca material bibliografic general, indicăm: G. Caratheodory [1], volumul 2, partea VI, capitolele 2 și 3; C. Iacob [5], §§ 2.8—2.25; A. Markușevici [1], §§ 5.1 și 5.2; I. Privalov [2], § 2.5 și capitolul 12; S. Stoilov [1], volumul 1, capitolul 5; G. Valiron [1], capitolul 15. Printre

lucrările special consacrate problemei reprezentării conforme, vezi R. Courant și M. Schiffer [1]; P. Filciakov [1]; D. Gaier [1]; G. Julia [1], [2]; W. Koppenfels și F. Stallman [1]; L. Lichtenstein [1]; Z. Nehari [1]. Numeroase formule utile în calculul efectiv sînt date de H. Kober [1].

a) Teoreme fundamentale

Fie dat un domeniu mărginit D de frontieră J în planul variabilei $\zeta = \xi_1 + i\xi_2$ și o funcție $\omega(\zeta)$ definită în D . Dacă această funcție este *uniformă*, atunci ea pune în corespondență *univocă* fiecărui punct $\zeta \in D$, un punct din planul variabilei complexe $z = x_1 + ix_2$:

$$z = \omega(\zeta), \quad (1)$$

și face deci ca domeniului D să-i corespundă o mulțime de puncte \mathcal{D} din planul z . Dacă funcția $\omega(\zeta)$ este și *univalentă*, atunci pentru fiecare punct-*image* z există un singur punct-*obiect* ζ : corespondența este atunci *biunivocă*.

Fie acum că funcția $\omega(\zeta)$ este *olomorfă* în D și — provizoriu — fie și $\omega'(\zeta) \neq 0$ în D . În acest caz, se demonstrează că mulțimea \mathcal{D} este mărginită, conexă și deschisă — așadar *imagea* \mathcal{D} a domeniului D este de asemenea un *domeniu*. Funcția $\zeta = \omega^{-1}(z)$ care realizează transformarea inversă este și ea *olomorfă* în \mathcal{D} și derivata ei este de asemenea diferită de zero. *Imagea* unui cerc infinit mic din D este tot un cerc infinit mic în \mathcal{D} , iar unghiul dintre două elemente liniare din D coincide în mărime și sens cu unghiul elementelor-*image* din \mathcal{D} . Mărimea $|\omega'(\zeta)|$ este modulul dilatării liniare, iar $\arg \omega'(\zeta)$ este unghiul de rotire al imaginii din \mathcal{D} față de elementul-*obiect* din D .

O astfel de transformare poartă numele de *reprezentare conformă* a domeniului D pe \mathcal{D} . Întrucît $\omega(\zeta)$ este *olomorfă*, ea este desfășurabilă în serie Taylor în vecinătatea oricărui punct $\zeta \in D$; aceeași afirmație este valabilă pentru $\omega^{-1}(z)$ în \mathcal{D} .

Dacă într-un punct oarecare am avea $\omega'(\zeta) = 0$, funcția $\zeta = \omega^{-1}(z)$ ar avea un punct critic în punctul corespunzător (vezi § 5, pag. 722 — 723) ceea ce contrazice ipoteza de univalență. Prin urmare, condiția $\omega'(\zeta) \neq 0$ în D nu mai trebuie formulată aparte.

Se poate demonstra că condiția *necesară și suficientă* pentru ca funcția $\omega(\zeta)$ să realizeze o reprezentare conformă a domeniului D , este ca ea să fie *olomorfă și univalentă* în D . (Dacă condiția de univalență nu este satisfăcută, funcția realizează totuși reprezentarea conformă într-o vecinătate suficient de mică a fiecărui punct în care $\omega'(\zeta) \neq 0$.) Punctele în care avem $\omega'(\zeta) = 0$, se numesc *puncte de ramificare* ale reprezentării. Astfel de puncte pot fi situate numai pe frontiera lui D .

Pentru funcția $\omega(\zeta)$, despre care va fi adesea vorba, rămîne deci valabil tot ceea ce s-a spus în § 5 despre funcțiile *olomorfe și univalente*.

Problema centrală a teoriei reprezentării conforme constă în a determina funcțiile care realizează reprezentarea conformă a unui domeniu dat D pe alt domeniu dat \mathcal{D} . Rezultatul fundamental în această direcție

este constituit de *teorema lui Riemann*: date fiind două domenii simplu-conexe oarecari \mathcal{A} și \mathcal{D} , ale căror frontiere constau din cel puțin câte două puncte, și date fiind punctele $\zeta_0 \in \mathcal{A}$, $z_0 \in \mathcal{D}$ (dar altfel arbitrare) și numărul real arbitrar α_0 — există o funcție și numai una $z = \omega(\zeta)$, care reprezintă conform domeniul \mathcal{A} pe domeniul \mathcal{D} , în așa fel încît $z_0 = \omega(\zeta_0)$, $\alpha_0 = \arg \omega'(\zeta_0)$.

Pentru demonstrație, vezi de ex. G. Goluzin [1], cap. 2; C. Iacob [5], § 2.24; M. Lavrentiev și B. Șabat [1], cap. 2, pct. 28; A. Markușevici [1], § 5.3; S. Stoilov [1], vol. 1, cap. 5; G. Valiron [1], § 15.215.

În practică e desigur suficient să cunoaștem funcțiile care reprezintă conform discul unitate pe fiecare din domeniile simplu conexe considerate.

În cazul unui domeniu mărginit multiplu conex \mathcal{D} , avînd drept componente ale frontierei curbele \mathcal{L}_j , care conțin fiecare cel puțin două puncte, *teorema lui Riemann* poate fi convenabil generalizată. Astfel de domenii pot fi reprezentate conform pe domenii multiplu-conexe canonice de diferite tipuri: plan cu tăieturi în arce de cerc concentrice (F. Schottky, 1897); plan cu tăieturi rectilinii paralele (D. Hilbert, 1904); disc cu m orificii circulare interioare (P. Koebe, 1910; 1920). Pentru detalii, vezi de exemplu R. Courant și M. Schiffer [1], capitolul 5; D. Gaier [1], capitolul 5; G. Goluzin [1], capitolul 5; G. Julia [2]; M. Keldiș [1], [2]; M. Keldiș și M. Lavrentiev [1]; Z. Nehari [1], capitolul 7.

În particular, pot fi reprezentate conform unul pe celălalt numai domenii de același ordin de conexiune. Această condiție este necesară, dar nu și suficientă: cu excepția domeniilor simplu conexe, două domenii de același ordin de conexiune *nu pot fi* în general reprezentate conform unul pe celălalt. Astfel, două coroane circulare pot fi reprezentate conform una pe cealaltă dacă și numai dacă raportul razelor lor este același.

Dacă \mathcal{D} este *nemărginit*, există un punct în \mathcal{A} (și numai unul) în care $\omega(\zeta)$ are un pol, și anume un pol simplu. (Dacă polul n-ar fi unic, punctul de la infinit în \mathcal{D} ar fi imagine a mai multor puncte distincte; dacă polul n-ar fi simplu, funcția $z = \omega^{-1}(z)$ ar avea un punct critic algebric la infinit; în ambele cazuri, reprezentarea n-ar mai fi univalentă.)

Prin urmare, dacă \mathcal{A} este mărginit și \mathcal{D} este nemărginit, vom avea

$$z = \omega(\zeta) = \omega_{-1}(\zeta - a)^{-1} + \omega_0(\zeta), \quad (2)$$

cu $\omega_0(\zeta)$ olomorfă. Dacă domeniile sînt nemărginite și punctele de la infinit se corespund, avem (cu $\omega_0(\zeta)$ olomorfă în \mathcal{A} , inclusiv la infinit):

$$z = \omega(\zeta) = \omega_1\zeta + \omega_0(\zeta). \quad (3)$$

Pentru unele exemple elementare de reprezentări conforme, vezi de exemplu M. Lavrentiev și N. Șabat [1], § 2.2.; I. Privalov [2], § 3.3.

b) Corespondența frontierelor

Orice problemă la limită în care se face uz de reprezentarea conformă pe un domeniu canonic în care soluția poate fi mai ușor găsită, obligă la considerarea *valorilor la limită* ale funcțiilor cu care operăm. Este deci necesară cunoașterea proprietăților la limită ale funcțiilor care realizează reprezentarea conformă, așadar studiul lor nu numai în domeniul de definiții, ci și pe frontiera acestuia.

Există o strinsă legătură între aspectul frontierei domeniului \mathcal{D} și proprietățile la limită ale funcției $\omega(\zeta)$.

Astfel, să presupunem că funcția $\omega(\zeta)$ reprezintă conform domeniul canonic \mathcal{H}^+ de frontieră \mathcal{H} (avînd o componentă exterioară $\mathcal{H}_0 = \gamma$ și m componente circulare interioare $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \dots, \mathcal{H}_m$), pe domeniul multiplu-conex \mathcal{D} , de frontieră \mathcal{L} (compusă dintr-o componentă exterioară \mathcal{L}_0 și m componente interioare $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \dots, \mathcal{L}_m$).

Cu ajutorul principiului prelungerii analitice, H. A. Schwarz a demonstrat (pentru domenii simplu conexe) că, dacă frontiera \mathcal{L} e analitică, funcția $\omega(\zeta)$ poate fi prelungită prin continuitate pe γ , și este de clasă C^∞ în $\mathcal{H}^+ + \gamma$.

Problema comportării funcției $\omega(\zeta)$ pentru o frontieră *neanalitică* a fost pusă de P. Painlevé. W. Osgood [1] a presupus în 1900 și a demonstrat în 1913 (vezi W. Osgood și E. Taylor [1]) că pentru continuitatea funcției $\omega(\zeta)$ în $\mathcal{H}^+ + \gamma$, este suficient ca \mathcal{L} să fie o curbă jordaniană simplă. Același rezultat a fost obținut simultan și de C. Caratheodory (vezi [1]).

Se poate demonstra (vezi de ex. A. Markușevici [1], § 5.3) că o condiție necesară și suficientă pentru ca $\omega(\zeta) \in C^0(\mathcal{H}^+ + \gamma)$, este ca \mathcal{L} să fie o curbă jordaniană simplă.

Rezultatul rămîne valabil în cazul unui domeniu multiplu conex, și poate fi formulat precum urmează, sub numele de *teorema corespondenței frontierelor*: o condiție necesară și suficientă pentru ca $\omega(\zeta) \in C^0(\mathcal{H}^+ + \mathcal{H})$ este ca \mathcal{L} să fie formată din curbe jordaniane simple; curbele \mathcal{L}_j sînt imaginea curbelor \mathcal{H}_j prin intermediul transformării $\omega(\zeta)$ prelungite pe \mathcal{H}_j , corespondența dintre \mathcal{L}_j și \mathcal{H}_j fiind biunivocă și bicontinuă. Funcția $\omega(\zeta)$ prelungită pe \mathcal{H} rezultă a fi cu variație mărginită.

Mai general încă, se poate demonstra că dacă $\mathcal{L} \in C_\mu^p(\mathcal{H})$, unde $0 < \mu < 1$ (vezi § 3, pag. 700), atunci $\omega(\zeta) \in C_\mu^p(\mathcal{H}^+ + \mathcal{H})$.

Rezultate de acest tip au fost extinse de către S. Warschawski [1] la cazul frontierelor posedînd puncte unghiulare. Anume, se poate arăta că dacă $\mathcal{L} \in C_\mu^1(\mathcal{H})$ pe porțiuni, atunci în vecinătatea oricărui punct $\tau \in \mathcal{H}$ avem

$$\omega(\zeta) = \omega(\tau) + (\zeta - \tau)^\alpha \omega_0(\zeta, \tau), \quad \omega'(\zeta) = (\zeta - \tau)^{\alpha-1} \omega_1(\zeta, \tau), \quad (4)$$

unde $\omega_0(\tau, \tau) \neq 0$, $\omega_1(\tau, \tau) \neq 0$, $0 < \alpha \leq 2$.

Dacă $\alpha = 1$, funcția $\omega(\zeta)$ rezultă a fi derivabilă și cu derivata nenulă în τ ; ea este deci desfășurabilă în serie Taylor în τ , care este astfel un punct regulat. Dacă însă $\alpha > 1$, avem $\omega'(\tau) = 0$; iar dacă $\alpha < 1$, atunci funcția nu este derivabilă în τ . Prin urmare, pentru $\alpha \neq 1$, funcția $\omega(\zeta)$ nu poate fi prelungită analitic prin punctul τ în afara lui \mathcal{H}^+ — deși ea poate fi prelungită prin continuitate în τ .

Considerînd punctul $t \in \mathcal{L}$ corespunzător lui τ , rezultă că tangenta la stînga și tangenta la dreapta la curba \mathcal{L}_j în t formează un unghi intern egal cu $\alpha\pi$. Prin urmare, pentru $\alpha \neq 1$, punctului τ îi corespunde pe \mathcal{L} un punct *unghiular*, în care se unesc, sub un unghi diferit de π , două arce netede distincte. Acesta este de pildă cazul funcțiilor $(1 + \zeta)^2$ și $(1 + \zeta)^{1/2}$, definite în discul unitate: vecinătății (evident netede) a punctului $\zeta = -1$ pe γ , îi corespund două arce netede (în fapt, chiar analitice) ce se unesc sub un unghi egal cu 2π , respectiv $\pi/2$ (vezi mai departe § 8, exemplele *c* și *d*).

Din (4) rezultă că pe fiecare porțiune netedă din \mathcal{L} , funcția $\omega'(\zeta)$ poate fi prelungită prin continuitate în afara lui \mathcal{H}^+ , și că avem $\omega'(\tau) \neq 0$.

Prezintă deosebit interes practic cazurile în care valoarea la limită $\omega'(\tau)$ poate fi obținută nu prin prelungire prin continuitate din \mathcal{D}^+ , ci prin chiar derivarea funcției-limită $\omega(\tau)$ în raport cu punctul $\tau \in \mathcal{D}$. Chestiunea a fost examinată de W. Seidel [1], ale cărui rezultate au fost precizate de V. Smirnov [1].

Luând ca parametru pe \mathcal{L} lungimea arcului de curbă s , presupunând că funcția $\delta'(s)$ este absolut continuă, și că există un exponent $q > 1$ astfel ca funcția $|\delta''(s)|^q$ să fie integrabilă, se demonstrează că

$$\omega'(\zeta)|_{\mathcal{D}} = d\omega(\tau)/d\tau, \quad \omega'(\tau) \neq 0. \quad (5)$$

Tot astfel, dacă funcțiile $\delta'(s)$, $\delta''(s)$ sînt absolut continue, și $|\delta'''(s)|^q$ este integrabilă, atunci $\omega''(\zeta)$ poate fi prelungită prin continuitate pe \mathcal{D} :

$$\omega''(\zeta)|_{\mathcal{D}} = d^2\omega(\tau)/d\tau^2. \quad (6)$$

În particular, rezultatul din (5) este valabil dacă $\mathcal{L} \in C^2(\mathcal{D})$ iar cel din (6), dacă $\mathcal{L} \in C^3(\mathcal{D})$. Într-adevăr, în primul caz funcția $\delta'(s)$ are derivată continuă, deci este absolut continuă, iar funcția $\delta''(s)$ este continuă, astfel că orice putere q a modulului ei este integrabilă. La fel se justifică afirmația relativă la al doilea caz.

Aceste condiții sînt, păstrînd proporțiile, mai tari decît condiția ca \mathcal{L} să fie o linie jordaniană simplă, care asigură continuitatea în $\mathcal{D}^+ + \mathcal{D}$ a funcției $\omega(\zeta)$. Subliniem însă că, pe de o parte, ele sînt numai condiții suficiente; pe de altă parte, ele asigură continuitatea derivatei lor respective și pe drumuri tangente la frontieră, așadar în condițiile cele mai severe.

Teoremele rămîn valabile dacă \mathcal{D}^+ nu este domeniul canonic cu frontiere circulare, ci un domeniu cu componente \mathcal{D}_j oarecari, dar de clasă suficient de înaltă (în particular: analitice) ale frontierei.

În practică, este de mare utilitate teorema inversă teoremei de corespondență a frontierelor, numită *principiul corespondenței frontierelor*: dat fiind un domeniu multiplu-conex \mathcal{D} de frontieră \mathcal{D} , și o funcție $\omega(\zeta)$, olomorfă și univalentă în \mathcal{D} , și continuă în $\mathcal{D} + \mathcal{D}$, atunci domeniul multiplu-conex \mathcal{D} definit de curbele $\mathcal{L}_j = \omega(\mathcal{D}_j)$ (sensul de parcurs fiind indus de sensul de pe \mathcal{D}_j) este imaginea domeniului \mathcal{D} în reprezentarea conformă $\mathfrak{z} = \omega(\zeta)$.

Acest principiu permite să realizăm următoarea construcție: fiind dat domeniul \mathcal{D} de frontieră jordaniană \mathcal{D} și fiind dată funcția $\omega(\zeta)$, putem construi curbele \mathcal{L}_j , descrise de punctul $\mathfrak{z} = \omega(\zeta)$ cînd ζ parcurge curbele \mathcal{D}_j . Ținînd seama de sensul de parcurs care trebuie ales în așa fel încît domeniul \mathcal{D} (și deci și imaginea sa \mathcal{D}) să se afle permanent în stînga, obținem un domeniu \mathcal{D} deplin definit de curbele \mathcal{L}_j .

Aceasta rezolvă *printr-o metodă inversă* problema reprezentării conforme. Alegînd drept \mathcal{D} discul unitate, sau o coroană circulară, și considerînd diferite funcții olomorfe în \mathcal{D} , putem construi diferite domenii simplu sau dublu conexe, a căror reprezentare conformă pe disc sau pe coroană este dinainte cunoscută.

Ca bibliografie asupra teoremei și principiului corespondenței frontierelor, vezi: G. Goluzin [1], §§ 2.3, 6.2 și 10.1; C. Iacob [5], capitolul 2, pct. 25; M. Lavrentiev și B. Šabat [1],

§ 2.1, pct. 29; A. Markușevici [1], § 5.3; W. Osgood [2], § 8.5; I. Privalov [2], § 12.7; S. Stoilov [1], volumul 1, capitolul 6, pct. 15–20.

În chestiunea proprietăților la limită ale reprezentării conforme, vezi: C. Caratheodory [1]; C. Gattegno și A. Ostrovski [1]; M. Lavrentiev [1], capitolul 2; I. Vekua [1], § 1.2; S. Warschawski [1].

c) Funcția lui Green

Problema directă a reprezentării conforme este, evident, mult mai dificilă. În rezolvarea ei, este de mare utilitate legătura dintre funcția $\omega(\zeta)$ și funcția lui Green a domeniului dat \mathcal{D} :

$$G(\zeta, \zeta_0) = -\ln |\zeta - \zeta_0| + g(\zeta, \zeta_0), \quad (7)$$

unde funcția *reală* $g(\zeta, \zeta_0)$ este armonică ca funcție de x_1, x_2 și satisface condiția

$$g(t, \zeta_0) = \ln |t - \zeta_0|, \quad t \in \mathcal{L}. \quad (8)$$

Notînd cu $H(\zeta, \zeta_0)$ conjugata armonică a funcției $G(\zeta, \zeta_0)$ (de asemenea ca funcție de x_1, x_2), se poate demonstra că funcția care realizează reprezentarea conformă a domeniului simplu conex \mathcal{D} pe discul unitate \mathcal{H}^+ are forma

$$\zeta = \omega^{-1}(\zeta) = \exp \{-[G(\zeta, \zeta_0) + iH(\zeta, \zeta_0)]\}, \quad (9)$$

unde ζ_0 este imaginea originii $\zeta = 0$. (Funcția $H(\zeta, \zeta_0)$ este în genere multiformă.)

Aceste formule rămîn valabile și pentru un domeniu multiplu conex.

Problema directă a reprezentării conforme este deci principial echivalentă cu problema determinării funcției $g(\zeta, \zeta_0)$, așadar cu o anumită problemă Dirichlet pentru ecuația lui Laplace, cu date la limită ce depind numai de geometria domeniului \mathcal{D} .

Funcția lui Green este invariantă în raport cu o reprezentare conformă (adică transformată ei prin intermediul reprezentării este chiar funcția lui Green pentru domeniul-imagine).

Pentru studiul funcției lui Green, vezi de exemplu G. Goluzin [1], § 6.3; C. Iacob [5], capitolul 2, pct. 4–7 și 12–22; S. Stoilov [1], volumul 2, capitolul 1, pct. 12–16; cap. 5, pct. 1–6.

d) Integrala lui Schwarz-Christoffel. Reprezentări aproximative

Funcția de reprezentare poate fi adesea construită efectiv cu ajutorul principiului simetriei. Astfel, în cazul unui domeniu mărginit de o linie poligonală închisă, el conduce la importanta *formulă a lui Schwarz-Christoffel* (vezi de ex. C. Iacob, cap. 2, pct. 16–20):

$$\delta = \omega(\zeta) = a' + a \int_{\zeta_0}^{\zeta} (\zeta - \sigma_1)^{\alpha_1-1} (\zeta - \sigma_2)^{\alpha_2-1} \dots (\zeta - \sigma_n)^{\alpha_n-1} d\zeta, \quad (10)$$

unde σ_k sînt afixele punctelor ce corespund pe cercul-unitate vîrfurilor poligonului; α_k măsoară unghiurile (în fracțiuni de π); iar constantele a' și a caracterizează poziția și mărimea poligonului.

În cazul unui domeniu nemărginit (plan cu un orificiu poligonal), formula (10) rămâne valabilă, diferențiala $d\zeta$ înlocuindu-se însă cu $d\zeta/\zeta^2$. Constantele α_k sînt legate prin relația $\sum_{k=1}^p \alpha_k = p \pm 2$, unde semnul $+$ se ia în cazul domeniului nemărginit (corespunzător sumei unghiurilor exterioare, egală cu $(p+2)\pi$), iar semnul $-$, în cazul domeniului mărginit (suma unghiurilor interioare fiind egală cu $(p-2)\pi$).

Formule asemănătoare se obțin în cazul reprezentării domeniilor poligonale pe un semiplan.

Desigur, în punctele σ_k corespunzătoare vîrfurilor poligonului avem $\omega'(\zeta) = 0$, astfel că reprezentarea încetează să mai fie conformă. (Compară cu a doua formulă (4).)

Determinarea punctelor σ_k este dificilă, iar prezența integralei din (10) face această reprezentare destul de greu maniabilă.

Să observăm că numărul domeniilor pentru care funcția de reprezentare este cunoscută sub o formă elementară, este extrem de redus. Întrucît funcția ce realizează reprezentarea conformă (pentru \mathcal{D} simplu conex) este olomorfă în discul unitate, ea este desfășurabilă în serie Taylor:

$$\omega(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n \zeta^n, \quad |\zeta| < 1. \quad (11)$$

Considerînd o sumă parțială a acestei serii

$$\omega_m(\zeta) = \sum_{n=0}^m \omega_n \zeta^n, \quad (12)$$

se obține un polinom care realizează reprezentarea conformă a discului unitate pe un domeniu cu atît mai apropiat de \mathcal{D} , cu cît numărul de termeni reținut în (12) este mai mare. Aproximarea într-un punct anumit este cu atît mai bună cu cît acesta este mai depărtat de eventuale singularități pe frontieră ale funcției $\omega(\zeta)$. Pentru a aprecia gradul ei de precizie, e sugestivă compararea imaginilor $\omega(\sigma)$ și $\omega_m(\sigma)$ ale cercului unitate prin intermediul celor două funcții de reprezentare: cea exactă și cea aproximativă. De asemenea, se pot compara — cu ajutorul formulelor (7.15) și (7.18) din paragraful următor — direcția tangentei și raza de curbură a acestor curbe-frontieră.

Reprezentări de tipul (12) se obțin ușor în cazul domeniilor poligonale, dezvoltînd în serie integrandul din (10) și integrînd termen cu termen. Această metodă este recomandată de N. Mushelişvili [5], § 89, și larg utilizată de G. Savin [1]. Vezi de asemenea A. Green și W. Zerna [1], § 8.25. Avertizăm însă că ea este eficace mai ales în cazul domeniilor *nemărginite*, cu frontieră poligonală *convexă*. Dacă \mathcal{D} este *mărginit* și *convex*, frontiera-imagine $\omega_m(\sigma)$ se abate mult de la frontiera poligonală dată, iar unghiurile apar mult rotunjite, chiar pentru m foarte mare. Explicația rezidă în faptul că pentru un domeniu nemărginit avem $\alpha_k > 1$, în timp ce pentru un domeniu mărginit, avem $\alpha_k < 1$. Or, considerînd formula binomului pentru fiecare termen $(\zeta - \sigma_k)^{\alpha_k - 1}$, este evident că convergența seriei obținute este mai rapidă dacă $\alpha_k - 1 > 0$, așadar pentru domeniul nemărginit. Raționamentul rămîne valabil în general pentru unghiuri

„ieșinde” și unghiuri „intrînde”. Un exemplu de acest fel va fi examinat în § 8, exemplul e. Vezi și N. Arutiunian și B. Abramian [1], § 1.7.

Integrala lui Schwarz-Christoffel rămîne adesea un punct de plecare util în lucrări ca cele ale lui S. Heller et al. [1] (unde se conservă numai *forma* acestei integrale, dar coeficienții se aleg în așa fel încît frontiera să treacă prin anumite puncte date); V. Mahovikov [1] (în care se separă o parte finită a integralei, și o serie rapid convergentă) și [3] (cu aplicație specială la domeniile poligonale).

Chestiunea comportării reprezentării conforme în vecinătatea punctelor de discontinuitate ale tangentei sau ale curbării prezintă o importanță excepțională, din cauza fenomenului de concentrare a tensiunilor provocat de aceste discontinuități. Problema este amănunțit studiată de M. Kikukawa [1]–[4], care alege ca punct de pornire tot integrala lui Schwarz-Christoffel.

În principiu, orice domeniu simplu conex cu frontieră rectificabilă poate fi înlocuit cu un domeniu poligonal apropiat; determinînd o funcție $\omega_m(\zeta)$ corespunzătoare acestuia din urmă, obținem o funcție care reprezintă conform discul unitate nu pe domeniul \mathcal{D} dat, și nici pe domeniul poligonal ce-l aproximează, ci pe un domeniu apropiat de acesta din urmă. Chestiunea evaluării erorii acestui procedeu rămîne deschisă.

Pentru domenii cu frontiere poligonale, se mai pot folosi anumite funcții propuse de P. Sokolov (vezi M. Naiman [1]; G. Shapiro [1]), dar care nu mai derivă din integrala lui Schwarz-Christoffel. Să mai menționăm lucrările lui V. Perehvatov [1], V. Pisacane și L. Malvern [1] (ambele cu referire la reprezentarea conformă a domeniilor rectangulare); K. Ciarnik [1] (reprezentarea conformă a domeniilor compuse din dreptunghiuri); V. Mahovikov [2] (domenii dublu conexe).

Adesea, funcția $\omega(\zeta)$ nu este cunoscută, sau este de o structură prea complicată pentru ca funcțiile $\omega_m(\zeta)$ să poată fi ușor determinate. De aceea, în legătură cu progresele tehnicii de calcul, precum și ale metodelor analizei funcționale, pe primul plan trec acum metodele aproximative de determinare a funcției $\omega(\zeta)$, bazate pe anumite proprietăți extremale. Expunerea amănunțită a metodelor corespunzătoare este dată de L. Kantorovici și V. Krilov [1], capitolele 5 și 6; M. Lavrentiev [1], capitolul 1; M. Lavrentiev și B. Șabat [1], capitolul 4; S. Mihlin [3], § 24. Vezi și monografia lui D. Gaier [1] și articolele de sinteză asupra metodelor numerice în reprezentarea conformă, aparținînd lui D. de Allen [1]; G. Birkhoff et al. [1]; M. Schiffer [1]; S. Warschawski [2]. Vezi de asemenea lucrările lui W. Seidel și E. Ullrich citate de W. Koppensfels și F. Stallman [1] și lucrările indicate la nr. 18 și 19 în bibliografia traducerii ruse a acestei monografii.

Pentru anumite metode electro-analogice, vezi de exemplu A. Krilov et al. [1].

Pentru a încheia, să remarcăm că uneori chiar metode aproximative foarte grosiere pot fi satisfăcătoare pentru calcularea anumitor elemente și, dimpotrivă, aproximări cu un mare număr de termeni pot fi insuficiente pentru calcularea altor parametri. (Vezi de exemplu H. Poritsky și G. Danforth [1].) Astfel, mărimi cu caracter integral sau mediu se obțin adesea cu o bună precizie, în timp ce asupra unor mărimi cu caracter diferențial putem fi induși în eroare (mai ales în vecinătatea punctelor singulare ale reprezentării exacte, dacă prezența acestora nu este luată în considerare cu metode speciale).

§ 7. COORDONATE NATURALE. APLICAȚII

a) *Coordonate naturale*

Pentru simplitate, ne vom referi la cazul domeniilor mărginite de o curbă simplă închisă. Raționamentele se extind cu ușurință la domenii mărginite de două astfel de curbe.

În paragraful de față vom nota deci cu \mathcal{D}^+ discul unitate de frontieră γ din planul ζ , și cu $z = \omega(\zeta)$ funcția care realizează reprezentarea conformă a lui \mathcal{D}^+ , pe domeniul mărginit și simplu conex \mathcal{D} , de frontieră jordaniană \mathcal{L} din planul z . Alegând $\omega(0) = 0$, originile se corespund.

Să trasăm în planul ζ un sistem de coordonate polare, cel mai potrivit pentru studiul fenomenelor ce se petrec în disc. Întrucît $\omega(\zeta) \in C^0(\mathcal{D}^+ + \gamma)$, fiecărei raze ce unește centrul discului cu un punct de pe γ , îi corespunde o curbă ce unește originea cu un punct de pe \mathcal{L} . Întrucît reprezentarea conservă unghiurile, aceste curbe sînt normale pe \mathcal{L} . Cercurilor concentrice ale rețelei de coordonate din planul ζ le corespund traiectoriile ortogonale primei familii de curbe, deja construite în \mathcal{D} . Evident, acestea sînt curbe simple închise, care nu se intersectează și care înconjură originea.

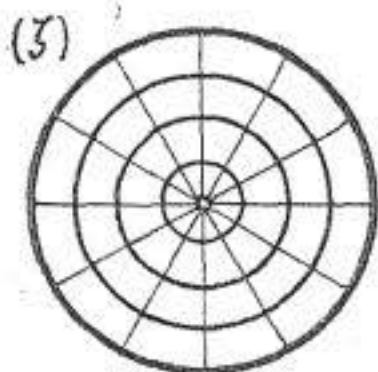


Fig. A.7.1

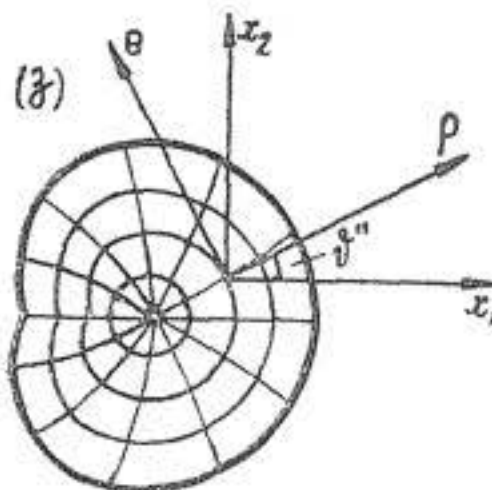


Fig. A.7.2

În felul acesta, razelor $\theta = \text{const.}$ le corespund curbe deschise, care este firesc să poarte numele de *linii* ρ ; iar cercurilor $\rho = \text{const.}$, le corespund curbe închise, care se vor numi *linii* θ .

Ținînd seama de formula (6.9), se poate demonstra că liniile θ sînt liniile de nivel ale funcției lui Green, iar liniile ρ sînt liniile de nivel ale funcției conjugate cu funcția lui Green (vezi de ex. S. Stoilov [1], vol. 2, cap. 5, pct. 6).

Pentru exemple concrete, vezi § 8, exemplele **a** și **d**.

Reprezentarea conformă induce astfel în \mathcal{D} un sistem de coordonate curbilinii ortogonale, numite *coordonate naturale* ale domeniului. Corespondența biunivocă între \mathcal{D} și \mathcal{D}^+ face deci ca fiecărui punct $z = x_1 + i x_2 = R \exp(i\chi)$ din \mathcal{D} să-i corespundă un punct $\zeta = \rho \exp(i\theta)$ în \mathcal{D}^+ . Este firesc să atribuim punctului z de coordonate carteziene x_1, x_2 , coordonatele naturale (ρ, θ) asociate lui în acest mod.

Dacă \mathcal{D} este mărginit și dublu conex, rolul discului unitate îl ia coroana circulară corespunzătoare, iar rețeaua de coordonate păstrează același aspect.

Disponem astfel de posibilitatea de a transcrie *formal* orice funcție sau relație dată în \mathcal{D} , ca o funcție sau relație în \mathcal{D}^+ , așadar într-un domeniu de structură foarte simplă. Astfel, de exemplu, pentru a transcrie o funcție (scalară) de punct $f(z, \bar{z})$ în \mathcal{D}^+ , este suficient să înlocuim pe z prin valoarea sa

$$z = \omega(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n \zeta^n. \quad (1)$$

(Pentru \mathcal{D} dublu conex, în loc de (1) trebuie să considerăm o serie Laurent.)

Vom conveni ca, atunci când este cazul, să atribuim indicele (1) funcțiilor date în planul z („planul fizic”), și să păstrăm același simbol funcțional, dar fără indice, pentru transformata funcției considerate în planul ζ („planul reprezentării”):

$$f_{(1)}(z, \bar{z}) = f_{(1)}[\omega(\zeta), \overline{\omega(\zeta)}] = f(\zeta, \bar{\zeta}). \quad (2)$$

Subliniem că în timp ce funcția $f_{(1)}(z, \bar{z})$ descrie în genere un fenomen oarecare în \mathcal{D} , funcția $f(\zeta, \bar{\zeta})$ nu descrie un fenomen analog în \mathcal{D}^+ : relația (2) trebuie înțeleasă ca o *identitate matematică*, ca o schimbare de coordonate în \mathcal{D} , și nu ca descrierea unui fenomen din \mathcal{D} prin intermediul unui fenomen în \mathcal{D}^+ .

Cunoașterea funcțiilor ω și $f_{(1)}$ permite scrierea funcției f . Reciproc, dacă funcția $\zeta = \omega^{-1}(z)$ poate fi explicitată, atunci cunoașterea lui f atrage cunoașterea explicită a lui $f_{(1)}$. În orice caz, cunoașterea funcțiilor ω și f asigură cunoașterea funcției $f_{(1)}$, cel puțin *sub formă parametrică*: pentru un $\zeta \in \mathcal{D}^+$ dat, se cunoaște atît punctul $z \in \mathcal{D}$ corespunzător, cît și valoarea lui $f_{(1)}$ în acel punct.

Din (1) și (2) rezultă formula de derivare în coordonate naturale:

$$f_{(1),z} = f_{,\zeta} \zeta'(z) = f_{,\zeta} / \omega'(\zeta). \quad (3)$$

În particular, pentru o funcție de o singură variabilă complexă obținem deci

$$f_{(1)}(z) = f(\zeta), \quad f'_{(1)}(z) = f'(\zeta) / \omega'(\zeta). \quad (4)$$

Evident, aceste formule nu depind de ordinul de conexiune al domeniului.

În astfel de formule, vom nota adesea derivata în planul z a unei funcții, cu aceeași literă, majusculă însă:

$$f'_{(1)}(z) = F_{(1)}(z). \quad (5)$$

Componentele unei mărimi care nu sînt scalare (de exemplu deplasările sau tensiunile) depind și de poziția axelor locale atașate coordonatelor naturale. Anume, trasînd tangentele la liniile ρ și θ ce trec printr-un punct dat din \mathcal{D} , obținem un sistem local de axe carteziane rectangulare, care se vor numi axe (ρ, θ) . Acestea sînt frecvent utilizate în problemele antiplană și

plană. Conform convenției din § 4.1, componentele deplasării în aceste axe se vor nota u_ρ , u_θ ; componentele deformației vor fi $\varepsilon_{\rho\rho}$, $\varepsilon_{\rho\theta}$, $\varepsilon_{\theta\theta}$; iar cele ale tensiunii vor fi $\widehat{\rho\rho}$, $\widehat{\rho\theta}$, $\widehat{\theta\theta}$.

Dacă vom face uz de coordonate polare în chiar planul fizic $\mathfrak{z} = R \exp(i\chi)$, atunci componentele tensiunii, de pildă, se vor nota \widehat{RR} , $\widehat{R\chi}$, $\widehat{\chi\chi}$.

Poziția axelor (ρ, θ) față de axele (x_1, x_2) este deplin caracterizată de unghiul $\tilde{\theta}$ format de axa locală ρ cu axa x_1 , în sensul de la x_1 la ρ . (Pentru justificarea notației, vezi și § 3, pag. 699. Acesta este tot un caz particular al notației ce va fi folosită în figura A.7.3.) Evident, acest unghi este funcție de x_1, x_2 , adică de ρ, θ . Dacă \mathfrak{z} se deplasează pe linia ρ , punctul corespunzător ζ se deplasează *radial*, în lungul razei θ . Avem deci

$$d\mathfrak{z} = |d\mathfrak{z}| \exp(i\tilde{\theta}), \quad d\zeta = |d\zeta| \exp(i\theta), \quad (6)$$

de unde

$$\exp(i\tilde{\theta}) = \frac{d\mathfrak{z}}{|d\mathfrak{z}|} = \frac{\omega'(\zeta) d\zeta}{|\omega'(\zeta) d\zeta|} = \frac{\omega'(\zeta)}{|\omega'(\zeta)|} \exp(i\theta),$$

sau încă, întrucât $\zeta = |\zeta| \exp(i\theta)$:

$$\exp(i\tilde{\theta}) = \zeta \omega'(\zeta) / |\zeta \omega'(\zeta)|. \quad (7)$$

(Relația este valabilă numai pentru domenii simplu și dublu conexe.)

Pentru un vector de componente V_1, V_2 în axele carteziene inițiale, obținem

$$V_1 + i V_2 = \exp(i\tilde{\theta}) (V_\rho + i V_\theta), \quad (8)$$

unde factorul $\exp(i\tilde{\theta})$ este dat de relația (7). În mod analog se pot obține formule de transformare pentru componentele unui tensor.

b) Elemente geometrice fundamentale

Anumite elemente geometrice ale domeniului *simplu conex* \mathcal{D} (elementul de arc și curbura pe \mathcal{L} , aria, centrul de greutate și momentele de inerție ale lui \mathcal{D}) pot fi calculate făcând uz numai de valorile la limită ale lui $\omega(\zeta)$ și ale derivatelor sale. Anume, notînd

$$\zeta|_\gamma = \sigma = \exp(i\theta), \quad \bar{\sigma} = \sigma^{-1}, \quad (9)$$

avem evident

$$t = \mathfrak{z}|_{\mathcal{L}} = \omega(\sigma) = \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n \sigma^n, \quad \omega'(\zeta)|_\gamma = d\omega/d\sigma, \quad \omega''(\zeta)|_\gamma = d^2\omega/d\sigma^2, \quad (10)$$

unde prima relație este valabilă pentru $\mathcal{L} \in C^0$; a doua, pentru $\mathcal{L} \in C^2$; a treia pentru $\mathcal{L} \in C^3$ (vezi formulele (6.5), (6.6)).

Pentru elementul de arc ds pe frontiera \mathcal{L} obținem mai întîi

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 = dt \, d\bar{t}, \quad (11)$$

de unde, dacă $\mathcal{L} \in C^2$, deducem

$$ds^2|_{\mathcal{L}} = -\omega'(\sigma) \overline{\omega'(\sigma)} \sigma^{-2} (d\sigma)^2,$$

i deci

$$ds|_{\mathcal{L}} = -i \sqrt{\omega'(\sigma) \overline{\omega'(\sigma)}} \sigma^{-1} d\sigma. \quad (12)$$

(Radicalul se ia cu determinarea sa pozitivă, intrucit avem $-i \sigma^{-1} d\sigma = d\theta$; alegerea semnului + în (12) ar corespunde la schimbarea de sens pe \mathcal{L} .)

Prin urmare, lungimea unui arc oarecare al curbei frontieră este dat — pe orice porțiune pe care curba e de clasă C^2 — de formula

$$s - s_0 = -i \int_{\sigma_0}^{\sigma} \sqrt{\omega'(\sigma) \overline{\omega'(\sigma)}} \sigma^{-1} d\sigma. \quad (13)$$

De aci urmează că orice funcție dată pe \mathcal{L} ca funcție de s , poate fi transcrisă și ca funcție de σ (sau de θ). În particular, dacă pe \mathcal{L} este dată o funcție $f_{(1)}(s)$, integrala acesteia în raport cu s este

$$\int_{s_0}^s f_{(1)}(s) ds = -i \int_{\sigma_0}^{\sigma} f_{(1)}[s(\sigma)] \sqrt{\omega'(\sigma) \overline{\omega'(\sigma)}} \sigma^{-1} d\sigma, \quad (14)$$

unde funcția $s(\sigma)$ este dată de (13).

Pentru a calcula cosinușii directori ai normalei sau tangentei la curba frontieră, obținem ușor din (4.22) și (12):

$$s = \cos(s, x_1) + i \cos(s, x_2) = i \sigma \sqrt{\omega'(\sigma) \overline{\omega'(\sigma)}}. \quad (15)$$

Dacă avem $\mathcal{L} \in C^2$ pe porțiuni, această formulă trebuie folosită pentru fiecare porțiune în parte (vezi mai jos § 8, exemplul e).

Pe porțiunile pe care $\mathcal{L} \in C^3$, putem face uz de a treia formulă (10). Ținând seama de (9), urmează că coordonatele x_1, x_2 pot fi privite ca funcții de parametrul real θ pe $[0, 2\pi]$. Intrucit avem

$$d/d\theta = (d\sigma/d\theta) d/d\sigma, \quad d\sigma/d\theta = i \exp(i\theta) = i\sigma,$$

urmează evident

$$d/d\theta = i\sigma d/d\sigma, \quad d^2/d\theta^2 = -(\sigma^2 d^2/d\sigma^2 + \sigma d/d\sigma). \quad (16)$$

Pentru a calcula raza de curbura cu ajutorul formulei (3.13), unde rolul parametrului real r îl joacă acum θ , vom ține seama că pe \mathcal{L} avem

$$x_1'^2 + x_2'^2 = (dt/d\theta) (d\bar{t}/d\theta), \quad x_1' x_2'' - x_1'' x_2' = \text{Im} [(d\bar{t}/d\theta) (d^2 t/d\theta^2)]. \quad (17)$$

Introducând (16) și (17) în (3.13), obținem în definitiv

$$R|_{\mathcal{L}} = \frac{[\omega'(\sigma) \overline{\omega'(\sigma)}]^{3/2}}{\omega'(\sigma) \overline{\omega'(\sigma)} + \text{Re} [\sigma \overline{\omega'(\sigma)} \omega''(\sigma)]}. \quad (18)$$

c) Arie, centru de greutate, momente de inerție

Pentru aria D a domeniului \mathcal{D}^+ , avem din (3.4) și (4.29)

$$D = -\frac{1}{2}i \oint_{\mathcal{L}} \bar{t} dt, \quad (19)$$

formulă valabilă și pentru un domeniu multiplu conex mărginit; în acest caz, integralele pe componentele interioare ale lui \mathcal{L} trebuie luate în sensul retrograd de parcurs. Dacă \mathcal{D} este simplu conex, cu $\mathcal{L} \in C^2$ pe porțiuni, (19) devine

$$D = -\frac{1}{2}i \oint_{\gamma} \overline{\omega(\sigma)} \omega'(\sigma) d\sigma. \quad (20)$$

Introducând aci expresia (10) și integrând, obținem

$$D = \pi \sum_{n=1}^{\infty} n |\omega_n|^2. \quad (21)$$

Notînd cu $z_0 = x_1^0 + i x_2^0$ afixul centrului de greutate, obținem din (3.5) și (4.29)

$$D z_0 = \iint_{\mathcal{D}^+} z dD = -\frac{1}{2}i \oint_{\mathcal{L}} t \bar{t} dt \quad (22)$$

(formulă valabilă, ca și (19), și pentru un domeniu multiplu conex). Dacă \mathcal{D} este simplu conex și $\mathcal{L} \in C^2$ pe porțiuni, avem de aci

$$D z_0 = -\frac{1}{2}i \oint_{\gamma} \omega(\sigma) \overline{\omega(\sigma)} \omega'(\sigma) d\sigma. \quad (23)$$

Pentru a calcula momentele de inerție, întrucît avem

$$\begin{aligned} (z - z_0)^2 &= (x_1 - x_1^0)^2 - (x_2 - x_2^0)^2 + 2i(x_1 - x_1^0)(x_2 - x_2^0), \\ (z - z_0)(\bar{z} - \bar{z}_0) &= (x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2, \end{aligned} \quad (24)$$

este firesc să introducem, cu ajutorul formulelor (3.8), cantitățile

$$I = I_{22} - I_{11} + 2i I_{12} = \iint_{\mathcal{D}^+} (z - z_0)^2 dD, \quad (25)$$

$$I_0 = I_{11} + I_{22} = \iint_{\mathcal{D}^+} (z - z_0)(\bar{z} - \bar{z}_0) dD.$$

Mărimea I se numește *moment complex central* (nu și principal) *de inerție*, iar I_0 este evident *momentul polar central de inerție* al domeniului \mathcal{D}^+ .

Din (25) se obțin ușor momentele în raport cu alte axe, rotite de un unghi oarecare ϑ față de cele inițiale. Anume, pentru un punct de afix z în axele vechi și z^1 în cele noi, avem evident

$$z = [\exp(i\vartheta)] z^1; \quad (26)$$

din (25) obținem deci

$$I^1 = [\exp(-2i\vartheta)] I, \quad I_0^1 = I_0, \quad (27)$$

de unde

$$I_{11}^1 = \frac{1}{2} (I_{11} + I_{22}) + \frac{1}{2} (I_{11} - I_{22}) \cos 2\vartheta - I_{12} \sin 2\vartheta,$$

$$I_{22}^1 = \frac{1}{2} (I_{11} + I_{22}) - \frac{1}{2} (I_{11} - I_{22}) \cos 2\vartheta + I_{12} \sin 2\vartheta, \quad (28)$$

$$I_{12}^1 = \frac{1}{2} (I_{11} - I_{22}) \sin 2\vartheta + I_{12} \cos 2\vartheta.$$

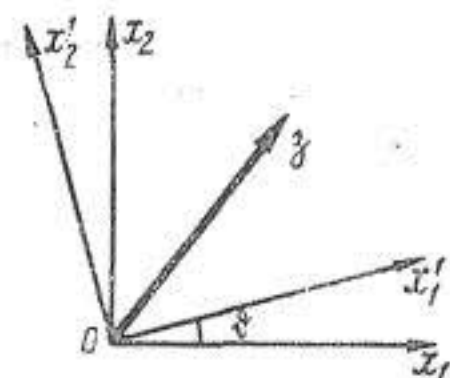


Fig. A.7.3

În particular, luând $I_{12}^1 = 0$, obținem relația

$$\operatorname{tg} 2\vartheta = 2 I_{12} : (I_{22} - I_{11}), \quad (29)$$

care permite determinarea axelor principale centrale de inerție.

Ținând seama în (25) de formula lui Stokes (4.29), obținem (pentru \mathcal{D} eventual multiplu conex)

$$I = -\frac{1}{2} i \oint_{\mathcal{D}} (t - z_0)^2 (\bar{t} - \bar{z}_0) dt, \quad (30)$$

$$I_0 = -\frac{1}{4} i \oint_{\mathcal{D}} (t - z_0) (\bar{t} - \bar{z}_0)^2 dt,$$

de unde în cazul unui domeniu simplu conex

$$I = -\frac{1}{2} i \oint_{\gamma} [\omega(\sigma) - z_0]^2 [\overline{\omega(\sigma)} - \bar{z}_0] \omega'(\sigma) d\sigma, \quad (31)$$

$$I_0 = -\frac{1}{4} i \oint_{\gamma} [\omega(\sigma) - z_0] [\overline{\omega(\sigma)} - \bar{z}_0]^2 \omega'(\sigma) d\sigma.$$

Pentru momentele ne-centrale J și J_0 se pot construi formule analoge, înlocuind în (25) – (31) pe z_0 prin zero. În particular, din (31) obținem

$$J = -\frac{1}{2} i \oint_{\gamma} [\omega(\sigma)]^2 \overline{\omega(\sigma)} \omega'(\sigma) d\sigma, \quad J_0 = -\frac{1}{4} i \oint_{\gamma} \omega(\sigma) [\overline{\omega(\sigma)}]^2 \omega'(\sigma) d\sigma. \quad (32)$$

Dacă funcția $\omega(\zeta)$ este rațională, integralele ce intervin în determinarea ariei, centrului de greutate și momentelor de inerție, se calculează cu ajutorul teoremei rezidurilor.

Dacă \mathcal{D} este *dublu conex*, formulele (12), (14), (15), (18), (20), (23), (31) și (32) pot fi ușor generalizate pornind de la înlocuirea formulelor (9) prin

$$\zeta|_{J_0} = \rho_0 \sigma, \quad \zeta|_{J_1} = \rho_1 \sigma, \quad \sigma = \exp(i\theta). \quad (33)$$

Astfel de exemplu, din (11) și (33) obținem, în loc de (12):

$$ds|_{\rho} = -i \zeta \sqrt{\omega'(\zeta) \overline{\omega'(\zeta)}} d\sigma, \quad \zeta = \rho \sigma, \quad (34)$$

pe orice cerc de rază $\rho \in [\rho_1, \rho_0]$.

§ 8. REPRESENTAREA CONFORMĂ. EXEMPLE

Vom da aci numai câteva exemple de funcții suficient de simple, ce realizează reprezentarea conformă a discului unitate sau a coroanei circulare, pe anumite domenii. Acesta nu este un dicționar de reprezentări conforme, ci servește numai la a sublinia ideile principale, și a pregăti exemplele din capitolele 5 și 6.

a) Transformarea omografică

Să considerăm funcția (transformarea) omografică și inversa sa

$$z = (a\zeta + b) / (c\zeta + d), \quad \zeta = (-d z + b) / (c z - a), \quad (1)$$

unde a, b, c, d sînt constante complexe, și $ad \neq bc$. Relațiile (1) stabilesc vizibil o corespondență biunivocă între *întreg* planul ζ , și *întreg* planul z .

Această transformare conservă cercurile (inclusiv dreptele, privite ca cercuri de rază infinită); într-adevăr, scriind ecuația unui cerc sub forma

$$A(x_1^2 + x_2^2) + Bx_1 + Cx_2 + D \equiv A z \bar{z} + \operatorname{Re}[(B - iC)z] + D = 0, \quad (2)$$

și introducînd aci (1), obținem o expresie de același tip în variabilele $\zeta, \bar{\zeta}$.

Să reținem cazul particular de transformare omografică

$$z = \zeta / (1 - a\zeta), \quad \zeta = z / (1 + a z), \quad (3)$$

(unde a este o constantă reală). În acest caz, punctelor $(0, 1/a, \zeta_{\infty})$ din planul ζ le corespund punctele $(0, z_{\infty}, -1/a)$ din planul z .

Să trasăm sistemul de coordonate polare din planul ζ (fig. A.8.1). Imaginea unei raze („cerc” de rază infinită ce trece prin punctele $0, \zeta_\infty$) este deci un cerc ce trece prin punctele $0, -1/a$. Imaginea unui cerc $\rho = \text{const.}$ este de asemenea un cerc. Prin urmare, liniile $\theta = \text{const.}$ sînt cercurile ce trec prin punctele $0, -1/a$, și au axul radical $x_1 = -1/2a$, iar liniile $\rho = \text{const.}$ sînt cercurile ortogonale celor dintîi.

Cercul $\rho = \text{const.}$ taie axa ξ_1 în punctele $\pm \rho$, cărora în planul ζ le corespund punctele $\pm \rho/(1 \mp a\rho)$, situate pe axa reală. Centrul x_1^c, x_2^c și raza R a cercului ce trece prin aceste puncte sînt deci cunoscute din formulele

$$x_1^c = a \rho^2 / (1 - a^2 \rho^2), \quad x_2^c = 0, \quad R = \rho / (1 - a^2 \rho^2). \quad (4)$$

Pentru a inversa aceste formule, observăm că ultima din ele dă

$$\rho = [-1 + \sqrt{1 + 4a^2 R^2}] : 2a^2 R > 0. \quad (5)$$

Dacă dorim să reprezentăm conform o coroană circulară excentrică de raze R_0, R_1 pe o coroană circulară, formula (5) dă razele ρ_j corespunzătoare cercurilor de raze R_j ($j=0, 1$). Prima relație (4) — scrisă pentru centrele corespunzătoare x_1^0, x_1^1 — ar furniza două expresii distincte pentru parametrul a . În fapt însă, nu cunoaștem pozițiile centrelor, ci numai (linia centrelor fiind aleasă drept axă Ox_1) distanța lor $l_{01} = x_1^0 - x_1^1$. Calculînd pe l_{01} cu ajutorul primei relații (4) și ținînd seama de ultima relație (4), căpătăm $l_{01} = a(R_0 \rho_0 - R_1 \rho_1)$. Introducînd aci expresia (5) (scrisă pentru ambele cercuri), deducem :

$$a = l_{01} : \sqrt{(R_0^2 - R_1^2)^2 - l_{01}^2 (R_0^2 + R_1^2) + l_{01}^4}. \quad (6)$$

Prin urmare, date fiind două cercuri care nu se intersectează, și avînd razele R_0, R_1 și distanța centrelor l_{01} , formulele (5), (6) permit să se determine atît parametrul a al reprezentării (3), cît și razele ρ_0, ρ_1 ale cercurilor corespunzătoare celor date.

Izolînd în (5) produsul $a\rho$, conchidem ușor că $a\rho < 1$.

În ce privește dreapta $\theta = \text{const.}$, aceasta are ecuația $B \xi_1 + C \xi_2 = 0$, unde $-B/C = \tan \theta$. Notînd $B + iC = \beta$, această ecuație se scrie $\bar{\beta} \zeta + \beta \bar{\zeta} = 0$, de unde, făcînd uz de (3), căpătăm ecuația cercului-imagine sub forma $a(\beta + \bar{\beta})\zeta\bar{\zeta} + \bar{\beta}\zeta + \beta\bar{\zeta} = 0$, sau încă $x_1^2 + x_2^2 + (1/a)x_1 + (C/aB)x_2 = 0$, ceea ce dă poziția centrului cercului și raza sa :

$$x_1^c = -1/2a, \quad x_2^c = -C/2aB = (\cotg \theta)/2a, \quad r = \sqrt{(x_1^c)^2 + (x_2^c)^2} = 1/(2a \sin \theta). \quad (7)$$

Un raționament similar celui de mai sus permite inversarea acestor formule — ceea ce este necesar cînd avem de-a face cu două cercuri care se intersectează.

Acum putem construi efectiv rețeaua de coordonate naturale atașate reprezentării (3). Imaginea sistemului de coordonate polare din planul ζ (fig. A.8.1) este dată în figura A.8.2 (pentru $a = 1/5$). Săgețile indică sensul de parcurs (ce poate fi urmărit cu ajutorul nodurilor corespunzătoare ale rețelelor de coordonate). Subliniem că în figura A.8.2 punctele $0, -1/a$ sînt unite prin cîte două arce de cerc parcurse în sensuri opuse, dintre care unul corespunde razei $\theta = \text{const.}$, iar celălalt, razei opuse $\theta = \text{const.} + \pi$ din planul ζ .

Alegînd pe figura A.8.2 un domeniu oarecare mărginit de două cercuri $\theta = \text{const.}$ și două cercuri $\rho = \text{const.}$, principiul corespondenței frontierelor arată că prima funcție din (3)

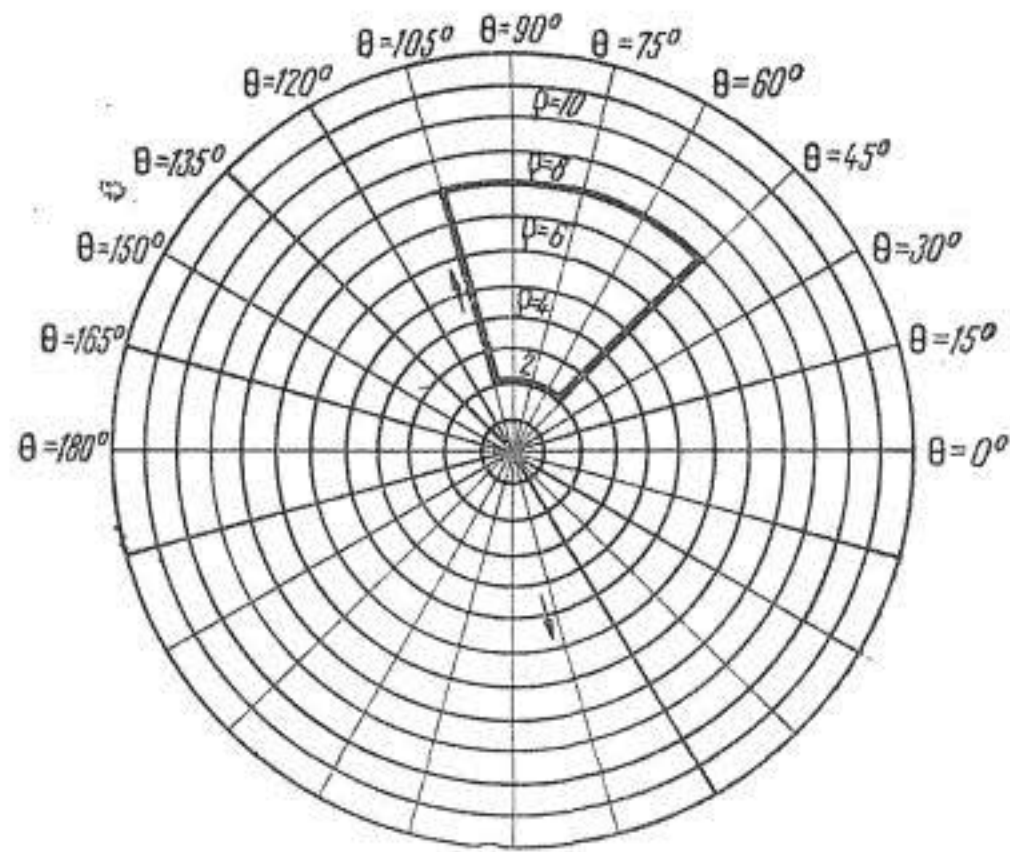


Fig. A.8.1

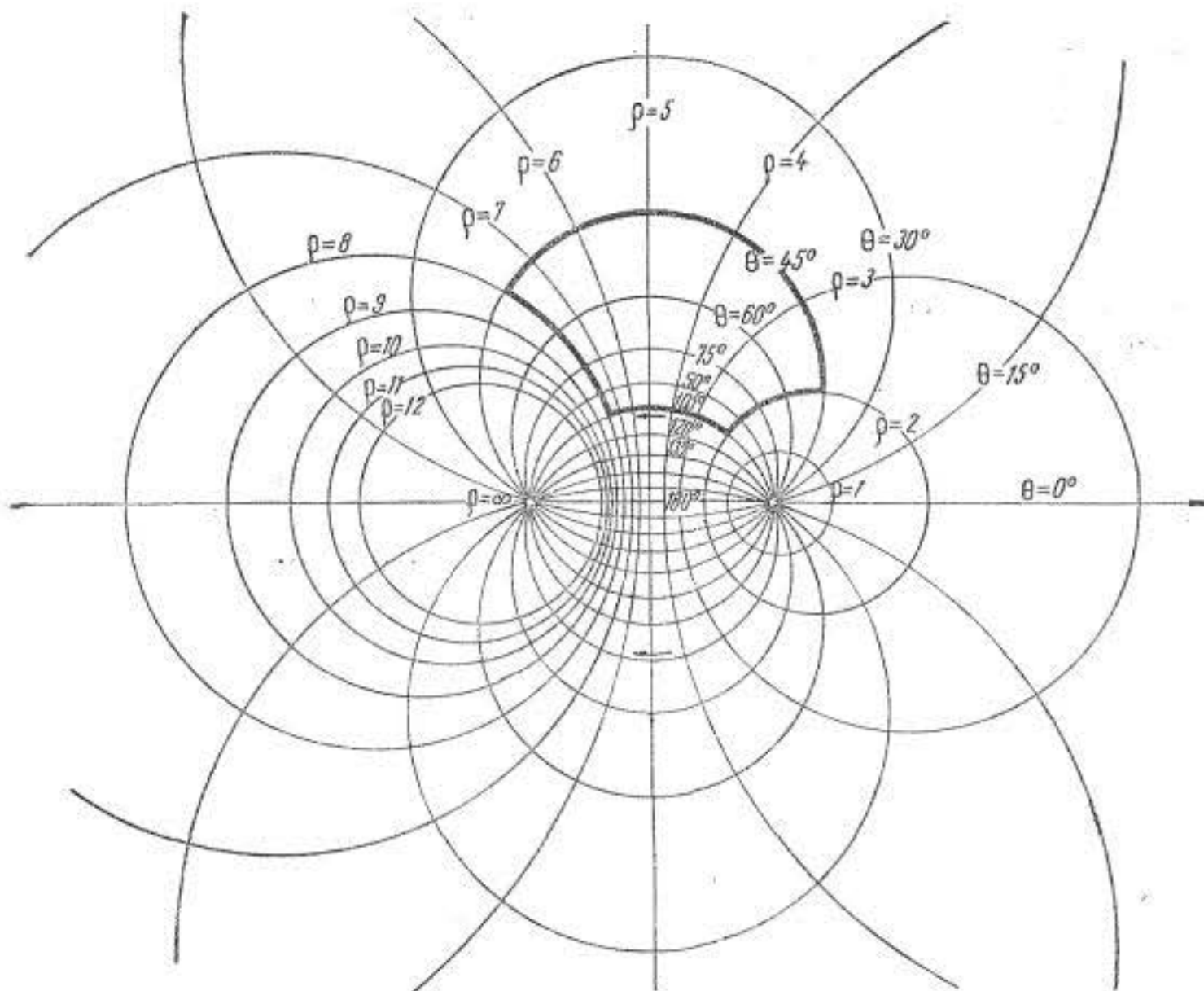


Fig. A.8.2

realizează reprezentarea conformă a domeniului mărginit de razele și cercurile concentrice corespunzătoare din figura A.8.1, pe acest domeniu). (Pe ambele figuri, arcele trasate îngroșat dau un exemplu de frontiere în corespondență.)

Reciproc, dat fiind un patrulater curbiliniu dreptunghic format din arce de cerc, atunci parametrul a și valorile corespunzătoare ρ , θ pot fi efectiv determinate. Pentru astfel de domenii, transformarea (3) realizează deci reprezentarea necesară.

OBSERVAȚIE. Punctul $\zeta=5$ din figura A.8.1 trece în punctul ζ_∞ . Prin urmare, de exemplu, interiorul cercului $\rho=10$ din figura A.8.1 trece în exteriorul cercului notat tot cu $\rho=10$ în figura A.8.2; punctul ζ_∞ trebuie privit ca punct interior al acestui domeniu, astfel că exteriorul cercului considerat este simplu conex, și nu dublu conex. Pe de altă parte, exteriorul cercului $\rho=10$ din figura A.8.1 trece în interiorul lui $\rho=10$ din figura A.8.2; el nu conține însă punctul notat cu $\rho=\infty$, astfel că interiorul acestui cerc trebuie privit de fapt ca interiorul unei coroane circulare, așadar ca un domeniu dublu conex.

În legătură cu cele de mai sus a se revedea și § 3, pag. 694.

b) Coroana eliptică (elipse confocale)

Să considerăm funcția

$$\zeta = c(\zeta + h\zeta^{-1}), \quad c > 0, \quad h \geq 0. \quad (8)$$

Întrucât avem $\zeta = x_1 + ix_2$, $\zeta = \rho \exp(i\theta)$, din (8) deducem

$$x = c(\rho + h\rho^{-1}) \cos \theta, \quad y = c(\rho - h\rho^{-1}) \sin \theta, \quad (9)$$

așadar ecuațiile parametrice ale unei elipse de semi-axe

$$a = c(\rho + h\rho^{-1}), \quad b = c(\rho - h\rho^{-1}), \quad (10)$$

pentru oricare ρ pentru care $\rho - h\rho^{-1} \geq 0$, așadar $\rho^2 \geq h$.

Distanța focală a acestei elipse nu depinde de ρ :

$$d^2 = a^2 - b^2 = 4hc^2. \quad (11)$$

Principiul corespondenței frontierelor arată deci că funcția (8) realizează reprezentarea conformă a coroanei circulare de raze $\rho_0 > \rho_1 \geq h$ din planul ζ , pe domeniul dublu conex mărginit de două elipse confocale \mathcal{L}_0 și \mathcal{L}_1 din planul ζ . Liniiile $\rho = \text{const.}$ sînt elipse cuprinse între \mathcal{L}_0 și \mathcal{L}_1 și confocale cu acestea, iar liniile $\theta = \text{const.}$ sînt hiperbole, de asemenea confocale cu ele.

Reciproc, fie date elipsele \mathcal{L}_0 (de semi-axe a, b) și \mathcal{L}_1 (de semi-axe a', b'). (Notația nu este consecventă, dar este comodă; în plus, ea evită unele confuzii ulterioare.) În acest caz, din relațiile (10) scrise pe cele două componente ale frontierei urmează:

$$a'/c = \rho_1 + h\rho_1^{-1}, \quad b'/c = \rho_1 - h\rho_1^{-1}; \quad a/c = \rho_0 + h\rho_0^{-1}, \quad b/c = \rho_0 - h\rho_0^{-1}. \quad (12)$$

Ținînd seama și de condiția de legătură (11), de unde

$$a^2 - b^2 = a'^2 - b'^2 = 4hc^2, \quad (13)$$

rezultă că pentru elipse confocale, avem de determinat trei din cele patru constante c, h, ρ_0, ρ_1 , una din ele putînd fi aleasă arbitrar. Adunînd termen cu termen primele două și ultimele

două relații (12), căpătăm

$$a' + b' = 2c\rho_1, \quad a + b = 2c\rho_0, \quad (14)$$

de unde, luând de pildă $\rho_1 = 1$, și ținând seama de (13), deducem :

$$c = \frac{1}{2}(a' + b'), \quad h = \frac{a' - b'}{a' + b'}, \quad \rho_0 = \frac{a + b}{a' + b'}, \quad \rho_1 = 1, \quad (15)$$

astfel că funcția (8) care reprezintă conform interiorul coroanei circulare de raze $\rho_0 = (a + b) : (a' + b')$ și 1, pe domeniul mărginit de $\mathcal{L}_0, \mathcal{L}_1$ devine

$$\zeta = \frac{1}{2}(a' + b') \left(\zeta + \frac{a' - b'}{a' + b'} \zeta^{-1} \right). \quad (16)$$

Întrucât $a + b > a' + b'$, avem evident $\rho_0 > \rho_1 = 1$, și $h \leq 1$.

În loc să fixăm valoarea $\rho_1 = 1$, putem da dinainte valoarea parametrului $h = 1$. În acest caz, (8) se va scrie

$$\zeta = c(\zeta + \zeta^{-1}), \quad (17)$$

formă sub care ea poartă numele de *transformarea lui Jukowski*. Din (13) și (14) deducem acum

$$c = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - b^2} = \frac{1}{2}\sqrt{a'^2 - b'^2}, \quad \rho_0 = \sqrt{\frac{a + b}{a - b}}, \quad \rho_1 = \sqrt{\frac{a' + b'}{a' - b'}}, \quad (18)$$

astfel că funcția (8) care reprezintă conform interiorul coroanei circulare de raze ρ_0, ρ_1 din (18), pe domeniul mărginit de $\mathcal{L}_0, \mathcal{L}_1$, este

$$\zeta = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - b^2}(\zeta + \zeta^{-1}). \quad (19)$$

Valorile c, ρ_0 din (15) nu trebuie în nici un caz confundate cu cele din (18). Notăm că h din (15) este legat de ρ_1 din (18) prin relația $h = \rho_1^{-2}$.

După cum se vede din (10), dacă raza ρ_1 a cercului interior este \sqrt{h} , atunci semi-axe elipsei interioare sînt

$$a' = 2c\sqrt{h}, \quad b' = 0, \quad (20)$$

și \mathcal{L}_1 se reduce la un segment mărginit de focarele lui \mathcal{L}_0 (compară și cu (13)).

Dacă în particular $h = 1$, urmează că segmentul $[-2c, 2c]$ este imaginea prin intermediul transformării (17), a cercului unitate; în acest caz, valorile corespunzătoare din (15) și (18) coincid.

Într-adevăr, din (15) căpătăm

$$c = \frac{1}{2}a', \quad \rho_0 = \frac{a + b}{a'}, \quad h = 1 \quad (\text{pentru } \rho_1 = 1), \quad (21')$$

iar din (18) deducem

$$c = \frac{1}{2} a', \quad \rho_0 = \sqrt{\frac{a+b}{a-b}}, \quad \rho_1 = 1 \quad (\text{pentru } h = 1), \quad (21'')$$

unde valorile ρ_0 coincid în virtutea relației (13) (pentru $b' = 0$).

Așadar, funcția (19) reprezintă conform coroana circulară de raze $\rho_0 = \sqrt{(a+b)/(a-b)}$ și $\rho_1 = 1$, pe discul eliptic de frontieră γ , cu o tăietură între focare.

Din (9) avem acum

$$x_1 = 2c \cos \theta, \quad x_2 = 0, \quad (22)$$

astfel că acest segment este parcurs de două ori în sensuri opuse, atunci cînd punctul $\sigma = \exp(i\theta)$ parcurge pe γ . În loc de (22), mai putem scrie

$$x_1 = c(\sigma + \bar{\sigma}), \quad x_2 = 0, \quad (23)$$

ceea ce arată că punctele σ și $\bar{\sigma}$ de pe γ au drept imagine același punct $(x_1, 0)$ de pe segmentul \mathcal{L}_1 .

Se știe că funcția care reprezintă conform discul eliptic pe discul unitate este de structură foarte complicată:

$$\zeta = \sqrt{k \left[\left(\frac{a-b}{a+b} \right)^2 \right]} \operatorname{sn} \left[\frac{2K}{\pi} \sin^{-1} \zeta; \left(\frac{a-b}{a+b} \right)^2 \right], \quad (24)$$

unde sn este funcția sinus-integral (inversa integralei Schwarz-Christoffel care reprezintă conform semiplanul superior pe interiorul dreptunghiului de virfuri $K, -K, K+iK', -K+iK'$). Pentru detalii, inclusiv semnificația funcției k și a constantei K , vezi de exemplu W. Koppens și F. Stallmann [1], § 7.1; S. Mihlin [1], § 30; Z. Nehari [1], § 6.3.

Funcția lui Jukowski — pentru același disc eliptic cu o tăietură între focare — este în schimb foarte simplă. În unele probleme, se poate trece ușor de la cazul discului eliptic cu tăietură, la cel al discului eliptic plin, punînd anumite condiții de conjugare pe segmentul \mathcal{L}_1 pentru funcțiile căutate — ceea ce este incomparabil mai simplu decît a se face uz de funcția (24).

Prezintă totodată interes utilizarea de metode aproximative pentru problema considerată. L. Kantorovici și V. Krilov [1], § 5.6, dau o astfel de metodă, precum și un exemplu numeric pentru elipsa de semi-axe $\sqrt{4/3}$, $\sqrt{4/5}$:

$$\frac{3}{4} x_1^2 + \frac{5}{4} x_2^2 = 1. \quad (25)$$

Notînd cu $\omega_m(\zeta)$ polinoame de grad m ce realizează reprezentarea conformă aproximativă a discului unitate pe acest disc eliptic (așadar nu neapărat sume parțiale ale seriei (6.11) pentru funcția (24)) avem:

$$\begin{aligned} \omega_1(\zeta) &= 0,99 \zeta, \\ \omega_3(\zeta) &= 0,99 (\zeta + 0,12 \zeta^3), \\ \omega_5(\zeta) &= 0,99 (\zeta + 0,12 \zeta^3 + 0,03 \zeta^5), \\ \omega_7(\zeta) &= 0,99 (\zeta + 0,12 \zeta^3 + 0,03 \zeta^5 + 0,01 \zeta^7). \end{aligned} \quad (26)$$

Pentru a evalua gradul de precizie al procedeului, se pot calcula coordonatele x_1, x_2 pe curbele-frontieră $\omega_1(\sigma), \omega_3(\sigma), \omega_5(\sigma), \omega_7(\sigma)$ ca funcții de unghiul θ . Curba $\omega_1(\sigma)$ este un cerc; curba $\omega_7(\sigma)$ nu a putut fi trasată, întrucît la scara desenului ea coincide cu elipsa $\omega(\sigma)$.

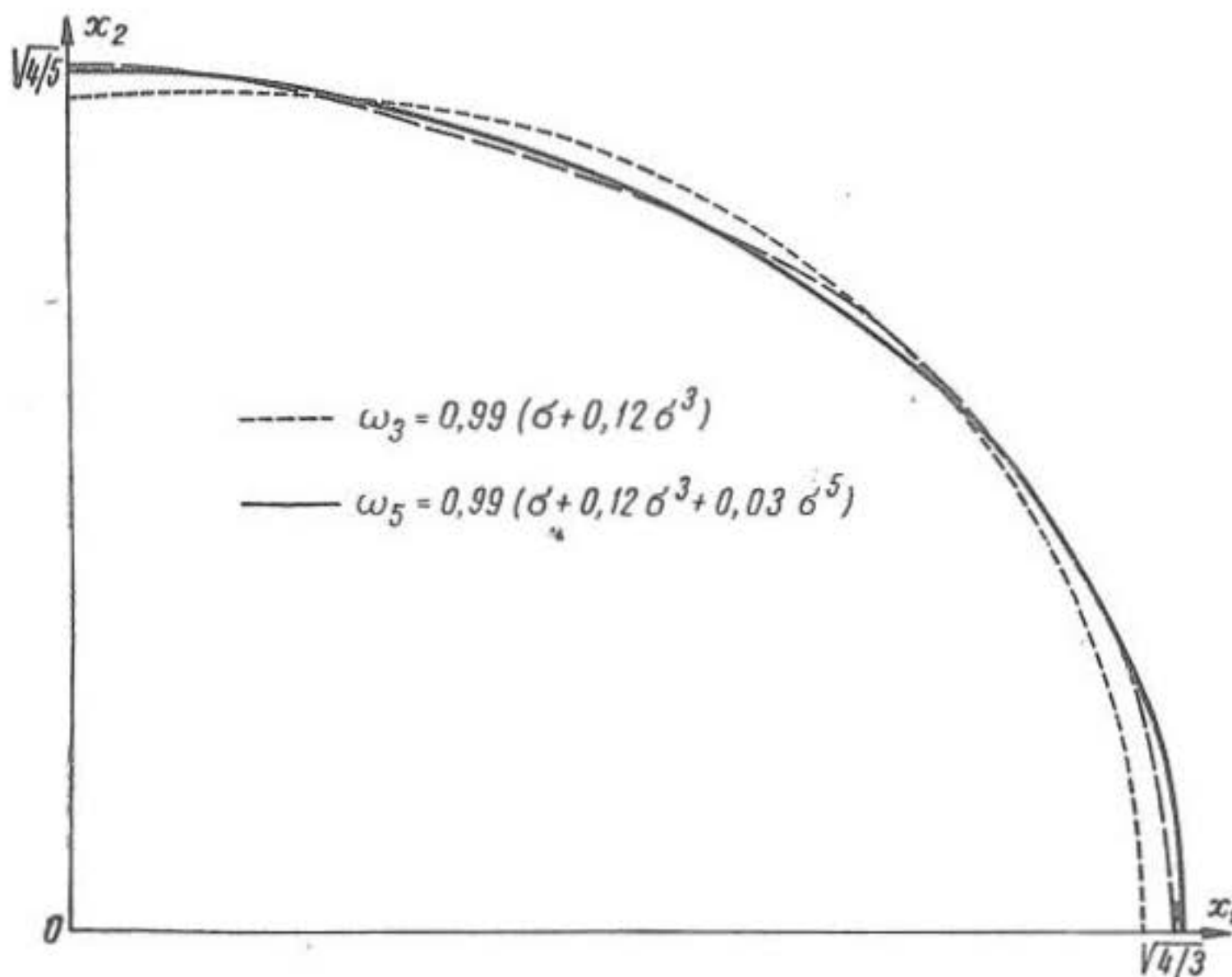


Fig. A.8.4

c) Cardioida

Să considerăm funcția rațională (mai mult: polinomială)

$$\zeta = \omega(\zeta) = a(1 + \zeta)^2, \quad a > 0, \quad (27)$$

a cărei inversă este

$$\zeta = \sqrt[3]{\zeta/a} - 1. \quad (28)$$

Introducînd aci (7.9), obținem ecuațiile parametrice ale curbei frontieră \mathcal{L} :

$$x_1 = a(1 + 2 \cos \theta + \cos 2\theta), \quad x_2 = a(2 \sin \theta + \sin 2\theta), \quad (29)$$

de unde, întrucît avem $\zeta = R \exp(i\chi)$, deducem

$$R = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = 2a(1 + \cos \theta), \quad \operatorname{tg} \chi = x_2/x_1 = \operatorname{tg} \theta. \quad (30)$$

Prin urmare, avem $\chi = \theta$, și (29) este forma parametrică a ecuației unei cardioide, cu punctul de întoarcere în originea axelor. Funcția (27) reprezintă deci discul unitate pe domeniul mărginit de această cardioidă.

Întrucât funcția (27) este rațională, putem determina ușor parametrii geometrici ai domeniului.

Întrucât din (27) și (7.9) avem

$$\omega'(\sigma) = 2a(1 + \sigma), \quad \overline{\omega'(\sigma)} = 2a(1 + \sigma^{-1}), \quad (31)$$

obținem imediat din (7.12)

$$ds|_{\mathcal{L}} = -2ia(1 + \sigma)\sigma^{-3/2}d\sigma. \quad (32)$$

Pentru a integra această expresie, vom ține seama că

$$\int \sigma^{-3/2} d\sigma = -2\sigma^{-1/2}, \quad \int \sigma^{-1/2} d\sigma = 2\sigma^{1/2},$$

astfel că (7.13) și (32) dau

$$s - s_0 = -4ia(\sigma^{1/2} - \sigma^{-1/2})|_{\sigma_0}^{\sigma}. \quad (33)$$

Funcția $\zeta^{1/2}$ este multiformă (vezi 5.44). Alegând drept origine a abscisei curbilini punctul $\sigma_0 = -1$ corespunzător unghiului $\theta = -\pi$ (vezi fig. A.5.2 și A.5.3) și ținând seama de (5.45) (punctul considerat se găsește pe bordul inferior al tăieturii), avem

$$\sigma_0^{1/2} = -i, \quad \sigma_0^{-1/2} = i,$$

astfel că (33) devine

$$s = -4ia(\sigma^{1/2} - \sigma^{-1/2} + 2i). \quad (34)$$

Întrucât $\sigma^{1/2} - \sigma^{-1/2} = 2i \sin(\theta/2)$, această formulă se mai scrie

$$s(\theta) = 8a[1 + \sin(\theta/2)]. \quad (35)$$

În particular, pentru $\theta = \pi$ obținem perimetrul cardioidei :

$$s \Big|_{-\pi}^{+\pi} = 16a. \quad (36)$$

Introducând (27) și (31) în (7.20) și (7.23) avem

$$\begin{aligned} D &= -ia^2 \oint_{\gamma} (1 + \sigma)(1 + \sigma^{-1})^2 d\sigma, \\ D_{\partial_0} &= -ia^3 \oint_{\gamma} (1 + \sigma)^3 (1 + \sigma^{-1})^2 d\sigma. \end{aligned} \quad (37)$$

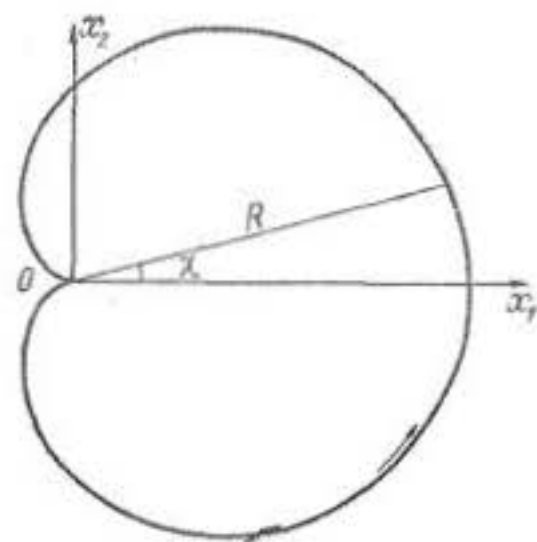


Fig. A.8.5

Ținând seama că originea este un pol (și singurul) de ordinul al doilea pentru ambele integrale, obținem cu ajutorul formulei (5.30)

$$D = 2 \pi i (-ia^2) \cdot 3 = 6 \pi a^2, \quad (38)$$

$$D \mathfrak{z}_0 = 2 \pi i (-ia^3) \cdot 5 = 10 \pi a^3, \quad (39)$$

de unde

$$\mathfrak{z}_0 = 5a/3. \quad (40)$$

Mai departe, pentru momentele centrale de inerție avem din (7.31)

$$\begin{aligned} l_0 &= -\frac{1}{2} ia^4 \oint_{\gamma} \left[(1 + \sigma)^2 - \frac{5}{3} \right] \left[(1 + \sigma^{-1})^2 - \frac{5}{3} \right]^2 (1 + \sigma) d\sigma, \\ l &= -ia^4 \oint_{\gamma} \left[(1 + \sigma)^2 - \frac{5}{3} \right]^2 \left[(1 + \sigma^{-1})^2 - \frac{5}{3} \right] (1 + \sigma) d\sigma, \end{aligned} \quad (41)$$

de unde, folosind teorema reziduurilor, obținem

$$l_0 = \frac{55}{3} \pi a^4, \quad l = -\frac{8}{3} \pi a^4, \quad l_{11} = \frac{21}{2} \pi a^4, \quad l_{22} = \frac{47}{6} \pi a^4, \quad l_{12} = 0. \quad (42)$$

Pentru momentul polar necentral de inerție obținem din (7.32):

$$J_0 = -\frac{1}{2} ia^4 \oint_{\gamma} (1 + \sigma)^7 \sigma^{-4} d\sigma = 35 \pi a^4. \quad (43)$$

Evident, valoarea l_0 din (42) se putea obține din (43) și (40) cu ajutorul teoremei lui Steiner (vezi (2.7)).

d) Lemniscata lui Bernoulli

Să considerăm acum cazul funcției *iraționale*

$$\mathfrak{z} = \omega(\zeta) = a(1 + \zeta)^{1/2}, \quad a > 0, \quad (44)$$

care are inversa

$$\zeta = (\mathfrak{z}/a)^2 - 1. \quad (45)$$

Abstracție făcînd de o translație și o omotetie, (44) este inversa funcției (27). Funcția (44) se obține din (5.44) prin aplicarea succesivă a transformărilor.

$$\mathfrak{z} = aZ, \quad Z = W^{1/2}, \quad W = 1 + \zeta. \quad (46)$$

Punctul $\zeta = -1$ este un punct critic algebric.

Întrucît patrulaterul $(0, \sigma, 1 + \sigma, 1)$ din planul ζ este un romb, avem

$$1 + \sigma = 2 \cos(\theta/2) \exp(i\theta/2), \quad (47)$$

de unde

$$t = z|_{\mathcal{L}} = R \exp(i\chi)|_{\mathcal{L}} = a \sqrt[4]{2 \cos(\theta/2)} \exp(i\theta/4) \quad (48)$$

astfel că imaginea cercului unitate are ecuațiile $R = a \sqrt[4]{2 \cos(\theta/2)}$, $\chi = \theta/4$,

ceea ce conduce la ecuația lemniscatei lui Bernoulli:

$$R = a \sqrt[4]{2 \cos 2\chi}. \quad (49)$$

Privind transformarea (44) pe frontieră ca o succesiune de transformări $\sigma \Rightarrow 1 + \sigma \Rightarrow a \sqrt[4]{1 + \sigma}$, constatăm că atunci când $\arg \sigma = \theta$ trece prin valoarea π , $\arg(1 + \sigma)$ are o discontinuitate, și trece de la valoarea $\frac{1}{2}(\pi - \varepsilon)$ la valoarea $-\frac{1}{2}(\pi - \varepsilon)$. Într-adevăr, avem

$\arg(1 + \sigma) = \arg \operatorname{tg}(X_2/X_1)$ (unde am notat cu X_1, X_2 coordonatele carteziene în planul variabilei $W = 1 + \zeta$), iar pentru $\theta = \pi$ avem $\arg \operatorname{tg}(X_2/X_1) = \pi/2$, așadar un punct de discontinuitate al funcției tangentă. Pentru a păstra determinarea pozitivă a radicalului din (49) trebuie de asemenea să considerăm că $\arg \sigma$ trece de la o valoare $\pi - \varepsilon$ la valoarea $-\pi + \varepsilon$. În definitiv, aceasta va obliga să luăm ca interval de variație pentru θ nu intervalul $[0, 2\pi]$, ci intervalul $[-\pi, \pi]$. Ca imagine a cercului unitate, alegând acea ramură a funcției de reprezentare care face ca punctului $\zeta = 1$ să-i corespundă punctul $z = a \sqrt[4]{2}$, obținem bucla de lemniscată situată în semiplanul $x_1 > 0$, parcursă în sens direct începând din origine. Pentru a doua ramură a funcției (44), obținem bucla simetric dispusă din semiplanul $x_1 < 0$.

Pentru determinarea cantităților D, z_0, l, l_0 , vom face uz de formulele (7.20), (7.23) și (7.31). Întrucât din (44) urmează

$$\begin{aligned} \omega(\sigma) &= a(1 + \sigma)^{1/2}, & \overline{\omega(\sigma)} &= a(1 + \sigma)^{1/2} \sigma^{-1/2}, \\ \omega'(\sigma) &= \frac{1}{2} a(1 + \sigma)^{-1/2}, & \overline{\omega'(\sigma)} &= \frac{1}{2} a(1 + \sigma)^{-1/2} \sigma^{1/2}, \end{aligned} \quad (50)$$

obținem

$$D = -\frac{1}{2} i a^2 \oint_{\gamma} d\sigma^{1/2} = -\frac{1}{2} i a^2 \sigma^{1/2} \Big|_{\theta=-\pi}^{\theta=+\pi} = a^2. \quad (51)$$

Pentru a determina centrul de greutate, avem mai întâi

$$D z_0 = -\frac{1}{4} i a^3 \oint_{\gamma} \sqrt{\frac{1 + \sigma}{\sigma}} d\sigma,$$

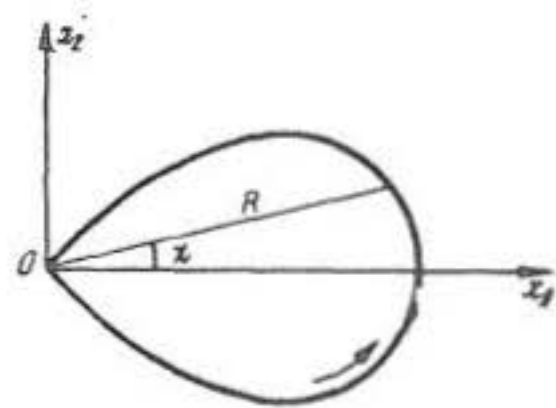


Fig. A.8.6

unde, efectuând substituția $t = \sqrt{(1 + \sigma)/\sigma}$, obținem

$$\oint_{\gamma} \sqrt{\frac{1 + \sigma}{\sigma}} d\sigma = \left[\sqrt{\sigma(1 + \sigma)} - \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{1 + \sigma} - \sqrt{\sigma}}{\sqrt{1 + \sigma} + \sqrt{\sigma}} \right]_{\theta = -\pi}^{\theta = \pi} = - \left[\ln (\sqrt{1 + \sigma} - \sqrt{\sigma}) \right]_{\theta = -\pi}^{\theta = +\pi}. \quad (52)$$

Când punctul σ parcurge cercul unitate γ în sens direct pentru $-\pi < \theta < \pi$, punctul $(\sqrt{1 + \sigma} - \sqrt{\sigma})$ parcurge o curbă simplă deschisă cu capetele în punctele i , $-i$. Prin urmare funcția $\ln (\sqrt{1 + \sigma} - \sqrt{\sigma})$ are între aceste puncte o creștere — aceeași pe orice ramură a funcției logaritmice — care se calculează ținând seama că $\ln i = i\pi/2$, $\ln(-i) = -i\pi/2$, și deci

$$\oint_{\gamma} \sqrt{\frac{1 + \sigma}{\sigma}} d\sigma = i\pi. \quad (53)$$

Din (51)–(53), obținem astfel

$$\delta\theta = \pi a/4. \quad (54)$$

Pentru momentele centrale de inerție avem acum din (7.31):

$$I = -\frac{1}{4} i a^4 \oint_{\gamma} \left[\frac{1 + \sigma}{\sqrt{\sigma}} - \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{1 + \sigma^2}{\sigma}} + \left(\frac{\pi}{4} \right)^2 \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \right] d\sigma, \quad (55)$$

$$I_0 = -\frac{1}{8} i a^4 \oint_{\gamma} \left[\frac{1 + \sigma}{\sigma} - \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{1 + \sigma}{\sigma}} - \frac{\pi}{4} \frac{\sqrt{1 + \sigma}}{\sigma} + \frac{\pi^2}{8} \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \right] d\sigma;$$

(ceilalți termeni ai integranzilor sînt sau constanți, sau de forma $(1 + \sigma)^{\pm 1/2}$, astfel că integralele corespunzătoare lor sînt nule). În aceste formule intervine valoarea calculată a integralei (53), precum și două integrale ce se calculează imediat:

$$\oint_{\gamma} \sigma^{-1/2} d\sigma = 2\sigma^{1/2} \Big|_{\theta = -\pi}^{\theta = +\pi} = 4i,$$

$$\oint_{\gamma} \sigma^{1/2} d\sigma = \frac{2}{3} \sigma^{3/2} \Big|_{\theta = -\pi}^{\theta = +\pi} = -\frac{4}{3} i. \quad (56)$$

Cu ajutorul substituției $1 + \sigma = t^2$ obținem și

$$\oint_{\gamma} \frac{\sqrt{1 + \sigma}}{\sigma} d\sigma = \left[2 \sqrt{1 + \sigma} + \ln \frac{\sqrt{1 + \sigma} - 1}{\sqrt{1 + \sigma} + 1} \right]_{\gamma} = 2\pi i \quad (57)$$

(unde am ținut seama că pentru σ parcurgînd γ , punctele $\sqrt{1 + \sigma} - 1$ și $\sqrt{1 + \sigma} + 1$ parcurg conture închise, dintre care primul conține originea, iar al doilea, nu)⁵⁾.

⁵⁾ Vezi și § 5.22, nota de la pag. 343.

Introducând (53), (56) și (57) în (55), obținem

$$\begin{aligned} I &= \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{16} \pi^2 \right) a^4, & I_0 &= \left(\frac{1}{4} \pi - \frac{1}{16} \pi^2 \right) a^4, \\ I_{11} &= \left(\frac{1}{8} \pi - \frac{1}{3} \right) a^4, & I_{22} &= \left(\frac{1}{8} \pi + \frac{1}{3} - \frac{1}{16} \pi^2 \right) a^4, & I_{12} &= 0. \end{aligned} \quad (58)$$

Pentru momentul polar necentral de inerție, deducem din (7.32)

$$J_0 = -\frac{1}{8} i a^4 \oint_{\gamma} \frac{1+\sigma}{\sigma} d\sigma = \frac{1}{4} \pi a^4. \quad (59)$$

Funcția (44) are o formă destul de simplă. Formula binomului dă imediat

$$a(1+\zeta)^{1/2} = a \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(2n-3)!!}{2^n n!} \zeta^n \right\}, \quad (60)$$

de unde funcțiile $\omega_m(\zeta)$ din (6.12) se deduc ușor. Prezența punctului critic $\zeta = -1$ înrăutățește sensibil convergența acestei serii în vecinătatea sa. Astfel, luind $a = 1$ și considerând numai punctele $\sigma = -1$ și $\sigma = 1$, obținem

	$\omega_4(\sigma)$	$\omega_6(\sigma)$	$\omega(\sigma)$
$\sigma = -1$	0,273	0,227	0
$\sigma = 1$	1,399	1,407	1,414

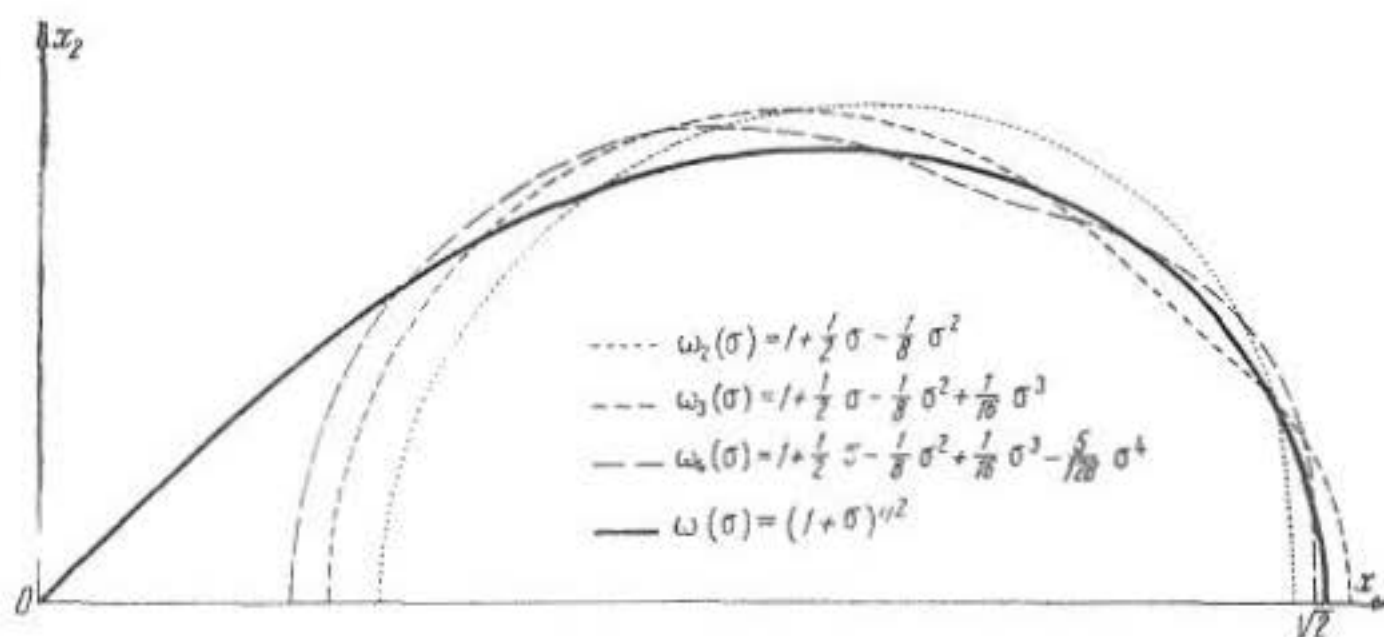


Fig. A.8.7

Ca și în cazul elipsei, dăm aci în figura A.8.7 curbele aproximative $\omega_m(\sigma)$, pe care le comparăm cu frontiera exactă $\omega(\sigma)$ (o jumătate de buclă). Abaterea în vecinătatea valorii $\theta = \pi$ este evident mare, și scade foarte încet odată cu creșterea lui m .

Cu titlu de exemplu, dăm în figura A.8.8 liniile de coordonate naturale corespunzătoare transformării (44). Ele pot fi trasate ținând seama că din (44) urmează, pentru $\zeta = \rho \exp(i\theta)$:

$$x_1^2 - x_2^2 = 1 + \rho \cos \theta, \quad 2x_1x_2 = \rho \sin \theta, \quad (61)$$

de unde

$$\begin{aligned} x_1^2 &= \frac{1}{2} [1 + \rho \cos \theta + \sqrt{1 + 2\rho \cos \theta + \rho^2}], \\ x_2^2 &= \frac{1}{2} \rho^2 \sin^2 \theta : [1 + \rho \cos \theta + \sqrt{1 + 2\rho \cos \theta + \rho^2}]. \end{aligned} \quad (62)$$

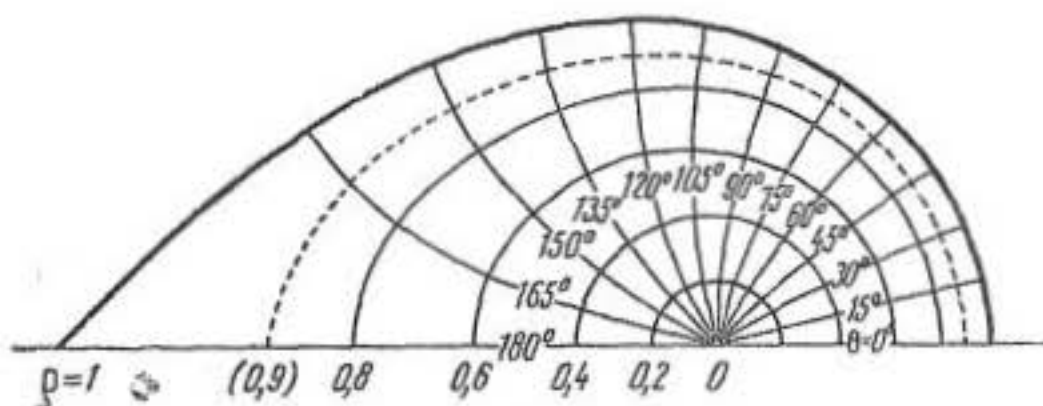


Fig. A.8.8

e) Pătratul. Planul cu un orificiu pătrat

Formula lui Schwarz-Christoffel (6.10) permite ușor determinarea funcției $\omega(\zeta)$ în cazul unui polinom regulat: punctele σ_k sînt dispuse simetric pe γ , și pot fi determinate ca soluții ale ecuației binome $\sigma^p + 1 = 0$, iar exponenții α_k sînt egali între ei.

În cazul pătratului, avem $\sigma_k = (\pm 1 \pm i)/\sqrt{2}$, $\alpha_k = 1/2$, și (6.10) devine

$$\zeta = a' + a \int_{\zeta_0}^{\zeta} (1 + \zeta^4)^{-1/2} d\zeta.$$

Alegînd $a' = 0$ și $\zeta_0 = 0$, centrul cercului γ are ca imagine centrul pătratului. Pentru pătratul de latură 2 trebuie să avem (întrucît punctele $\zeta = 1$ și $\zeta = i$ se corespund) $a = 1,080$. În definitiv, funcția

$$\zeta = \omega_+(\zeta) = 1,080 \int_0^{\zeta} (1 + \zeta^4)^{-1/2} d\zeta \quad (63)$$

reprezintă conform discul unitate pe interiorul pătratului de latură 2.

Pentru planul cu un orificiu pătrat de latură 2, avem $\sigma_k = (\pm 1 \pm i)/\sqrt{2}$, $\alpha_k = 3/2$, astfel că (6.10) devine

$$\zeta = a' + a \int_0^{\zeta} (1 + \zeta^4)^{1/2} \zeta^{-2} d\zeta.$$

Întrucît punctele $(1, -1, \zeta_\infty)$ și $(1, -1, \delta_\infty)$ se corespund, obținem de aci

$$\delta = \omega_-(\zeta) = 1 - 1,180 \int^\zeta (1 + \zeta^4)^{1/2} \zeta^{-2} d\zeta. \quad (64)$$

Cu titlu de exemplu, să calculăm elementul de arc, direcția tangentei, și raza de curbură a frontierei pătratului de latură 2, cu ajutorul formulelor (7.12), (7.15), (7.18), utilizînd funcția (63). Întrucît aci intervin numai valorile la limită ale *derivatei* funcției $\omega_+(\zeta)$, integrala din (63), nu ne va incomoda. Avem mai întîi

$$\omega'_+(\sigma) = a/\sqrt{1 + \sigma^4}, \quad a = 1,080, \quad (65)$$

$$\overline{\omega'_+(\sigma)} = a/\sqrt{1 + \sigma^{-4}} = \pm a\sigma^2/\sqrt{1 + \sigma^4}, \quad (66)$$

unde semnul nu poate fi luat arbitrar. Într-adevăr, întrucît

$$\omega'_+(\sigma) \overline{\omega'_+(\sigma)} = \pm a^2 \sigma^2 / (1 + \sigma^4) > 0, \quad (67)$$

vom alege în (66) semnul plus sau minus, după cum $\sigma^2 + \sigma^{-2} = 2 \cos 2\theta$ este pozitiv sau negativ. Cu aceasta, (66) devine

$$\overline{\omega'_+(\sigma)} = \begin{cases} a\sigma^2/\sqrt{1 + \sigma^4} & \text{pentru } -\frac{1}{4}\pi < \theta < \frac{1}{4}\pi \text{ sau } \frac{3}{4}\pi < \theta < \frac{5}{4}\pi, \\ -a\sigma^2/\sqrt{1 + \sigma^4} & \text{pentru } \frac{1}{4}\pi < \theta < \frac{3}{4}\pi \text{ sau } \frac{5}{4}\pi < \theta < \frac{7}{4}\pi. \end{cases} \quad (68)$$

Pentru elementul de arc obținem acum din (7.12) și (67), (68)

$$ds = -ia \sqrt{\pm \frac{\sigma^2}{1 + \sigma^4}} \frac{d\sigma}{\sigma} = \frac{a d\theta}{\sqrt{2|\cos 2\theta|}}. \quad (69)$$

Pentru direcția tangentei la frontieră deducem din (7.15), (65) și (68): $s = \pm i \sqrt{\pm 1}$, unde semenele sînt luate ca în (68); așadar:

$$s = \begin{cases} i & \text{pentru } -\frac{1}{4}\pi < \theta < \frac{1}{4}\pi, \\ -1 & \text{pentru } \frac{1}{4}\pi < \theta < \frac{3}{4}\pi, \\ -i & \text{pentru } \frac{3}{4}\pi < \theta < \frac{5}{4}\pi, \\ 1 & \text{pentru } \frac{5}{4}\pi < \theta < \frac{7}{4}\pi. \end{cases} \quad (70)$$

Pentru a calcula raza de curbură avem mai întâi

$$\omega''_+(\sigma) = -2a \sigma^3 (1 + \sigma^4)^{-3/2}. \quad (71)$$

Introducând (67), (68) și (71) în (7.18), obținem

$$R = \infty \quad \text{pentru } 1 + \sigma^4 \neq 0, \quad (72)$$

așadar $R = \infty$ cu excepția virfurilor pătratului. În virfuri, R rămâne nedeterminată.

Funcții de forma (63) sau (64) sînt greu utilizabile. Dar întrucît ele sînt desfășurabile în serii Taylor (inclusiv pe γ , cu excepția punctelor σ_k) este firesc să facem uz de polinoamele $\omega_{+;m}(\zeta)$ și $\omega_{-;m}(\zeta)$ ce se obțin din (63), (64). Cu ajutorul formulei binomului obținem

$$\omega'_+(\zeta) = a(1 + \zeta^4)^{-1/2} = a \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} \zeta^{4n} \quad (73)$$

(valorile coeficienților sînt tabulate de I. Rîjik și I. Gradstein [1], § 8.41), respectiv

$$\omega'_-(\zeta) = a(1 + \zeta^4)^{1/2} \zeta^{-2} = a \left[\zeta^{-2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(2n-3)!!}{2^n n!} \zeta^{4n-2} \right]. \quad (74)$$

Integrînd termen cu termen, obținem în locul funcțiilor (63), (64):

$$\omega_+(\zeta) = a \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{2^n n! (4n+1)} \zeta^{4n+1}, \quad (75)$$

$$\omega_-(\zeta) = -a \left[\zeta^{-1} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-3)!!}{2^n n! (4n-1)} \zeta^{4n-1} \right]. \quad (76)$$

Derivînd aceleași serii termen cu termen și înmulțind cu ζ , obținem

$$\zeta \omega''_+(\zeta) = a \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{2^{n-2} (n-1)!} \zeta^{4n}, \quad (77)$$

$$\zeta \omega''_-(\zeta) = a \left[-2 \zeta^{-2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(2n-1)!!}{2^{n-1} n!} \zeta^{4n-2} \right]. \quad (78)$$

Făcînd uz de formulele aproximative (valabile pentru valori mari ale lui n):

$$n! \cong \left(\frac{n}{e} \right)^n \sqrt{2\pi n} \left(1 + \frac{1}{12n} \right), \quad (2n-1)!! \cong \sqrt{2} (2n)^n e^{-n}, \quad (79)$$

obținem pentru coeficienții corespunzători funcției $\omega_+(\zeta)$:

$$\begin{aligned} \frac{(2n-1)!!}{2^n n! (4n+1)} &\cong \frac{1}{\sqrt{\pi n} (4n+1)} \rightarrow 0, & \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} &\cong \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \rightarrow 0, \\ \frac{(2n-1)!!}{2^{n-2} (n-1)!} &\cong 4 \sqrt{\frac{n}{\pi}} \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (80)$$

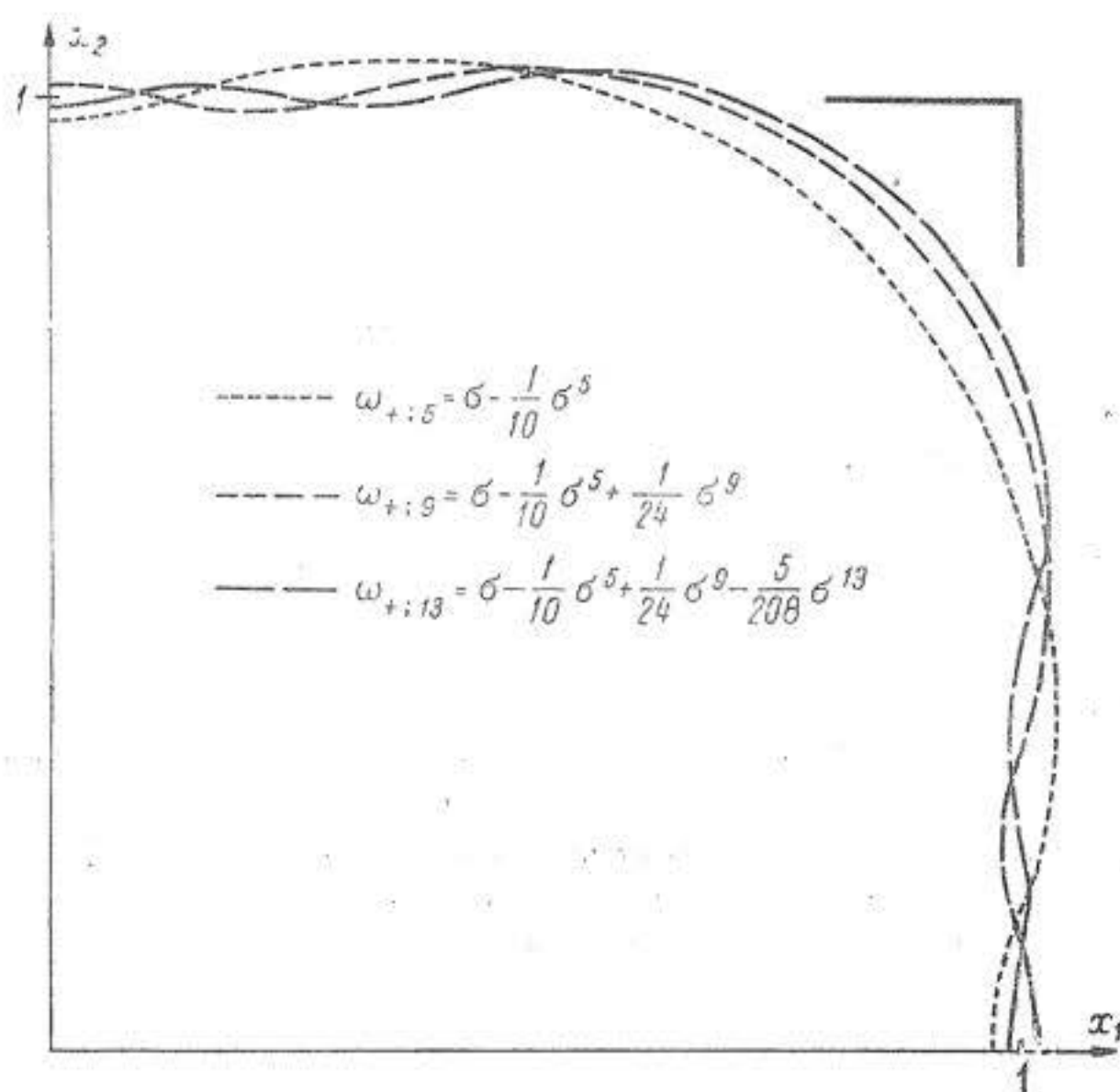


Fig. A.8.9

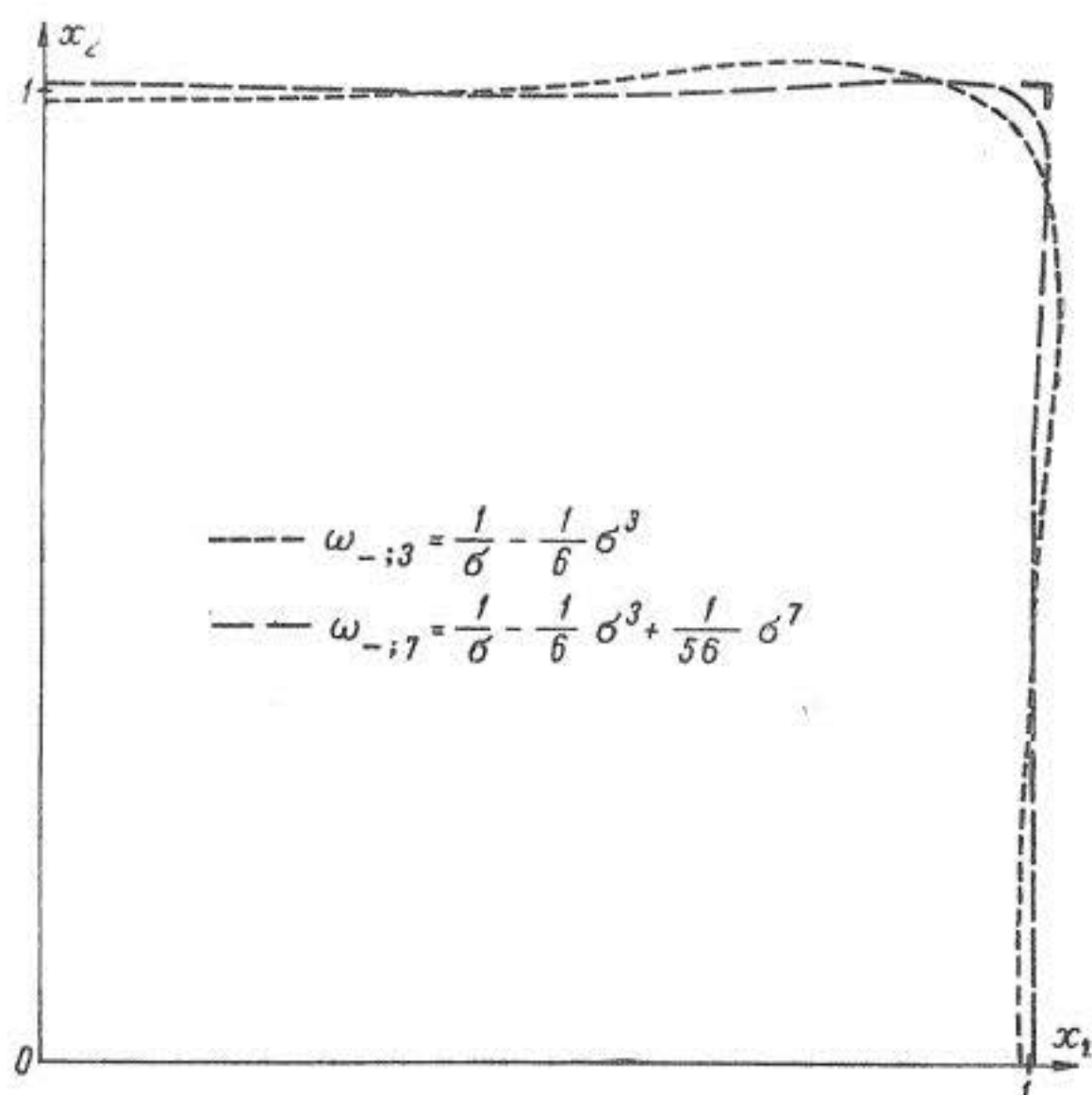


Fig. A.8.10

și tot astfel pentru coeficienții corespunzători funcției $\omega_-(\zeta)$:

$$\begin{aligned} \frac{(2n-3)!!}{2^n n! (4n-1)!} &\cong \frac{1}{\sqrt{\pi n} (4n-1) (2n-1)} \rightarrow 0, \\ \frac{(2n-3)!!}{2^n n!} &\cong \frac{1}{\sqrt{\pi n} (2n-1)} \rightarrow 0, \quad \frac{(2n-1)!!}{2^{n-1} n!} \cong \frac{2}{\sqrt{\pi n}} \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (81)$$

de unde rezultă evident că convergența seriei (75) este mult mai lentă decât a seriei (76). (Compară și cu § 6, pag. 732.)

În figurile A.8.9 și A.8.10 dăm câte un cadran din curbele aproximative $\omega_{+;m}(\sigma)$, respectiv $\omega_{-;m}(\sigma)$. Curbele $\omega_{+;1}(\sigma)$ și $\omega_{-;-1}(\sigma)$ sînt cercuri. Curba $\omega_{-;11}(\sigma)$ coincide practic vorbind cu frontiera exactă. Figurile evidențiază faptul că convergența procedurii este puțin satisfăcătoare pentru pătrat.

Curbarea laturilor pătratelor se poate evalua cu ajutorul formulelor (7.15) și (70). Dar încă mai importantă este determinarea razei de curbura R în punctele ce corespund vîrfurilor: cu cît ea este mai mică, cu atît aproximarea este mai bună în chiar vecinătatea punctelor singulare. Făcînd uz de (75), (76), se calculează ușor R în punctele $\sigma = \sqrt[4]{-1}$. Valorile raportului R/a sînt date în tabela de mai jos atît pentru pătrat, cît și pentru planul de orificiu pătratic, pentru același număr de termeni în funcția de reprezentare aproximativă: interiorul pătratului:

grad	1	5	9	13	17	21	25	29	33	37
R/a	1,000	0,643	0,511	0,437	0,388	0,353	0,326	0,304	0,285	0,271

planul cu un orificiu pătratic:

grad	-1	3	7	11	15	19	23	27	31	35
R/a	1,000	0,100	0,042	0,023	0,017	0,012	0,009	0,007	0,006	0,005

Deosebirea de comportare în cele două cazuri este evidentă.

§ 9. SERII FOURIER

a) Funcții definite într-un disc, și valorile lor la limită

Vom studia aici comportarea funcțiilor de punct pe cercul unitate γ , și legătura lor cu anumite funcții definite în discul unitate \mathcal{D}^+ . (Printr-o translație și o omotetie, orice disc circular poate fi înlocuit cu discul unitate.)

Pe frontiera lui \mathcal{D}^+ , vom nota

$$\zeta|_\gamma = \sigma = \exp(i\theta), \quad \bar{\sigma} = \exp(-i\theta) = \sigma^{-1}, \quad s|_\gamma = \theta. \quad (1)$$

Fie dată în \mathcal{D}^+ o funcție continuă și uniformă, prelungibilă prin continuitate pe γ . Ținând seama de (1), putem scrie

$$F(\zeta, \bar{\zeta})|_{\gamma} = f(\sigma) = f(\theta) = f(s), \quad (2)$$

unde — prin abuz de notație — păstrăm același simbol f pentru cele trei funcții-limită. Funcția $f(\sigma)$ este desigur continuă.

Fie mai departe că $F(\zeta, \bar{\zeta})$ este analitică în \mathcal{D}^+ , așadar că

$$F(\zeta, \bar{\zeta}) = \sum_{h, k=0}^{\infty} F_{hk} \zeta^h \bar{\zeta}^k. \quad (3)$$

Întrucât F este continuă în $\mathcal{D}^+ + \gamma$, primul termen din (2) devine

$$\sum_{h, k=0}^{\infty} F_{hk} \sigma^h \sigma^{-k} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \sigma^n, \quad (4)$$

unde am notat $h - k = \pm n$ după cum $h \geq k$, și unde avem

$$F_0 = \sum_{h=0}^{\infty} F_{hh}, \quad F_n = \sum_{k=0}^{\infty} F_{n+k; k}, \quad F_{-n} = \sum_{h=0}^{\infty} F_{h; n+h}. \quad (5)$$

În felul acesta, fiecărei funcții de forma (3) în \mathcal{D}^+ și continuă în $\mathcal{D}^+ + \gamma$, i se asociază o dezvoltare în serie nu după puterile arcului s sau ale unghiului θ , ci după puterile întregi ale variabilei σ pe γ . Din relația lui Euler

$$\sigma^{\pm n} = \exp(\pm i n \theta) = \cos n \theta \pm i \sin n \theta, \quad (6)$$

rezultă că sîntem conduși la o dezvoltare în serie Fourier după argumentul θ .

În felul acesta, oricărei funcții (3) i se asociază o serie (4). Dacă prima din ele converge în $\mathcal{D}^+ + \gamma$, atunci (4) converge de asemenea. Dacă coeficienții F_{hk} sînt cunoscuți, coeficienții F_n rezultă din (5).

Pentru noi prezintă însă interes problema inversă: dată fiind valoarea la limită $f(\sigma)$, să determinăm însăși funcția. Or, chiar dacă $f(\sigma)$ poate fi pusă sub forma (4); dacă funcția $F(\zeta, \bar{\zeta})$ poate fi pusă sub forma (3); și dacă din egalitatea a două serii (4) se poate conchide că coeficienții corespunzători sînt egali — relațiile (5) rămîn totuși insuficiente pentru ca din valorile (cunoscute) ale coeficienților F_n , să putem determina pe F_{hk} .

Totuși, există cazuri importante în care, funcția $F(\zeta, \bar{\zeta})$ fiind supusă și la alte condiții (de ex., de a satisface o anumită ecuație), sîntem conduși la noi relații între coeficienții F_{hk} care, împreună cu (5), sînt îndestulătoare pentru determinarea coeficienților. De exemplu, acesta este cazul cînd $F(\zeta, \bar{\zeta})$ este o combinație liniară a două funcții olomorfe în \mathcal{D}^+ , eventual inclusiv derivatele lor și funcțiile conjugate: pentru fiecare indice $n > 0$ dispunem de doi coeficienți cunoscuți F_n, F_{-n} , și trebuie să găsim cei doi coeficienți necunoscuți ai termenilor în ζ^n în cele două funcții olomorfe.

În definitiv, sîntem astfel conduși la a considera date la limită desfășurabile în serii Fourier pe γ , și la a reconstitui cu ajutorul coeficienților corespunzători, dezvoltările în serie ale funcțiilor căutate în \mathcal{D}^+ .

Tehnica rămâne valabilă și pentru domenii simplu conexe necirculare: notînd cu $\omega(\zeta)$ funcția ce realizează reprezentarea conformă a discului unitate pe domeniul considerat, putem scrie

$$F(\alpha)(\zeta, \bar{\zeta}) = \sum_{h,k=0}^{\infty} F_{hk}^{(1)} [\omega(\zeta)]^h [\overline{\omega(\zeta)}]^k = \sum_{i,j=0}^{\infty} F_{ij} \zeta^i \bar{\zeta}^j. \quad (7)$$

Transcriind în același mod și condiția la limită, de pe frontiera domeniului — pe γ , ajungem la un sistem de ecuații similar cu (5).

Procedeul poate fi folosit și în cazul coroanei circulare, și deci și pentru domenii reprezentabile conform pe o coroană.

b) Serii trigonometrice și serii Fourier

În cele ce urmează, vom aminti unele rezultate clasice ale teoriei seriilor Fourier (în real și în complex). Ca bibliografie, indicăm: N. Bari [1]; G. Hardy și W. Rogosinski [1]; I. Hincin [1], capitolul 21; E. Hobson [1], capitolul 7; V. Smirnov [2], volumul 2, capitolul 6; G. Tolstov [1]; G. Valiron [1], §§ 7.85—7.89; M. Zamansky [1], capitolul 15, partea III; A. Zygmund [1].

Dată fiind o funcție reală (și desigur uniformă) de variabila reală $\theta \in [0, 2\pi]$, cea mai simplă reprezentare a ei prin serii de funcții elementare ar fi cea a lui Taylor. Dar utilizarea acesteia impune datelor la limită ale problemei condiții severe (analiticitatea), rar realizate în practică, și — după cum vom vedea — inutile pentru scopul urmărit. În afară de aceasta, întrucît nu există corespondență biunivocă între funcțiile reale de clasă C^∞ și mulțimea coeficienților dezvoltării în serie Taylor corespunzătoare (vezi și § 5, pag. 715), operațiile legate de studiul sistemului (5) s-ar complica considerabil.

Să începem prin a considera *seria trigonometrică*

$$s(\theta) = \frac{1}{2} c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n \cos n\theta + d_n \sin n\theta), \quad (8)$$

unde c_n, d_n sînt constante reale, iar $s(\theta)$ este suma seriei, în punctele în care ea converge.

Se poate demonstra că, dacă o serie trigonometrică este convergentă în $[0, 2\pi]$, exceptînd eventual o mulțime numerabilă de puncte, atunci avem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} d_n = 0. \quad (9)$$

Acestea sînt deci condiții necesare (nu și suficiente!) de convergență.

Desigur, dacă două serii trigonometrice au același coeficienți, ele au aceeași sumă în punctele de convergență (ele coincid). Prezintă însă interes cu deosebire reciproca acestei proprietăți, care rezultă din *teorema lui Cantor*: o serie trigonometrică care converge către zero în $[0, 2\pi]$, (exceptînd eventual o mulțime numerabilă de puncte) are toți coeficienții nuli.

Pentru a studia cu ajutorul seriilor trigonometrice o funcție oarecare $f(\theta)$, definită în $[0, 2\pi]$, să presupunem că ea poate fi pusă sub forma (8), așadar că

$$f(\theta) \cong s(\theta) = \frac{1}{2} c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n \cos n\theta + d_n \sin n\theta) \quad (10)$$

(unde semnul \cong arată că egalitatea este numai prezumată).

Dacă funcția $f(\theta)$ este integrabilă; dacă seria din (10) este uniform convergentă; și dacă suma ei este chiar $f(\theta)$ — abstracție făcând eventual de o mulțime numerabilă de puncte — atunci coeficienții c_n , d_n se determină ușor. Pentru aceasta, trebuie să ținem seama de proprietatea de ortogonalitate a sistemului trigonometric în $[0, 2\pi]$:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos n\theta \cos m\theta \, d\theta &= \int_0^{2\pi} \sin n\theta \sin m\theta \, d\theta = \pi \delta_{nm}, \\ \int_0^{2\pi} \cos n\theta \sin m\theta \, d\theta &= 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Înmulțind relația (10) cu $\cos n\theta$, respectiv $\sin n\theta$, integrând termen cu termen în $[0, 2\pi]$, și făcând uz de (11), obținem

$$c_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \cos n\theta \, d\theta, \quad d_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \sin n\theta \, d\theta. \quad (12)$$

O serie trigonometrică ai cărei coeficienți sînt generați cu ajutorul relațiilor (12) se numește *serie Fourier*; c_n , d_n se numesc *coeficienții Fourier* ai lui $f(\theta)$.

Desigur, oricărei funcții integrabile i se poate pune în acest fel în corespondență un sistem de constante c_n , d_n , deci o serie trigonometrică; dar nu se poate afirma nimic nici despre convergența acestei serii, și nici despre faptul dacă suma ei este egală cu funcția dată. Se poate totuși demonstra că pentru orice funcție integrabilă $f(\theta)$, relațiile necesare de convergență (9) sînt satisfăcute de coeficienții (12), independent de faptul dacă seria converge sau nu.

Noțiunea de serie Fourier este veritabil mai restrictivă decît cea de serie trigonometrică; există chiar serii trigonometrice convergente care nu sînt serii Fourier ale sumei lor. (Compară cu § 5, pag. 715).

Evident, oricărei funcții integrabile îi corespunde un șir de coeficienți Fourier. Se pune întrebarea dacă, reciproc, unui șir de coeficienți Fourier îi corespunde o singură funcție $f(\theta)$. În acest sens, se poate demonstra proprietatea de *completitudine* a sistemului trigonometric: dacă o funcție integrabilă are toți coeficienții Fourier nuli, atunci ea însăși este nulă, eventual cu excepția unei mulțimi numărabile de puncte. (Sistemul trigonometric din care am eliminat fie măcar și o singură funcție, nu mai are această proprietate.)

Din teorema lui Cantor, din relațiile (12), și din proprietatea de completitudine, rezultă deci că:

dacă două serii trigonometrice convergente în $[0, 2\pi]$ au aceeași sumă (abstracție făcând eventual de o mulțime numărabilă de puncte), ele au aceiași coeficienți;

dacă două funcții integrabile sînt egale (abstracție făcînd eventual de o mulțime numărabilă de puncte), ele au aceiași coeficienți Fourier;

dacă două funcții integrabile au aceiași coeficienți Fourier, ele coincid (abstracție făcînd eventual de o mulțime numărabilă de puncte).

Prima din aceste proprietăți stă la baza „metodei seriilor”, sistematic folosită în capitolele 5 și 6: ea conduce de la egalitatea a două dezvoltări în serie, la egalitatea coeficienților corespunzători, și de aci la construirea de sisteme infinite de ecuații algebrice, care permit determinarea mărimilor necunoscute.

Toate cele de mai sus sînt în fond proprietăți ale funcțiilor sistemului trigonometric în raport cu mulțimea funcțiilor integrabile (prima din ele este chiar mai generală), mulțime în care două funcții sînt privite ca egale dacă diferă numai pe o mulțime numărabilă de puncte⁶⁾. Ele stabilesc într-un anumit sens *echivalența* dintre aceste funcții, destul de generale — și reprezentările lor prin intermediul unor serii trigonometrice.

Prin urmare, orice funcție integrabilă este complet „caracterizată” de seria sa Fourier, care poate fi privită ca o formă-standard a funcției. Prin aceasta, seriile Fourier se deosebesc în mod avantajos de seriile Taylor (reale).

Cele de mai sus rămîn valabile pentru clasa V și subclasele sale (vezi § 1, pag. 687).

Aceste proprietăți nu depind de faptul dacă seria converge sau nu, nici dacă suma ei este sau nu egală cu funcția dată.

c) Convergență; proprietăți ale coeficienților

Un răspuns destul de general la chestiunea convergenței este dat de *teorema lui Jordan*: dacă $f(\theta) \in V[0, 2\pi]$, atunci seria sa Fourier este convergentă, și suma ei este egală cu $\frac{1}{2} [f(\theta + 0) + f(\theta - 0)]$ pentru orice $\theta \in]0, 2\pi[$. În punctele în care $f(\theta)$ este continuă, seria sa Fourier este uniform convergentă. Dacă avem și $f(\theta) \in C^0[a, b]$, cu $[a, b] \subset [0, 2\pi]$, atunci seria Fourier converge uniform spre $f(\theta)$ pe $[a, b]$.

Subliniem că condițiile $f(\theta) \in C^0$, și chiar $f(\theta) \in C_\mu^0$, $\mu \leq 1/2$, nu sînt suficiente pentru a asigura convergența seriei Fourier.

Întrucît integrala definită este o funcție continuă și cu variație mărginită ca funcție de limita superioară de integrare, integrala *oricărei* funcții integrabile este desfășurabilă în serie Fourier convergentă.

Integrînd deci termen cu termen seria Fourier a unei funcții integrabile (chiar dacă această serie nu este convergentă!) și pentru care $c_0 = 0$, obținem o serie trigonometrică ce

⁶⁾ Cititorul va observa că folosim în mod intenționat această formulare destul de greoaie, în locul noțiunii mai compacte — dar mai puțin elementare — de „funcții care coincid aproape peste tot”, adică cel mult cu excepția unei mulțimi de măsură nulă.

converge (uniform în raport cu limita superioară de integrare) către integrala funcției considerate. Pe de altă parte, dacă $f'(\theta)$ este desfășurabilă în serie Fourier, atunci această serie se obține prin derivare termen cu termen a seriei Fourier a funcției $f(\theta)$.

Să considerăm acum funcția $f(\theta)$ extinsă periodic înafara intervalului $[0, 2\pi]$. Dacă $f(2\pi) \neq f(0)$, aceasta înseamnă că punctele $\theta = 2h\pi$ sînt puncte de discontinuitate, de care va trebui să ținem seama.

Pentru coeficienții c_n, d_n , sînt valabile următoarele relații de mărginire:

a. Dacă $f(\theta)$ este integrabilă (în particular: dacă $f(\theta)$ verifică condițiile lui Dirichlet, ținînd seama și de eventuale discontinuități în punctele $2h\pi$), atunci (independent de faptul dacă seria Fourier converge sau nu) sînt valabile relațiile (9):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} d_n = 0. \quad (13)$$

b. Dacă $f(\theta) \in C_\mu^0$ (ceea ce presupune $f(2\pi) = f(0)$), atunci

$$|c_n|, |d_n| \leq C|n|^{-\mu}, \quad 0 < \mu \leq 1. \quad (14)$$

c. Dacă $f(\theta) \in V$ (eventual $f(2\pi) \neq f(0)$), atunci

$$|c_n|, |d_n| \leq C|n|^{-1}. \quad (15)$$

(Vezi și § 1, pag. 687; compară cu (14) pentru $\mu = 1$).

d. Dacă $f(\theta)$ este absolut continuă (deci și $f(2\pi) = f(0)$), atunci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |nc_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} |nd_n| = 0. \quad (16)$$

Relația este satisfăcută în particular dacă $f(\theta) \in C_1^0$; mai particular, dacă $f(\theta)$ este derivabilă și cu derivata mărginită; mai particular, dacă $f(\theta) \in C^1$.

Desigur, putem face uz de aceste formule și relativ la funcția $f'(\theta)$, dacă ea posedă proprietățile menționate. Dacă $f(2\pi) = f(0)$, atunci notînd coeficienții Fourier ai funcției $F(\theta) = f'(\theta)$ cu C_n, D_n (vezi și (7.5)), după integrare prin părți obținem

$$c_n = -n^{-1} D_n, \quad d_n = n^{-1} C_n; \quad (17)$$

prima din aceste relații este valabilă chiar dacă $f(2\pi) \neq f(0)$.

Ținînd seama de (17) în (13)–(16), obținem evaluările corespunzătoare. Prezența unei discontinuități a funcției $f(\theta)$ are același efect ca și inegalitatea $f(2\pi) \neq f(0)$: ea face să apară termeni de ordin $1/n$ în evaluarea coeficienților c_n, d_n .

Condiția $f(2\pi) = f(0)$ fiind respectată, obținem deci rezultatele următoare:

e. Dacă $f'(\theta) \in C_\mu^0$ și $f'(2\pi) = f'(0)$, atunci

$$|c_n|, |d_n| \leq C|n|^{-1-\mu}, \quad 0 < \mu \leq 1. \quad (18)$$

Seria Fourier a unei funcții cu derivată periodică și h lderiană, este deci vizibil absolut convergentă.

f. Dacă $f'(\theta) \in V$ (cazuri particulare – vezi § 1, pag. 687), atunci chiar dacă $f'(2\pi) \neq f'(0)$, avem

$$|c_n|, |d_n| \leq C|n|^{-2}. \quad (19)$$

g. Dacă $f(\theta) \in C_\mu^p$ și are toate derivatele periodice, atunci

$$|c_n|, |d_n| \leq C|n|^{-p-\mu}, \quad 0 < \mu \leq 1. \quad (20)$$

h. Dacă $f^{(p)}(\theta) \in V$, atunci chiar și pentru $f^{(p)}(2\pi) \neq f^{(p)}(0)$, avem

$$|c_n|, |d_n| \leq C|n|^{-p-1}. \quad (21)$$

Desigur, formulele (20), (21) își pierd sensul pentru $f(\theta) \in C^\infty$ cu derivate periodice. În acest caz se demonstrează:

i. Dacă $f(\theta) \in C^\infty$ este periodică împreună cu toate derivatele sale, atunci există un $\varepsilon \in]0, 1[$ astfel ca

$$|c_n|, |d_n| \leq C|\varepsilon|^n. \quad (22)$$

Toate aceste rezultate au mare însemnătate practică: cu cât $f(\theta)$ are derivate periodice și continue (nu numai pe porțiuni!) de un ordin mai înalt, cu atât convergența seriei sale Fourier este mai rapidă. Dacă condiția de periodicitate este satisfăcută numai până la un anumit ordin de derivare, existența derivatelor de ordin mai înalt nu mai are nici un efect.

Să remarcăm că o funcție polinomială în θ , prelungită înafara intervalului $[0, 2\pi]$, duce inevitabil la apariția de discontinuități ale derivatelor. (Nu se pot alege coeficienții polinomului în așa fel încât să fie asigurată periodicitatea funcției și a tuturor derivatelor sale.) Folosind acest fapt, este posibil să se adauge oricărei funcții un termen polinomial convenabil ales, astfel încât să mărim ordinul de derivare până la care condiția de periodicitate este satisfăcută. Această operație se numește *ameliorarea convergenței seriilor Fourier*.

Pentru relațiile (13)–(22) și pentru chestiunea ameliorării convergenței, vezi de pildă N. Bari [1], §§ 1.22–1.25; V. Smirnov [2], volumul 2, pct. 151 și 157–159; G. Tolstov [1], §§ 5.8 și 5.11.

d) Serii Fourier complexe

Toate aceste rezultate pot fi ușor extinse la cazul unei funcții *complexe* de parametrul *real* θ sau, ceea ce este același lucru, de punctul $\sigma = \exp(i\theta)$ de pe γ . Înlocuind sistemul trigonometric prin sistemul funcțiilor $\sigma^n = \exp(in\theta)$, va trebui să înlocuim (11) prin relațiile

$$\oint_\gamma \sigma^{n+m} d\sigma = \begin{cases} 2\pi i & \text{pentru } n+m = -1, \\ 0 & \text{pentru } n+m \neq -1, \end{cases} \quad (23)$$

(vezi și (5.49)). Punând funcția complexă $f(\sigma)$ sub forma

$$f(\sigma) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n \sigma^n, \quad (24)$$

prin înmulțire cu σ^m și integrare pe γ se obține, în loc de (12),

$$f_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma f(\sigma) \sigma^{-n-1} d\sigma, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2 \dots \quad (25)$$

(compară cu (5.27)!).

Formulele (12)–(16) și (18)–(22) rămân evident valabile pentru modulul $|f_n|$. Să mai remarcăm că avem

$$\overline{f_n} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \overline{f(\sigma)} \sigma^{n+1} (-\sigma^{-2} d\sigma) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \overline{f(\sigma)} \sigma^{n-1} d\sigma,$$

de unde urmează

$$\overline{f_n} = (\overline{f})_{-n} \quad \text{sau} \quad f_{-n} = \overline{(\overline{f})_n}. \quad (26)$$

(Notațiile trebuie înțelese precum urmează: f_n e dat de (25); $\overline{f_n}$ are sensul lui $\overline{(f_n)}$; în fine, coeficientul Fourier de ordin n al funcției \overline{f} se scrie $(\overline{f})_n$.)

În particular, dacă funcția $f(\theta)$ este reală, de aci deducem

$$f_{-n} = \overline{f_n}. \quad (27)$$

Legătura între seriile (10) și (24) este ușor de stabilit cu ajutorul relației (6). Anume, notînd

$$\begin{aligned} f(\sigma) &= f_1(\theta) + if_2(\theta), & f_n &= f'_n + if''_n, \\ c_n &= c'_n + ic''_n, & d_n &= d'_n + id''_n, \end{aligned} \quad (28)$$

(unde c'_n, d'_n și c''_n, d''_n sînt coeficienții Fourier ai funcțiilor reale $f_1(\theta), f_2(\theta)$), obținem din (25) pentru $n \geq 0$:

$$\begin{aligned} f_n &= f'_n + if''_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [f_1(\theta) + if_2(\theta)] [\cos n\theta - i \sin n\theta] d\theta = \\ &= \frac{1}{2} [(c'_n + d''_n) + i(c''_n - d'_n)]. \end{aligned} \quad (29)$$

Din (26) și (29) obținem încă pentru $n > 0$

$$f_{-n} = f'_{-n} + if''_{-n} = \frac{1}{2} [(c'_n - d''_n) + i(c''_n + d'_n)]. \quad (30)$$

Cu aceasta, formula (24) devine

$$\begin{aligned} f_1(\theta) + if_2(\theta) &= \frac{1}{2} (c'_0 + ic''_0) + \sum_{n=1}^{\infty} (c'_n \cos n\theta + d'_n \sin n\theta) + \\ &+ i \sum_{n=1}^{\infty} (c''_n \cos n\theta + d''_n \sin n\theta), \end{aligned} \quad (31)$$

ceea ce reprezintă suma dezvoltărilor în serii Fourier a funcțiilor $f_1(\theta)$ și $if_2(\theta)$. Dacă $f_2(\theta) = 0$, termenii pur imaginari din (31) — și deci și din (24) — dispar.

e) Serii Fourier și serii Laurent

Expresia (24) permite stabilirea unei legături strînse între seriile Fourier și seriile Laurent. Aceasta prezintă deosebit interes cînd se cere determinarea sub forma (3) a unei funcții de o singură variabilă complexă.

Din punct de vedere formal, există corespondență evidentă între dezvoltările în serie Laurent (5.26) :

$$f(\zeta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n \zeta^n, \quad (32)$$

și cele în serie Fourier

$$f(\sigma) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n \sigma^n, \quad (33)$$

unde coincidența coeficienților rezultă din (5.27) și (25).

(O serie Laurent convergentă într-o coroană circulară de raze R^1 , R^0 poate fi ușor transformată într-o serie analogă într-o coroană de raze $\rho_1 \leq 1 \leq \rho_0$; în particular, putem face ca cercul exterior sau cel interior să coincidă cu γ .)

Se pune însă problema de a găsi în ce condiții (33) este *valoarea la limită* a seriei (32); așadar — presupunând că am ales $\rho_0 = 1$ — în ce condiții o dezvoltare în serie Laurent poate fi prelungită *prin continuitate* pe cercul unitate $\gamma = \mathcal{H}_0$ și pe cercul interior \mathcal{H}_1 de rază ρ_1 , ce definesc coroana sa de convergență.

Evident, este suficient să cercetăm chestiunea pentru dezvoltările tayloriene

$$f(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \zeta^n \quad (34)$$

și dezvoltarea Fourier de formă specială

$$f(\sigma) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \sigma^n. \quad (35)$$

Seria (34) converge uniform pe orice compact conținut în \mathcal{H}^+ ; dar pe γ pot exista puncte în care seria-limită (35) converge, și altele în care ea diverge. *Aceste puncte nu trebuie confundate cu punctele regulate și punctele singulare ale elementului taylorian* (34); totodată, nu trebuie confundată posibilitatea de *prelungire analitică* a funcției (34) printr-un punct regulat al frontierei, cu posibilitatea de a *prelungi prin continuitate* funcția $f(\zeta)$ într-un anumit punct al frontierei (sau chiar pe toată frontiera), și mai departe cu proprietatea de *convergență* a seriei (35) pe frontieră.

Astfel de exemplu, pentru funcția

$$f(\zeta) = (1 - \zeta)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \zeta^n, \quad (36)$$

toate punctele de pe γ (cu excepția lui $\zeta = 1$) sînt puncte regulate; totuși, seria (36) diverge peste tot pe γ (ceea ce rezultă din faptul că coeficienții ei nu satisfac condiția necesară (9)); totuși, funcția poate fi prelungită prin continuitate în orice punct de pe γ (exceptînd $\zeta = 1$).

Relativ la acest cerc de idei, menționăm aci *teorema a doua a lui N. Abel*: dacă seria (35) converge într-un punct $\sigma_0 \in \gamma$, atunci suma seriei

(34) poate fi prelungită prin continuitate în acest punct pe orice drum ne-tangent la γ , și avem

$$f^+(\sigma_0) = \lim_{\zeta \rightarrow \sigma_0} f(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \sigma_0^n. \quad (37)$$

Reciproca acestei teoreme este în general falsă, după cum o arată exemplul seriei (36): $\lim f(\zeta)$ există pentru orice $\zeta \neq 1$, $|\zeta| \rightarrow 1$ și totuși seria-limită pe γ diverge peste tot.

Într-un cadru mai restrictiv însă, se poate demonstra *teorema lui G. Hardy și J. Littlewood* [1]: dacă $f^+(\sigma_0) = \lim_{\zeta \rightarrow \sigma_0} f(\zeta)$ există pentru $\zeta \rightarrow \sigma_0$, și dacă

$$|f_n| \leq Cn^{-1}, \quad (38)$$

atunci seria-limită (35) converge în σ_0 , și egalitatea (37) este verificată. (Cu privire la seria (36), este limpede că coeficienții acesteia nu verifică (38).)

Un rezultat anterior al lui A. Tauber făcea uz de condiția mai severă

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n f_n = 0. \quad (39)$$

Aceste teoreme stabilesc legături cu caracter *punctual* între punctele de convergență ale seriei Fourier, și posibilitatea de prelungire *prin continuitate* a funcției $f(\zeta)$ pe γ . Ele nu fac să intervină noțiunea de punct regulat. Astfel, punctul $\zeta = -1$ este un punct singular al funcției $(1 + \zeta)^{1/2}$; totuși dezvoltarea ei în serie este convergentă peste tot pe γ , iar funcția poate fi prelungită prin continuitate pe γ , *inclusiv* în punctul singular (ceea ce este vizibil din dezvoltarea în serie (8.60), din teorema lui Tauber, și din a doua formulă (8.81)).

O anumită precizare asupra rolului punctelor regulate în convergența seriei (35) este dată de *teorema lui P. Fatou* [1]: dacă

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = 0, \quad (40)$$

atunci seria (35) este uniform convergentă pe orice arc *închis* de pe γ , format numai din puncte regulate.

Toate cele de mai sus nu sînt chestiuni de finețe teoretică, ci probleme de cea mai mare însemnătate practică: de ele depinde posibilitatea de a formula și rezolva corect problemele la limită ale teoriei funcțiilor de o variabilă complexă.

Mărginindu-ne în continuare la cazul dezvoltării (34), rezultă că *dacă* funcția $f(\zeta)$ poate fi prelungită peste tot pe γ , atunci, în cadrul de valabilitate al teoremei Hardy-Littlewood sau Tauber, valoarea ei la limită este dată de (35) — așadar de o serie Fourier în care coeficienții de indici negativi sînt nuli:

$$f_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} f(\sigma) \sigma^{n-1} d\sigma = 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (41)$$

Convergența seriei (34) nu garantează convergența uniformă sau absolută a seriei (35), astfel că din faptul că $f(\zeta) \in C^\infty(\mathcal{H}^+)$ nu rezultă nici un fel de concluzie relativ la posibilitatea de a deriva (35) termen cu termen.

Reciproc, fie acum dată o funcție $f(\sigma)$ integrabilă pe γ , și să presupunem condițiile (41) satisfăcute. Construind formal dezvoltările (34), (35), știm că o condiție *suficientă* de convergență a dezvoltării (35) este $f(\sigma) \in V$. Din prima teoremă a lui Abel rezultă în acest caz că seria (34) este absolut convergentă în orice compact interior lui \mathcal{H}^+ . Din a doua teoremă a lui Abel urmează că funcția (34) tinde la limită spre suma seriei (35), așadar că funcția olomorfe $f(\zeta)$ construită în (34) tinde către $f(\sigma)$ în toate punctele de continuitate ale acesteia pe γ ; în punctele ei de discontinuitate, avem $f^+(\sigma_0) = (1/2)[f(\theta_0 + 0) + f(\theta_0 - 0)]$. Aceste puncte formează o mulțime cel mult numărabilă.

Prin urmare, relațiile (41) sînt condiții *necesare* pentru ca $f(\sigma)$ să fie valoarea la limită a unei funcții olomorfe în \mathcal{H}^+ . O condiție *suficientă* este ca, pe lîngă (41), seria Fourier a funcției $f(\sigma)$ să fie convergentă cel puțin într-un punct; aceasta este evident asigurat pentru $f(\sigma) \in V(\gamma)$.

Dacă $f'(\sigma) \in C_\mu^0$ și $f'(\theta)$ este periodică, sau dacă $f'(\sigma) \in V$, din (18), (19) rezultă că seria (34) este absolut și uniform convergentă în orice compact interior lui \mathcal{H}^+ , iar valoarea ei la limită este $f(\sigma)$. Aceste condiții sînt însă mai severe decît cere natura problemei. Pentru condiții mai slabe, vezi § 11.

Desigur, derivatele funcției $f(\zeta)$ se pot obține prin derivare termen cu termen a seriei (34) — dar nici o concluzie nu poate fi trasă cu referire la derivatele funcției $f(\sigma)$.

Cele de mai sus pot fi transpuse pentru funcții olomorfe în planul cu un orificiu circular unitar (domeniul \mathcal{H}^-). Pentru aceasta, este suficient să înlocuim (41) prin condiția

$$f_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} f(\sigma) \sigma^{-n-1} d\sigma = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (42)$$

Să presupunem acum că funcția $f(\sigma)$ este integrabilă, dar condițiile (41) *nu sînt* satisfăcute. Dacă numai un număr *finit* de coeficienți de indici negativi sînt diferiți de zero, seria (34) se înlocuiește printr-o serie Laurent, a cărei parte principală are numai un număr finit de termeni. Prin urmare, $f(\sigma)$ este valoarea la limită a unei funcții *meromorfe* în \mathcal{H}^+ , unde ea posedă un pol de ordin p în origine (p fiind cel mai mare număr natural pentru care $f_{-p} \neq 0$). Probleme de convergență pentru partea principală nu se pun.

Să admitem în fine că există o *infinitate* de coeficienți de indici negativi, diferiți de zero. În acest caz, se poate construi seria

$$f(\sigma) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n \sigma^n \quad (43)$$

și dezvoltările (formale):

$$f_+(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \zeta^n, \quad f_-(\zeta) = - \sum_{n=1}^{\infty} f_{-n} \zeta^{-n}. \quad (44)$$

Seria (43) este convergentă dacă $f(\sigma) \in V(\gamma)$.

În ce privește seriile (44), prima din ele converge (în virtutea primei teoreme a lui Abel) în interiorul unui cerc de rază cel puțin 1, iar cea de a doua, în exteriorul unui cerc

de rază cel mult 1. Din (5.19) și (5.24) rezultă că, notînd

$$\rho_0 = 1/\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|f_n|}, \quad \rho_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|f_{-n}|}, \quad n > 0, \quad (45)$$

seria $f_+(\zeta)$ converge pentru $|\zeta| < \rho_0$, iar seria $f_-(\zeta)$ converge pentru $|\zeta| > \rho_1$. Seria Laurent

$$f(\zeta) = f_+(\zeta) - f_-(\zeta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n \zeta^n \quad (46)$$

converge deci absolut și uniform în interiorul coroanei circulare $\rho_1 < |\zeta| < \rho_0$. Evident, rezultatul are sens numai dacă $\rho_1 < \rho_0$, ceea ce depinde de coeficienții f_n , așadar de însăși funcția $f(\sigma)$. După cum am văzut, avem cu necesitate $\rho_0 \geq 1$ și $\rho_1 \leq 1$.

Pentru o funcție $f(\sigma)$ dată pe γ , se poate să avem $\rho_0 > 1$ și $\rho_1 < 1$. În acest caz, faptul că $f(\sigma)$ este valoarea „la limită” a funcției (46) rezultă banal.

Dacă pentru o funcție $f(\sigma)$ dată avem $\rho_0 = 1$, $\rho_1 < 1$, rezultatul este evident pentru acea parte din dezvoltarea în serie (43) ce corespunde indicilor negativi, și urmează din prima și a doua teoremă a lui Abel pentru partea corespunzătoare indicilor pozitivi (ca și pentru funcțiile (34), (35)). Tot astfel putem conchide și în cazul complementar $\rho_1 = 1$, $\rho_0 > 1$.

Singurul caz în care convergența seriei (46) este lipsită de sens, este cazul $\rho_0 = \rho_1 = 1$: acesta e cel mai frecvent în practică. El apare cu certitudine dacă $f(\sigma)$ sau una din derivatele sale au puncte de discontinuitate pe γ , căci în acest caz sînt satisfăcute cel mult relațiile de tipul (21): pentru p fix, rezultă $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^p} = 1$, și deci coroana de convergență degenerază în chiar cercul γ . Prin urmare, o condiție necesară pentru ca o serie de forma (43) să definească o funcție (46) convergentă într-o coroană circulară nedegenerată, este ca $f(\sigma) \in C^\infty(\gamma)$.

În § 5, pag. 726, am văzut că valorile unei funcții pe o mulțime de puncte ce posedă un punct de acumulare definesc cel mult o funcție olomorfă. La prima vedere, s-ar părea că se pot da contra-exemple: ar fi suficient să dăm pe o parte din γ o funcție $f(\sigma)$ ca valoare la limită a unei funcții olomorfe în \mathcal{D}^+ , și pe rest, valoarea la limită a unei alte funcții olomorfe în \mathcal{D}^+ . În fapt, din cele de mai sus rezultă că coroana circulară de convergență a funcției ce se obține în acest mod, degenerază.

Mai mult: nu ne putem da dinainte pe ambele cercuri-frontieră valorile la limită ale unei funcții olomorfe într-o coroană: datele de pe unul din aceste cercuri definesc pe deplin valorile funcției în coroană, inclusiv și pe celălalt cerc (dacă o astfel de funcție există!).

Orice funcție cu variație mărginită $f(\sigma)$ permite deci construirea formală a unei dezvoltări în serie Laurent, convergentă într-o coroană $\rho_1 \leq 1 \leq \rho_0$. Dacă $\rho_1 = \rho_0 = 1$, această serie nu are sens, și $f(\sigma)$ este diferența valorilor la limită a două funcții, dintre care una este olomorfă în \mathcal{D}^+ , iar cealaltă, în \mathcal{D}^- :

$$f(\sigma_0) = f_+(\sigma_0) - f_-(\sigma_0). \quad (47)$$

Pentru ca $f(\sigma)$ să fie valoarea la limită a unei funcții olomorfe în \mathcal{D}^+ , este necesar și suficient ca $f_-(\zeta) \equiv 0$; pentru ca ea să fie valoarea la limită a unei funcții olomorfe în \mathcal{D}^- , este necesar și suficient ca $f_+(\zeta) \equiv f_0 = \text{const.}$ Acestea sînt echivalente cu condițiile (41), (42).

Dacă $f(\sigma)$ e dată sub forma unei serii de sinuși și cosinuși pentru părțile sale reală și imaginară, atunci, făcînd uz de (29) și (30), se obțin de pildă din (41) condițiile

$$d'_n = -c''_n, \quad d''_n = c'_n, \quad (48)$$

de unde

$$f_n = c'_n + i c''_n, \quad f_{-n} = 0, \quad (n > 0). \quad (49)$$

Din (31) rezultă acum că condiția necesară și suficientă pentru ca $f(\sigma)$ să fie valoarea la limită a unei funcții olomorfe în \mathcal{H}^+ , este ca ea să fie de forma

$$f(\sigma) = \frac{1}{2} (c'_0 + i c''_0) + \sum_{n=1}^{\infty} (c'_n + i c''_n) \exp(in\theta). \quad (50)$$

Pentru ca $f(\sigma)$ să fie valoarea la limită a unei funcții olomorfe în \mathcal{H}^- , și nulă la infinit trebuie să avem

$$d'_n = c''_n, \quad d''_n = -c'_n, \quad (51)$$

de unde urmează

$$f(\sigma) = \sum_{n=1}^{\infty} (c'_n + i c''_n) \exp(-in\theta). \quad (52)$$

După cum se vede, dezvoltările în serie Fourier permit să considerăm date la limită foarte generale. Cunoașterea acestor date la limită *echivalează* cu cunoașterea coeficienților Fourier corespunzători, și toate calculele bazate pe determinarea coeficienților din condiții de tip (5) sînt justificate. Orice astfel de funcție poate fi prelungită în interior și în exterior, în așa fel încît ea să rezulte ca diferență a unor funcții olomorfe în \mathcal{H}^+ și \mathcal{H}^- . Prin urmare, probleme în care soluția este **analitică** în domeniul considerat, pot fi rezolvate chiar pentru date la limită considerabil mai generale: h lderiene, sau cu variație  rginită.

Desigur, o metodă bazată pe identificarea coeficienților nu strălucește prin eleganță.  n fapt însă, ea este foarte efecace; și adesea, chiar metode teoretice mai rafinate conduc la formule care, pentru a fi utilizate în calcule, necesită operații echivalente în fond cu cea de dezvoltare în serie, cu identificare ulterioară a coeficienților.

Asupra condițiilor pentru ca o funcție să fie valoarea la limită a unei funcții olomorfe, vom reveni într-un cadru mai general în § 11. Cele spuse aci au ca scop să dea o pregătire euristică, fără de care rezultatele din § 11 ar apare formale și cu o semnificație greu de sesizat.

f) Generalizări diferite

Teoria din punctele **b** – **d** poate fi generalizată la cazul funcțiilor definite pe intervalul $[0, 2l]$, cu $l \neq \pi$. Pentru aceasta, este suficient să înlocuim funcțiile $\sigma^n = \exp(in\theta)$ prin sistemul funcțiilor $\exp(in\pi x/l)$, ortogonal pe intervalul $[0, 2l]$. Se obțin astfel dezvoltări în

serie de forma

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n \exp(i n \pi x/l), \quad \text{unde } f_n = \frac{1}{2l} \int_{-l}^{+l} f(\xi) \exp(-i n \pi \xi/l) d\xi, \quad (53)$$

sau încă

$$f(x) = \frac{1}{2} c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[c_n \cos \frac{n \pi x}{l} + d_n \sin \frac{n \pi x}{l} \right], \quad (54)$$

unde

$$c_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{+l} f(\xi) \cos \frac{n \pi \xi}{l} d\xi, \quad d_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{+l} f(\xi) \sin \frac{n \pi \xi}{l} d\xi. \quad (55)$$

Cazul-limită al funcțiilor ne-periodice, așadar pentru care $l \rightarrow \infty$, necesită considerarea *integralei Fourier* (vezi de pildă V. Smirnov [2], volumul 2, pct. 160; I. Sneddon [1], capitolul 1). Anume, punind (53) sub forma

$$f(x) = \frac{1}{2l} \int_{-l}^{+l} f(\xi) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp \left[\frac{i n \pi (x - \xi)}{l} \right] d\xi \quad (56)$$

(fără a ne ocupa aci de justificarea operației de permutare a sumei cu integrala), se înlocuiește raportul $n\pi/l$, pentru $l \rightarrow \infty$, printr-o variabilă α , și suma pentru n de la $-\infty$ la $+\infty$, printr-o integrare în raport cu α de la $-\infty$ la $+\infty$ (unde, evident, $\Delta\alpha = \pi/l$). În felul acesta se obține *formula integrală a lui Fourier*, valabilă pentru orice funcție $f(x) \in C^0 \cap V$:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \exp[i\alpha(x - \xi)] d\alpha d\xi. \quad (57)$$

Formula rămâne valabilă pentru $f(x) \in V$, dacă se înlocuiește primul ei membru prin $(1/2) [f(x+0) + f(x-0)]$.

Se pot obține ușor forme ale integralei Fourier scrise cu ajutorul funcțiilor $\cos \alpha(x - \xi)$ și $\sin \alpha(x - \xi)$ (compară cu (29)–(31)). Dacă funcția $f(x)$ este reală, partea imaginară a integralei (57) rezultă identic nulă, în virtutea proprietăților de simetrie, respectiv antisimetrie, ale funcțiilor $\cos \alpha(x - \xi)$ și $\sin \alpha(x - \xi)$.

În cazul unei funcții de două variabile $f(x, y)$, unde $x \in [0, 2l]$ și $y \in [0, 2p]$, putem începe prin a construi seria Fourier corespunzătoare acestei funcții privită ca funcție de x :

$$f(x, y) = \sum_{h=-\infty}^{\infty} a_h(y) \exp \left(\frac{i \pi h x}{l} \right), \quad a_h(y) = \frac{1}{2l} \int_{-l}^{+l} f(\xi, y) \exp \left(\frac{-i \pi h \xi}{l} \right) d\xi. \quad (58)$$

La rândul lor, coeficienții $a_h(y)$ pot fi dezvoltati în serie Fourier.

$$a_h(y) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{hk} \exp \left(\frac{i \pi k y}{p} \right), \quad a_{hk} = \frac{1}{2p} \int_{-p}^{+p} a_h(\eta) \exp \left(\frac{-i \pi k \eta}{p} \right) d\eta. \quad (59)$$

Introducând acum (59) în (58), obținem

$$f(x, y) = \sum_{h, k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{4lp} \left\{ \int_{-l}^{+l} \int_{-p}^{+p} f(\xi, \eta) \exp \left[-i\pi \left(\frac{h\xi}{l} + \frac{k\eta}{p} \right) \right] d\xi d\eta \right\} \times \\ \times \exp \left[i\pi \left(\frac{hx}{l} + \frac{ky}{p} \right) \right]. \quad (60)$$

Pentru o funcție reală $f(x, y)$, termenii pur imaginari se reduc, iar partea reală a acestei serii se scrie sub forma unei serii duble de sinuși și cosinuși.

În sfârșit, pentru o funcție $f(x, y)$ neperiodică, așadar pentru $l, p \rightarrow \infty$, se obține formula integrală a lui Fourier pentru două variabile (vezi de ex. V. Smirnov [2], vol. 2, pet. 162):

$$f(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \iiint_{-\infty}^{+\infty} f(\xi, \eta) \exp [i\alpha(x - \xi) + i\beta(y - \eta)] d\alpha d\beta d\xi d\eta. \quad (61)$$

Formule analoge se pot scrie pentru funcții de mai multe variabile.

§ 10. FORMULELE DE TIP CAUCHY PENTRU FUNCȚII OLOMORFE ȘI MEROMORFE

Cele spuse relativ la relația dintre valorile la limită ale unor funcții olomorfe și valorile lor în domeniul de olomorfie, pot fi obținute utilizând numai proprietățile la limită ale integralei Cauchy, și ale integralei de tip Cauchy, care o generalizează.

Să ne limităm deocamdată la domenii *simplu conexe* (nu neapărat circulare). Vom nota cu \mathcal{L} frontiera (o curbă simplă închisă) și cu \mathcal{D}^+ , \mathcal{D}^- cele două domenii pe care ea le definește.

Vom prezenta aci patru formule care generalizează teorema lui Cauchy (5.10) și formula lui Cauchy (5.15), pentru funcții olomorfe sau meromorfe în \mathcal{D}^+ sau în \mathcal{D}^- (vezi de ex. N. Mushelişvili [5], § 70).

Formula nr. 1^o: Dacă $f(z)$ este olomorfă în \mathcal{D}^+ și prelungibilă pe \mathcal{L} , atunci

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{L}} \frac{f(t)}{t - z} dt = \begin{cases} f(z) & \text{pentru } z \in \mathcal{D}^+, \\ 0 & \text{pentru } z \in \mathcal{D}^-. \end{cases} \quad (1)$$

Într-adevăr, pentru $z \in \mathcal{D}^+$, formula (1) coincide cu (5.15). Pentru $z \in \mathcal{D}^-$, funcția $f(t)/(t - z)$ este olomorfă pentru $t \in \mathcal{D}^+$ și continuă în $\mathcal{D}^+ + \mathcal{L}$, astfel că ne găsim în cadrul de valabilitate al teoremei (5.10).

Formula nr. 2^o: Dacă $f(z)$ este olomorfă în \mathcal{D}^- (avînd cel mult un pol de ordin zero la infinit) și prelungibilă pe \mathcal{L} , atunci

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{L}} \frac{f(t)}{t-z} dt \begin{cases} -f(z) + a_0 & \text{pentru } z \in \mathcal{D}^-, \\ a_0 & \text{pentru } z \in \mathcal{D}^+, \end{cases} \quad (2)$$

unde $a_0 = f(\infty)$.

Prin ipoteză, pentru $|z|$ suficient de mare, $f(z)$ are forma

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{-n} z^{-n}. \quad (3)$$

Pentru orice $z \in \mathcal{D}^-$, putem construi un cerc Γ cu centrul în origine și care conține în interior atât curba \mathcal{L} , cât și punctul z . Aplicînd (5.15) relativ la domeniul mărginit de \mathcal{L} și Γ , domeniul în care $f(z)$ este olomorfă, obținem

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{L} + \Gamma} \frac{f(t)}{t-z} dt, \quad (4)$$

unde conturul Γ este parcurs în sens direct, iar \mathcal{L} , în sens retrograd. Integrala

$$I = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(t)}{t-z} dt \quad (5)$$

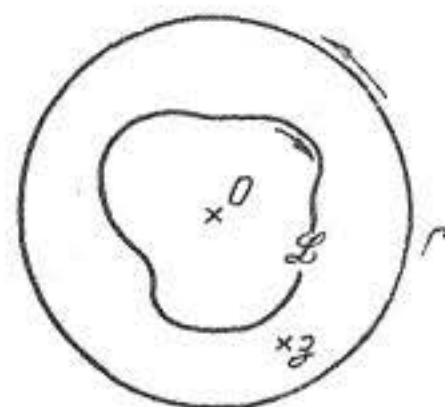


Fig. A.10.1

este independentă de raza R a lui Γ . Într-adevăr, considerînd două cercuri concentrice Γ' și Γ'' și ținînd seama că punctul z nu aparține coroanei astfel definite, obținem din (5.10):

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma' + \Gamma''} \frac{f(t)}{t-z} dt = I' - I'' = 0. \quad (6)$$

Să presupunem deocamdată că $a_0 = 0$, așadar că $f(z)$ este olomorfă la infinit. Pentru $|t|$ suficient de mare avem deci

$$|f(t)| \leq C |t|^{-1}. \quad (7)$$

Pentru modulul integralei I găsim

$$|I| \leq \frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma} \frac{|f(t)| |dt|}{|t-z|}. \quad (8)$$

Întrucît pe Γ avem $t = R \exp(i\theta)$, $dt = iR \exp(i\theta) d\theta$, din (7) și (8) deducem

$$|I| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{C}{|t-z|} d\theta \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{C}{|t| - |z|} d\theta. \quad (9)$$

Întrucît $|z|$ este fix, iar $|t| = R \rightarrow \infty$ atunci cînd facem raza cercului Γ să crească nemărginit, rezultă — ținînd seama și de (6) — că

$$I = 0,$$

astfel că integrala din (4) trebuie luată numai pe \mathcal{L} . Sensul pe \mathcal{L} fiind cel retrograd, rezultă că scriind (4) numai pe \mathcal{L} , trebuie să schimbăm semnul — ceea ce dă prima formulă din (2) pentru $a_0 = 0$.

Cazul $z \in \mathcal{D}^+$ e mai simplu. Într-adevăr, funcția $f(t)/(t - z)$ este olomorfă în domeniul mărginit de $\mathcal{L} + \Gamma$, și deci, în locul formulei lui Cauchy care conduce la (4), trebuie să facem uz de teorema lui Cauchy (5.10), care dă

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{L} + \Gamma} \frac{f(t)}{t - z} dt = 0. \quad (11)$$

Formulele (5) — (10) rămân valabile, și deci pentru ambele cazuri (când $a_0 = 0$), avem

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{L}} \frac{f(t)}{t - z} dt = \begin{cases} -f(z) & \text{pentru } z \in \mathcal{D}^-, \\ 0 & \text{pentru } z \in \mathcal{D}^+. \end{cases} \quad (12)$$

Fie acum $a_0 = f(\infty) \neq 0$, Formulele (12) rămân valabile pentru $f(z) - a_0$, și deci

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{L}} \frac{f(t) - a_0}{t - z} dt = \begin{cases} -[f(z) - a_0] & \text{pentru } z \in \mathcal{D}^-, \\ 0 & \text{pentru } z \in \mathcal{D}^+. \end{cases} \quad (13)$$

Or, făcând uz de (1) pentru funcția $f(z) \equiv 1$, avem evident

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{L}} \frac{1}{t - z} dt = \begin{cases} 0 & \text{pentru } z \in \mathcal{D}^-, \\ 1 & \text{pentru } z \in \mathcal{D}^+. \end{cases} \quad (14)$$

Introducând acum (14) în (13), obținem tocmai formulele (2).

Formulele (1), (2) pot fi generalizate la cazul unor funcții $f(z)$ meromorfe, având un număr finit de poli în \mathcal{D}^+ sau în \mathcal{D}^- .

Să presupunem deci că în vecinătatea unui punct c , funcția $f(z)$ are forma

$$f(z) = G(z) + f_0(z), \quad (15)$$

cu $f_0(z)$ olomorfă în $z = c$, și cu

$$G(z) = \sum_{j=1}^l A_j (z - c)^{-j}, \quad (16)$$

unde A_j sînt niște constante. Funcția $G(z)$ este deci partea principală (cu număr finit de termeni) a funcției $f(z)$ în vecinătatea polului c de ordin l .

Dacă $c = z_\infty$, atunci avem în mod analog

$$G(z) = \sum_{j=0}^l A_j z^j. \quad (17)$$

Să presupunem acum că funcția $f(z)$ este meromorfă în \mathcal{D}^+ (respectiv în \mathcal{D}^-), avînd poli în punctele c_1, c_2, \dots, c_p aparținînd lui \mathcal{D}^+ (respectiv \mathcal{D}^-), cu părțile principale $G_1(z), G_2(z), \dots, G_p(z)$. Prin urmare, $f(z)$ are forma

$$f(z) = \sum_{h=1}^p G_h(z) + f_0(z), \quad (18)$$

unde $f_0(z)$ este olomorfă în \mathcal{D}^+ (respectiv \mathcal{D}^-), iar funcțiile

$$G_h(z) = \sum_{j=1}^{l_h} A_{jh}(z - c_h)^{-j} \quad (19)$$

sînt olomorfe (și nule la infinit) în \mathcal{D}^- (respectiv în \mathcal{D}^+).

Formula nr. 3: Pentru funcția $f(z)$ de forma (18), prelungibilă prin continuitate pe \mathcal{L} , meromorfă în \mathcal{D}^+ și avînd în c_1, c_2, \dots, c_p poli cu părțile principale (19), avem

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{L}} \frac{f(t)}{t - z} dt = \begin{cases} f_0(z) & \text{pentru } z \in \mathcal{D}^+, \\ - \sum_{h=1}^p G_h(z) & \text{pentru } z \in \mathcal{D}^-. \end{cases} \quad (20)$$

Într-adevăr, întrucît funcția $f_0(z)$ din (18) este olomorfă în \mathcal{D}^+ , și continuă în $\mathcal{D}^+ + \mathcal{L}$, obținem din (1)

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{L}} \frac{f_0(t)}{t - z} dt = \begin{cases} f_0(z) & \text{pentru } z \in \mathcal{D}^+, \\ 0 & \text{pentru } z \in \mathcal{D}^-. \end{cases} \quad (21)$$

Tot astfel, întrucît funcțiile $G_h(z)$ sînt în acest caz olomorfe în \mathcal{D}^- , nule la infinit și prelungibile pe \mathcal{L} , deducem din (2)

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{L}} \frac{G_h(t)}{t - z} dt = \begin{cases} 0 & \text{pentru } z \in \mathcal{D}^+, \\ -G_h(z) & \text{pentru } z \in \mathcal{D}^-. \end{cases} \quad (22)$$

Sumînd în (22) pentru h de la 1 la p , adunînd cu (21) și ținînd seama de (18), obținem tocmai formula (20).

Formula nr. 4^o: Pentru $f(z)$ de forma (18), prelungibilă prin continuitate pe \mathcal{L} , meromorfă în \mathcal{D}^- , și avînd în c_1, c_2, \dots, c_p (printre care eventual și în z_∞) poli cu părți principale (19) (eventual (17)), avem

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{L}} \frac{f(t)}{t - z} dt = \begin{cases} -f_0(z) & \text{pentru } z \in \mathcal{D}^-, \\ \sum_{h=1}^p G_h(z) & \text{pentru } z \in \mathcal{D}^+. \end{cases} \quad (23)$$

Într-adevăr, descompunerea (18) rămîne valabilă. Funcția $f_0(z)$ este olomorfă în \mathcal{D}^- , continuă în $\mathcal{D}^- + \mathcal{L}$, și nulă la infinit. Avem deci din (2)

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{L}} \frac{f_0(t)}{t - z} dt = \begin{cases} -f_0(z) & \text{pentru } z \in \mathcal{D}^-, \\ 0 & \text{pentru } z \in \mathcal{D}^+. \end{cases} \quad (24)$$

Tot astfel, întrucît funcțiile $G_h(z)$ sînt olomorfe în \mathcal{D}^+ și continue în $\mathcal{D}^+ + \mathcal{L}$, avem din (1)

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{L}} \frac{G_h(t)}{t - z} dt = \begin{cases} 0 & \text{pentru } z \in \mathcal{D}^-, \\ G_h(z) & \text{pentru } z \in \mathcal{D}^+. \end{cases} \quad (25)$$

Sumând în (25) pentru h de la 1 la p , adunând cu (24) și ținând seama de (18), obținem formula căutată (23).

Formulele (20) și (23) pot fi privite ca definind un operator integral care face să corespundă fiecărei funcții meromorfe definite numai în \mathcal{D}^+ , sau în \mathcal{D}^- , o funcție definită în tot planul (deocamdată cu excepția curbei \mathcal{L}), și *olomorfă pe porțiuni*. Astfel de pildă formula (20) pune în corespondență funcției meromorfe $f(z)$ definite în \mathcal{D}^+ , partea sa regulată $f_0(z)$, *olomorfă* în \mathcal{D}^+ , și partea sa principală luată cu semnul minus, *olomorfă* în \mathcal{D}^- . Funcția astfel definită este continuă atât în $\mathcal{D}^+ + \mathcal{L}$, cât și în $\mathcal{D}^- + \mathcal{L}$, fără ca între valorile la limită pe \mathcal{L} dinspre \mathcal{D}^+ și \mathcal{D}^- să existe a priori vreo legătură.

Funcția $f(t)$ din (20) și (23) joacă rolul unei *densități* complexe, analogă într-o oarecare măsură cu densitățile potențialilor newtonieni.

OBSERVAȚIE. Formulele (1), (2), (20), (23) își păstrează valabilitatea pentru domenii *multiplu conexe* \mathcal{D}^+ , \mathcal{D}^- , dacă în (1) și (20) înlocuim condiția $z \in \mathcal{D}^-$ prin $z \in \mathbb{C}(\mathcal{D}^+ + \mathcal{L})$, iar în (2) și (23) înlocuim condiția $z \in \mathcal{D}^+$ prin $z \in \mathbb{C}(\mathcal{D}^- + \mathcal{L})$. În acest caz, mulțimile $\mathbb{C}(\mathcal{D}^+ + \mathcal{L})$ și $\mathbb{C}(\mathcal{D}^- + \mathcal{L})$ nu sînt conexe.

§ 11. DESPRE VALORILE LA LIMITĂ ALE FUNCȚIILOR OLOMORFE

Scopul paragrafului de față este de a da formule care generalizează anumite rezultate din paragraful precedent, pentru cazul în care densitatea $f(t)$ *nu este* apriori valoarea la limită a unei funcții *olomorfe*. Ele constituie un analog al unor formule cunoscute din teoria potențialului newtonian (vezi și § 7.2), și permit în ultimă instanță construirea de ecuații integrale pentru determinarea densității $f(t)$ în anumite probleme la limită (vezi cap. 6).

a) Integrala de tip Cauchy

Să considerăm o *linie* \mathcal{L} alcătuită din curbe simple rectificabile (eventual deschise), și o funcție complexă de punct $f(t)$, $t \in \mathcal{L}$, continuă, dar altfel arbitrară.

În general, nu există nici o funcție $\varphi(z)$ *olomorfă*, astfel încît $f(\cdot)$ să fie valoarea la limită a lui $\varphi(z)$ pe \mathcal{L} (definită în sensul din (3.17)). Într-adevăr, fie de exemplu că \mathcal{L} este frontiera unui domeniu \mathcal{D}^+ . Rezolvînd problema lui Dirichlet pentru ecuația lui Laplace în \mathcal{D}^+ cu valorile la limită $\operatorname{Re} f(t)$ pe \mathcal{L} , funcția armonică conjugată soluției acestei probleme determină pe deplin valorile $\operatorname{Im} \varphi^+(t)$, astfel că funcția $\operatorname{Im} f(t)$ nu poate fi dată arbitrar.

Pentru a găsi condițiile necesare și suficiente pentru ca o funcție $f(t)$ să fie valoarea la limită a unei funcții *olomorfe* într-un domeniu a cărui frontieră este \mathcal{L} , să începem prin a presupune că \mathcal{L} este o *curbă simplă*

închisă, și să considerăm integrala (vezi și (1.1.7)) :

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}} \frac{f(t)}{t-z} dt = \begin{cases} F_+(z) & \text{pentru } z \in \mathcal{D}^+, \\ F_-(z) & \text{pentru } z \in \mathcal{D}^-, \end{cases} \quad (1)$$

unde $t \in \mathcal{L}$, iar $f(t)$ este o funcție complexă, absolut integrabilă pe \mathcal{L} .

Dacă \mathcal{L} este alcătuită din mai multe componente, (1) trebuie scris sub forma

$$F(z) = \begin{cases} F_i(z) & \text{pentru } z \in \mathcal{D}^i, \\ F_e(z) & \text{pentru } z \in \mathcal{D}^e. \end{cases} \quad (1')$$

Dacă în alcătuirea lui \mathcal{L} intră și curbe deschise, se poate defini pe acestea un sens de parcurs, și deci și o vecinătate „dreaptă” și una „stângă” pentru fiecare punct care nu este un capăt. Funcția din (1) este acum înțeleasă ca definită în aceste vecinătăți.

Vom păstra peste tot notațiile $+$, $-$, care trebuie totuși înțelese în chip diferențiat, după cum avem de-a face cu o curbă închisă, cu o linie, sau cu un arc deschis.

Funcția definită în (1) se numește *integrală de tip Cauchy, de densitate $f(t)$* .

Pentru studiul detaliat al acestor integrale, vezi de exemplu F. Gahov [1], capitolul 1; G. Goluzin [1], §§ 10.3—10.5; M. Lavrentiev și B. Șabat [1], capitolul 3, pct. 52; A. Markușevici [1], § 3.3, pct. 3; S. Mihlin [1], §§ 54—59; N. Mushelișvili [5], capitolul 4; [4], § 1.11; I. Privalov [2], § 4.3, pct. 3.

Între integralele de tip Cauchy și potențialii newtonieni (în plan) există o legătură simplă (vezi de ex. N. Mushelișvili [4], § 1.12), ceea ce explică rolul acestor integrale în studiul anumitor probleme la limită.

Dacă \mathcal{L} este frontiera unui domeniu mărginit, iar $f(t)$ este valoarea la limită a unei funcții olomorfe în acest domeniu, (1) se reduce pur și simplu la o integrală Cauchy.

Derivatele funcției $F(z)$ sînt date de o formulă similară cu (5.16) :

$$F^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}} \frac{f(t)}{(t-z)^{n+1}} dt, \quad z \in \mathcal{L}. \quad (2)$$

Prin urmare, dacă \mathcal{L} este frontiera unui domeniu, formula (1) definește două funcții olomorfe : $F_+(z)$, olomorfă în \mathcal{D}^+ , și $F_-(z)$, olomorfă în \mathcal{D}^- și nulă la infinit — cu toate că $f(t)$ nu este valoarea la limită a vreunei funcții olomorfe. (Dacă \mathcal{L} are mai multe componente, indicii $+$, $-$ se înlocuiesc cu i , e .)

În general, nu se poate spune nimic despre posibilitatea de a prelungi prin continuitate funcția (1) (sau derivatele sale (2)) pe \mathcal{L} ; și chiar dacă valorile la limită

$$F^+(t) = \lim_{z \rightarrow t \in \mathcal{L}} F_+(z), \quad F^-(t) = \lim_{z \rightarrow t \in \mathcal{L}} F_-(z) \quad (3)$$

există (vezi (3.17)), nu poate fi vorba de egalitatea lor pe \mathcal{L} . (Aceste limite sînt distincte chiar dacă $f(t)$ este valoarea pe \mathcal{L} a unei funcții olomorfe : vezi (10.1) și (10.2).)

b) Valori principale. Formulele lui Sohoŭki-Plemelj

Luînd în (1) sau (2) punctul z chiar pe curba \mathcal{L} , integralele devin improprii, și trebuie definite cu ajutorul unui proces de trecere la limită. Pentru aceasta să presupunem (vezi § 3, pag. 700) că $f(t) \in C_\mu^0(\mathcal{L})$:

$$|f(t_2) - f(t_1)| \leq H |t_2 - t_1|^\mu, \quad 0 < \mu \leq 1. \quad (4)$$

Considerînd un arc $l \subset \mathcal{L}$ cu centrul în $t_0 \in \mathcal{L}$ și de lungime 2ε , integrala improprie (1) pentru $z = t_0 \in \mathcal{L}$ poate fi calculată ca limita

$$F(t_0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L} - l} \frac{f(t)}{t - t_0} dt, \quad t_0 \in \mathcal{L}. \quad (5)$$

Integrala din membrul al doilea din (5) există întotdeauna; iar limita ei pentru $\varepsilon \rightarrow 0$ există de asemenea dacă $f(t)$ satisface (4). Această limită poartă numele de *valoare principală* (în sensul lui Cauchy) a integralei (1) în punctul $t_0 \in \mathcal{L}$.

Pentru $z = t_0 \in \mathcal{L}$ și $f(t) \in C_\mu^0(\mathcal{L})$, integrala (1) se înțelege *întotdeauna* a fi luată în sensul valorii principale. Această valoare poate fi exprimată printr-o integrală obișnuită. Procesele de trecere la limită din (5) și (3) nu au desigur nimic comun, și valorile $F(t_0)$, $F^+(t_0)$ și $F^-(t_0)$ nu trebuie în nici un caz confundate. Dar între aceste valori există o strînsă legătură. Anume, dacă $f(t) \in C_\mu^0$ în vecinătatea punctului $t_0 \in \mathcal{L}$ (așadar nu pe întreg \mathcal{L} , dar nici numai în punctul t_0), toate cele trei valori la limită există, și ele sînt legate prin formulele lui Sohoŭki-Plemelj:

$$F^+(t_0) = \frac{1}{2} f(t_0) + F(t_0), \quad F^-(t_0) = -\frac{1}{2} f(t_0) + F(t_0). \quad (6)$$

Pentru ca funcția $F(z)$ din (1) să poată fi prelungită prin continuitate pe \mathcal{L} , este deci suficient ca $f(t) \in C_\mu^0(\mathcal{L})$.

Formulele (6) au fost date — pentru o frontieră rectilinie — de către Iu. Sohoŭkii (1873) și ulterior, într-un cadru practic identic cu cel actual, de către J. Plemelj [1], [2]. Evident, ele sînt de același tip cu teoremele de discontinuitate pentru potențialii newtonieni (vezi (7.2.29) — (7.2.32)). Pentru deducerea lor, vezi de exemplu F. Gahov [1], § 1.4; A. Markușevici [1], § 3.3, pct. 4; N. Mushelișvili [4], §§ 1.15 și 1.16; I. Privalov [2], § 4.3, pct. 7—8.

Pentru a găsi criterii care să asigure că derivatele $F^{(n)}(z)$ din (2) pot fi prelungite prin continuitate pe \mathcal{L} , să examinăm cazul $n = 1$:

$$F'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}} \frac{f(t)}{(t - z)^2} dt. \quad (7)$$

Separînd din linia \mathcal{L} un arc deschis l de capete a, b ce conține t_0 , este evident că integrala (7) luată pe $\mathcal{L} - l$ este o funcție olomorfă pe l . Luată pe arcul l , ea devine

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}} \frac{f(t)}{(t - z)^2} dt = -\frac{1}{2\pi i} \frac{f(t)}{t - z} \Big|_{t=a}^{t=b} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}} \frac{f'(t)}{t - z} dt. \quad (8)$$

Prin urmare, o condiție *suficientă* pentru ca această integrală — și deci și funcția $F'(z)$ — să poată fi prelungită prin continuitate în $t_0 \in L$, este ca $f'(t) \in C_\mu^0(L)$. Pentru ca $F'(z)$ să poată fi prelungită prin continuitate peste tot pe \mathcal{L} , este deci suficient ca $f(t) \in C_\mu^1(\mathcal{L})$.

Condiția poate fi corespunzător extinsă asupra derivatelor de ordin n .

Să remarcăm că formulele (6) pot fi transcrise și sub forma echivalentă :

$$f(t_0) = F^+(t_0) - F^-(t_0), \quad 2F(t_0) = F^+(t_0) + F^-(t_0). \quad (9)$$

Prima din ele arată că *orice funcție* $f(t) \in C_\mu^0(\mathcal{L})$ *este diferența valorilor la limită a două funcții olomorfe*; dacă \mathcal{D} definește un domeniu \mathcal{D} , acestea sînt două funcții olomorfe în \mathcal{D} , respectiv în $\mathbb{C}(\mathcal{D} + \mathcal{L})$.

Rezultatul este mai general decît cel din (9.47), întrucît este valabil pentru linii \mathcal{L} mai generale decît cercul de convergență al unei serii Taylor. Din punctul de vedere al funcției-densitate, cele două rezultate se acoperă doar parțial, întrucît clasele V și C_μ^0 nu sînt subordonate una celeilalte.

Prima din formulele (9) nu depinde explicit de condiția ca $f(t)$ să fie h lderiană. În fapt, ea r m ne valabilă dacă $f(t)$ este numai *continuă*, cu condiția ca limitele $F^+(t_0)$, $F^-(t_0)$ să fie definite pentru două puncte z^+ , z^- care tind spre t_0 , pe un segment de dreaptă ce trece prin t_0 , fără a fi tangent la \mathcal{L} , și pentru care avem $|z^+ - t_0| = |z^- - t_0|$ (vezi N. Mushelişvili [4], § 1.17).

Pentru un astfel de mod de a înţelege (3), prima relație (9) r m ne deci valabilă dacă $f(t) \in C^0$. De aci rezultă că *dacă una din valorile la limită există, atunci există şi cea de a doua*.

c) Valori la limită ale funcțiilor olomorfe

Dacă \mathcal{L} este o *curbă simplă închisă*, formulele (6) ( i chiar numai prima din formulele (9)) permit să definim condițiile în care o funcție $f(t)$, $t \in \mathcal{L}$, este valoarea la limită a unei funcții olomorfe.

Anume, fie că există o funcție $\varphi(z)$ olomorfă în \mathcal{D}^+  i astfel ca

$$f(t) = \varphi^+(t), \quad t \in \mathcal{L}. \quad (10)$$

 n acest caz, din (10.1)  i (1) rezultă

$$F_-(z) \equiv \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{L}} \frac{f(t)}{t - z} dt = 0 \quad \text{pentru } z \in \mathcal{D}^-, \quad (11)$$

astfel că (11) este o condiție *necesară* pentru ca $f(t)$ să posede proprietatea (10).

Reciproc, să considerăm funcția, olomorfă în \mathcal{D}^+ , definită prin (1) : $\varphi(z) = F_+(z)$. Dacă (11) e satisfăcută, urmează $F_-(t) \equiv 0$ pentru $t \in \mathcal{L}$, oricum ar tinde $z \in \mathcal{D}^-$ spre t . Aşadar,

oricum ar tinde $z \in \mathcal{D}^+$ spre i , prima relație (9) este verificată pentru orice funcție continuă $f(t)$; introducând aci (11), obținem imediat (10).

Prin urmare, (11) este condiția *necesară și suficientă* pentru ca $f(t) \in C^0(\mathcal{L})$ să fie valoarea la limită a unei funcții olomorfe în \mathcal{D}^+ , și anume chiar a funcției (1) pentru $t \in \mathcal{D}^+$. Altfel spus, dacă a doua egalitate (10.1) este *identic* satisfăcută în \mathcal{D}^- pentru $f(t) \in C^0(\mathcal{L})$, atunci prima egalitate (10.1) definește chiar acea funcție olomorfă în \mathcal{D}^+ a cărei valoare la limită este $f(t)$.

Fie acum că există o funcție, notată provizoriu $\varphi(z)$, olomorfă în \mathcal{D}^- și astfel ca

$$f(t) = \varphi^-(t), \quad t \in \mathcal{L}. \quad (12)$$

Din (10.2) și (1) rezultă acum

$$F(z) \equiv \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{L}} \frac{f(t)}{t - z} dt = a_0 \quad \text{pentru } z \in \mathcal{D}^+, \quad (13)$$

unde $a_0 = \varphi(\infty)$; (13) este deci o condiție *necesară* pentru ca $f(t)$ să verifice (12).

Reciproc, să considerăm funcția (olomorfă în \mathcal{D}^-)

$$\varphi(z) = -F_-(z) + a_0, \quad (14)$$

unde $F_-(z)$ este dată de (1), iar a_0 este o constantă complexă arbitrară. Dacă condiția (13) este satisfăcută, urmează că $\varphi(z) = 0$ pentru $z \in \mathcal{D}^+$ și deci $\varphi^+(t) = 0$ pentru $t \in \mathcal{L}$. Ținând seama de aceasta în prima relație (9), se obține (folosind și (14)):

$$f(t) = -[\varphi^+(t) + a_0] - [-\varphi^-(t) + a_0] = \varphi^-(t),$$

așadar tocmai relația (12).

Prin urmare, (13) este condiția *necesară și suficientă* pentru ca o funcție $f(t) \in C^0(\mathcal{L})$ să fie valoarea la limită a unei funcții olomorfe în \mathcal{D}^- , și anume a funcției (14). Altfel spus, dacă a doua egalitate (10.2) este *identic*, satisfăcută în \mathcal{D}^+ pentru $f(t) \in C^0(\mathcal{L})$, atunci prima egalitate (10.2) permite să se construiască acea funcție olomorfă în \mathcal{D}^- a cărei valoare la limită este tocmai funcția dată $f(t)$.

Alegând originea $z = 0$ în \mathcal{D}^+ , avem evident, din (13),

$$a_0 = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{L}} \frac{f(t)}{t} dt, \quad (15)$$

ceea ce permite o oarecare simplificare a expresiei (14).

În definitiv, dată fiind funcția $f(t) \in C^0(\mathcal{L})$, care satisface condițiile (11) sau (13), se pot construi funcțiile

$$\begin{aligned}
 f_+(\zeta) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{L}} \frac{f(t)}{t - \zeta} dt \quad \text{pentru } \zeta \in \mathcal{D}^+, \\
 f_-(\zeta) &= \frac{-\zeta}{2\pi i} \oint_{\mathcal{L}} \frac{f(t)}{t(t - \zeta)} dt \quad \text{pentru } \zeta \in \mathcal{D}^-,
 \end{aligned}
 \tag{16}$$

olomorfe în \mathcal{D}^+ , respectiv în \mathcal{D}^- , și avînd funcția $f(t)$ ca valoare la limită pe \mathcal{L} . (Pentru cea de-a doua formulă, am folosit (14) și (15).) Notățiile $f_+(\zeta)$ și $f_-(\zeta)$ înlocuiesc acum notația provizorie $\varphi(\zeta)$.

Disponem deci atît de *criteriile* necesare pentru a stabili dacă o funcție este valoarea la limită a unei funcții olomorfe, cît și de *expresiile* acestei funcții.

OBSERVAȚIA 1. Condițiile (11) și (13) rămîn valabile și pentru domenii multiplu conexe, dacă domeniile \mathcal{D}^- , respectiv \mathcal{D}^+ , se înlocuiesc cu $\mathfrak{C}(\mathcal{D}^+ + \mathcal{L})$, respectiv $\mathfrak{C}(\mathcal{D}^- + \mathcal{L})$ (mulțimi formate din domenii disjuncte).

OBSERVAȚIA 2. Formule analoge se obțin dacă \mathcal{L} are în alcătuirea sa linii ale căror capete sînt aruncate la infinit (în particular, drepte).

d) Teorema lui Harnack

Reprezentarea funcțiilor olomorfe cu ajutorul densității $f(t)$ nu este unică. Într-adevăr, pentru $f(t) = 1/t$ avem

$$F(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{L}} \frac{dt}{t(t - \zeta)}. \tag{17}$$

Or, intrucît

$$\frac{1}{t(t - \zeta)} = \frac{1}{\zeta(t - \zeta)} - \frac{1}{t\zeta},$$

cu ajutorul teoremei reziduurilor pentru $\zeta \in \mathcal{D}^+$ (dacă \mathcal{D}^+ conține originea) deducem

$$F_+(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\zeta} \oint_{\mathcal{L}} \frac{dt}{t - \zeta} - \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\zeta} \oint_{\mathcal{L}} \frac{dt}{t} = \frac{1}{\zeta} - \frac{1}{\zeta} = 0. \tag{18}$$

Dacă pentru o funcție $F(\zeta)$ cunoaștem o densitate $f(t)$, aceeași funcție poate fi deci reprezentată și cu ajutorul densității $f(t) + 1/t$.

Totuși, în clasa densităților *reale*, se poate demonstra *teorema lui Harnack*: funcția identic nulă în \mathcal{D}^+ , respectiv în \mathcal{D}^- , poate fi reprezentată, în clasa densităților continue reale, numai cu ajutorul densității nule, respectiv constante, pe curba simplă închisă \mathcal{L} .

Într-adevăr, dacă avem

$$F(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{L}} \frac{f(t)}{t - \zeta} dt = 0 \quad \text{pentru } \zeta \in \mathcal{D}^+, \tag{19}$$

din (13) rezultă că $f(t)$ este valoarea la limită a unei funcții olomorfe în \mathcal{D}^- și nule la infinit. Notînd

$$f(t) = U^- + i V^-, \quad (20)$$

întrucît $f(t)$ este reală, rezultă $V^- = 0$, de unde $V = 0$ în \mathcal{D}^- , și deci $U = \text{const.}$ în \mathcal{D}^- . Prin urmare, $f(t)$ se reduce la o constantă f , astfel că (19) devine

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{L}} \frac{1}{t - \zeta} dt = 0 \quad \text{pentru } \zeta \in \mathcal{D}^+, \quad (21)$$

de unde, ținînd seama de (10.14), deducem

$$f(\zeta) = f = 0. \quad (22)$$

Fie acum că avem

$$F(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{L}} \frac{f(t)}{t - \zeta} dt = 0 \quad \text{pentru } \zeta \in \mathcal{D}^-. \quad (23)$$

Din (11) rezultă deci că

$$f(t) = U^+ + i V^+, \quad (24)$$

de unde ca și mai sus deducem

$$f(t) = f = \text{const.} \quad (25)$$

Această constantă nu este însă cu necesitate nulă, întrucît relațiile (10.14), (23) și (25) conduc la identitatea $0 \equiv 0$.

Prin urmare, dacă pentru două densități reale $f(t)$, $g(t)$ avem

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{L}} \frac{f(t)}{t - \zeta} dt = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{L}} \frac{g(t)}{t - \zeta} dt \quad (26)$$

pentru orice $\zeta \in \mathcal{D}^+$, atunci urmează $f(t) \equiv g(t)$; iar dacă condiția (26) este satisfăcută pentru orice $\zeta \in \mathcal{D}^-$, atunci urmează $f(t) \equiv g(t) + \text{const.}$

Această teoremă rămîne valabilă pentru domenii multiple conexe, și un analog al ei poate fi formulat și pentru cazul în care \mathcal{L} conține arce deschise.

Toate cele de mai sus își au originea în formulele no. 1° și 2° din § 10. În același mod se pot da criterii pentru ca o funcție $f(t)$ dată pe \mathcal{L} să fie valoarea la limită a unei funcții meromorfe în \mathcal{D}^+ , respectiv \mathcal{D}^- , avînd un număr finit de poli cu părți principale cunoscute.

Astfel, de exemplu, se poate afirma că dacă a doua egalitate (10.20) este identic satisfăcută în \mathcal{D}^- pentru $f(t) \in C^0(\mathcal{L})$, atunci prima egalitate (10.20) definește componenta $f_0(\zeta)$ a funcției meromorfe (10.18), cu poli și părți principale date în \mathcal{D}^+ , și a cărei valoare la limită este tocmai $f(t)$.

În același mod, cu ajutorul formulei (10.23), se poate construi un criteriu analog pentru \mathcal{D}^- .

Și aceste rezultate pot fi generalizate la cazul unor domenii multiplu conexe.

e) Cazul discului unitate

În acest caz, criteriile (11) și (13) pot fi puse sub o formă mai simplă. Anume, să asociem unei funcții $\varphi(\zeta)$, o funcție $\varphi_*(\bar{\zeta})$ definită de

$$\varphi_*(\bar{\zeta}) = \overline{\varphi(1/\bar{\zeta})}. \quad (27)$$

Evident, dacă $\zeta = \rho \exp(i\theta) \in \mathcal{D}^+$, atunci $1/\bar{\zeta} = \rho \exp(i\theta) \in \mathcal{D}^+$, și reciproc. Prin urmare, dacă $\varphi(\zeta)$ este definită în \mathcal{D}^+ , atunci $\varphi_*(\bar{\zeta})$ este definită în \mathcal{D}^+ și reciproc.

Dacă $\varphi(\zeta)$ este olomorfă în \mathcal{D}^+ , atunci

$$\varphi(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n \zeta^n, \quad |\zeta| < 1, \quad (28)$$

și deci

$$\varphi_*(\bar{\zeta}) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{\varphi}_n \bar{\zeta}^{-n}, \quad (29)$$

astfel că $\varphi_*(\bar{\zeta})$ rezultă olomorfă în \mathcal{D}^- , cel mult cu excepția punctului de la infinit, unde ea poate avea un pol de ordin zero (dacă $\varphi_0 \neq 0$). Evident, avem

$$\varphi_*(\infty) = \bar{\varphi}_0 = \overline{\varphi(0)}. \quad (30)$$

Fiind dată funcția $\varphi(\zeta)$ definită în \mathcal{D}^+ și presupunând că există

$$\varphi^+(\sigma) = \lim_{\zeta \in \mathcal{D}^+, \zeta \rightarrow \sigma} \varphi(\zeta), \quad (31)$$

atunci avem desigur $1/\bar{\zeta} \in \mathcal{D}^+$, $1/\bar{\zeta} \rightarrow 1/\bar{\sigma} = \sigma$, astfel că există și

$$\varphi_*(\sigma) = \lim_{\zeta \in \mathcal{D}^+, \zeta \rightarrow \sigma} \varphi_*(\bar{\zeta}) = \overline{\varphi^+(\sigma)}. \quad (32)$$

Analog, dacă pentru funcția $\varphi(\zeta)$ definită în \mathcal{D}^- există valoarea la limită $\varphi^-(\sigma)$, atunci există și funcția $\varphi_*(\bar{\zeta})$ definită în \mathcal{D}^+ și avem

$$\varphi_*(\sigma) = \overline{\varphi^-(\sigma)}. \quad (33)$$

Aceste egalități conduc la relații simple și între valorile la limită ale derivatelor corespunzătoare. Anume, avem pe rînd din (27):

$$\overline{\varphi_*(\bar{\zeta})} = \varphi(1/\bar{\zeta}), \quad \frac{d}{d\bar{\zeta}} \overline{\varphi_*(\bar{\zeta})} = -\bar{\zeta}^{-2} \overline{\varphi'(1/\bar{\zeta})},$$

de unde

$$\varphi'_*(\bar{\zeta}) = -\bar{\zeta}^{-2} \overline{\varphi'(1/\bar{\zeta})}, \quad (34)$$

și deci pe γ :

$$[\varphi'_*(\sigma)]^- = -\sigma^{-2} [\overline{\varphi'(\sigma)}]^+. \quad (35)$$

(Dacă nu există risc de confuzie, putem renunța la indicii $+$, $-$.)

OBSERVAȚIA 3. Evident, punctele ζ și $1/\bar{\zeta}$ sînt simetrice în raport cu cercul γ , în timp ce valorile $\varphi(\zeta)$, $\varphi_*(1/\bar{\zeta})$ sînt simetrice în raport cu axa reală din planul \mathbb{C} (vezi § 5, pag. 724).

Relația (27) nu definește o prelungire analitică, ci numai *asociază* unei funcții olomorfe în \mathcal{D}^+ , o altă funcție, olomorfă în \mathcal{D}^- . Într-adevăr, pentru a avea de-a face cu o prelungire analitică, ar trebui ca valorile $\varphi^+(\sigma)$ să fie reale — vezi (32) — ceea ce este în general imposibil, întrucît în acest caz și $\varphi(\zeta)$ ar trebui să fie reală. Totuși, cele două funcții considerate sînt una prelungirea analitică a celeilalte, prin acele porțiuni ale frontierei γ pe care valorile la limită sînt *nule*.

Să trecem acum la examinarea criteriilor (11) și (13).

Condiția (11) este echivalentă cu condiția (10), care în cazul discului unitate poate fi pusă sub forma (vezi (32))

$$f(\sigma) = \overline{\varphi_*(\sigma)}. \quad (36)$$

Întrucît $\varphi_*(\zeta)$ este olomorfă în \mathcal{D}^- și deci verifică (13), aceasta se mai scrie

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{\overline{f(\sigma)}}{\sigma - \zeta} d\sigma = a_0 \quad \text{pentru } \zeta \in \mathcal{D}^+, \quad (37)$$

unde (vezi (13) și (30)) avem $a_0 = \varphi_*(\infty) = \overline{\varphi(0)}$.

Prin urmare, criteriile (11) și (37) sînt echivalente (pentru cercul unitate numai!) cu condiția (10) (desigur, pentru funcții continue).

Tot astfel, condiția (13) este echivalentă cu (12), care se poate pune sub forma

$$f(\sigma) = \varphi_*(\sigma), \quad (38)$$

și mai departe (întrucît $\varphi_*(\zeta)$ este olomorfă în \mathcal{D}^+ , și folosind și relația (11)), sub forma

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{\overline{f(\sigma)}}{\sigma - \zeta} d\sigma = 0 \quad \text{pentru } \zeta \in \mathcal{D}^-. \quad (39)$$

Criteriile (13) și (39) sînt deci echivalente cu condiția (12).

OBSERVAȚIA 4. Formule analoge se pot obține în cazul în care rolul domeniilor \mathcal{D}^+ , \mathcal{D}^- îl au două semiplane complementare.

Pentru a încheia, să stabilim legătura dintre cele de mai sus și formulele date în § 9 pentru cazul frontierei circulare. Pentru $\mathcal{L} = \gamma$, formula (1) devine

$$F(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\sigma)}{\sigma - \zeta} d\sigma, \quad \zeta \notin \gamma. \quad (40)$$

Pentru $\zeta \in \mathcal{D}^+$ (așadar $|\zeta/\sigma| < 1$) obținem pe rînd

$$\begin{aligned} F_+(\zeta) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\sigma)}{\sigma(1-\zeta/\sigma)} d\sigma = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \sigma^{-1} f(\sigma) \sum_{n=0}^{\infty} (\zeta/\sigma)^n d\sigma = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} f(\sigma) \sigma^{-n-1} d\sigma \right) \zeta^n = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \zeta^n; \end{aligned} \quad (41)$$

pe de altă parte, dacă $\zeta \in \mathcal{D}^-$ (așadar dacă $|\sigma/\zeta| < 1$), atunci

$$\begin{aligned} F_+(\zeta) &= -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\sigma)}{\zeta(1-\sigma/\zeta)} d\sigma = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} f(\sigma) \sum_{n=0}^{\infty} \sigma^n / \zeta^{n+1} d\sigma = \\ &= -\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} f(\sigma) \sigma^{n-1} d\sigma \right) \zeta^{-n} = -\sum_{n=1}^{\infty} f_{-n} \zeta^{-n}, \end{aligned} \quad (42)$$

unde f_n, f_{-n} sînt coeficienții Fourier ai funcției $f(\sigma)$, dați de (9.25).

Disponem astfel de expresiile (41), (42) ale integralei de tip Cauchy ca funcție olomoră în \mathcal{D}^+ , respectiv \mathcal{D}^- (și nulă la infinit). Aceste formule coincid evident cu (9.44). (Ele, împreună cu formula (14), justifică alegerea semnelor minus în a doua formulă (9.44).) Prin scădere termen cu termen, obținem formula (9.47), echivalentul (în acest caz) al primei formule (9).

Condițiile pentru ca $f(\sigma)$ să fie valoarea la limită a unei funcții olomorfe în \mathcal{D}^+ , respectiv în \mathcal{D}^- , se reduc la condițiile (9.41), respectiv (9.42), care asigură anularea identică a funcțiilor (42), respectiv (41) — ceea ce echivalează mai departe cu condițiile (11), respectiv (13).

Desigur, pentru ca rezultatele din § 9 să fie comparabile cu cele de aci, trebuie să avem $f(\sigma) \in V(\gamma) \cap C^0(\gamma)$.

Dacă dorim să facem uz de criteriile (37), (39), avem de calculat integrala

$$G(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{\overline{f(\sigma)}}{\sigma - \zeta} d\sigma, \quad \zeta \notin \gamma. \quad (43)$$

Cu ajutorul formulelor (9.26) obținem de aci

$$\begin{aligned} G_+(\zeta) &= \sum_{n=0}^{\infty} \overline{(f_{-n})} \zeta^n, \quad \zeta \in \mathcal{D}^+, \\ G_-(\zeta) &= -\sum_{n=1}^{\infty} \overline{f_n} \zeta^{-n}, \quad \zeta \in \mathcal{D}^-. \end{aligned} \quad (44)$$

Semnificația criteriilor (37), (39) rezultă de aci evident.

Utilizînd mijloacele reprezentării conforme, se poate demonstra că criteriile (9.41) și (9.42) rămîn valabile și pentru un domeniu mărginit de o curbă simplă închisă oarecare \mathcal{L} , astfel încît criteriul (11) rezultă echivalent cu

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{L}} f(t) t^{n-1} dt = 0, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (45)$$

în timp ce (13) este echivalent cu

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{L}} f(t) t^{-n-1} dt = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (46)$$

La rîndul lor, și aceste criterii pot fi extinse la cazul domeniilor multiplu conexe (vezi de exemplu J. Walsh [1], § 2.5).

BIBLIOGRAFIE

- ABASSI, M. — [1] *Simple solutions of Saint-Venant's torsion problem by using Tschebycheff polynomials*. Quart. Appl. Math., **14**, 1 (1956).
- ABEN, H. K. — [1] *K issledovaniju ob'emnyh fotouprugih modelej*. Izv. OTN, Meh. i Maš., **4** (1964).
- ABRAMJAN, B. L., ALEKSANDROV, A. I. — [1] *Osesimetrične zadači teorii uprugosti*. Trudy 2 s'ezda po mehanike, vol. 3, Izd-vo Nauka, Moscova, 1966.
- ABRAMJAN, B. L., ARUTJUNJAN, N. H. et BABLOJAN, A. A. — [1] *O dvuh kontaktnyh zadačah dlja uprugoj sfery*. Prikl. Mat. Meh., **28**, 4 (1964).
- ABRAMJAN, B. L., MANUKJAN, M. M. — [1] *Rešenje ploskoj zadači teorii uprugosti dlja prjamougolnika v peremeščenijah*. Dokl. AN Arm. SSR, **25**, 4 (1957).
- ABRAMOV, V. M. — [1] *Issledovanie slučaja nesimmetričnogo davlenija štampa kruglogo sečenija na uprugoe poluprostranstvo*. Dokl. AN SSSR, **23**, 8 (1939).
- ABRAMSOHN, H. N., PLESS, H. J., RIPPERBERGER, E. A. — [1] *Stress wave propagation in rods and beams*. Advances in applied mechanics, vol. 5, Academic Press, N. York, 1958.
- ADKINS, J. E. — [1] *Symmetry relations for orthotropic and transversely isotropic materials*. Arch. Rat. Mech. Anal., **4**, 3 (1960). — [2] *Further symmetry relations for transversely isotropic materials*. Arch. Rat. Mech. Anal., **5**, 3 (1960). — [3] *Large elastic deformations*. Progress in solid mechanics, vol. 2, North Holland, Amsterdam, 1961.
- ADLER, G. — [1] *Majoration des tensions dans un corps élastique à l'aide des déplacements superficiels*. Arch. Rat. Mech. Anal., **16**, 5 (1964).
- AGAREV, V. A. — [1] *Metod načal'nyh funkcij dlja dvumernyh kraevykh zadač teorii uprugosti*. Akademkniga, Moscova, 1963.
- AHLFORS, L. V. — [1] *Complex analysis*. McGraw-Hill, New York, 1953.
- AIRY, G. B. — [1] *On the strains in the interior of beams*. Phil. Trans. Roy. Soc., London, **153**. (1863).
- AKOPJAN, A. A. — [1] *Nekotorye primenenija termodinamiki k ravnovesiju idealno uprugih sistem*. Prikl. Mat. Meh., **8**, 3 (1944).
- AKSENTJAN, O. K., VOROVIČ, I. I. — [1] *Napražennoe sostojanie plity maloj tolščiny*. Prikl. Mat. Meh., **27**, 6 (1963).
- ALEKSANDROV, A. I. A. — [1] *Rešenje osesimetričnyh i nekotoryh drugih prostranstvennyh zadač teorii uprugosti pri pomošči analitičeskikh funkcij*. Applic. Theory of Functions in continuum mechanics, vol. 1, Izd-vo Nauka, Moscova, 1965.
- ALEKSANDROV, V. M. — [1] *K rešeniju nekotoryh kontaktnyh zadač teorii uprugosti*. Prikl. Mat. Meh., **27**, 5 (1963). — [2] *K rešeniju odnogo tipa dvumernyh integralnyh uravnenij*. Prikl. Mat. Meh., **28**, 3 (1964).
- ALEKSANDROV, V. M., BABEŠKO, V. A. — [1] *Kontaktnye zadači dlja uprugoj polosy maloj tolščiny*. Mehanika, **2** (1965).
- ALFREY, T. — [1] *Mechanical behaviour of high polymers*. J. Wiley, New York, 1948.
- ALLEN, D. N. de G. — [1] *Relaxation methods applied to conformal transformations*. The Quart. Journ. Mech. Appl. Math., **15**, 1 (1962).
- ALMANSI, E. — [1] *Sulla ricerca delle funzioni poli-armoniche in un area piana semplicemente connessa per date condizioni al contorno*. Rend. Palermo, **13**, (1899). — [2] *Sull'integrazione dell'equazione differenziale $\Delta^{2n} = 0$* . Annali Mat. pura ed applicata, (3), **2** (1899). — [3] *Sopra la deformazione dei cilindri sollecitati lateralmente (I, II)*. Rendiconti dei Lincei, (6), **10** (1901).
- AMBARCUMJAN, S. A. — [1] *Teorija anizotropnyh oboloček*. Fizmatgiz, Moscova, 1961.

- ANIN, B. D. — [1] *Zamečanie k rabote V. L. Dobrovolskogo „O primenenii kompleksnyh peremennyh ...”*. Prikl. Mat. Meh., **29**, 2 (1965).
- ANTONOV, E. E. — [1] *Primenenie elektromodelirovannogo konformnogo preobrazovanija k rešeniju zadač kručenja polyh prizmatičeskikh steržnej iz ortotropnogo materiala*. Trudy I mežvuzovskoj konferencii po električeskomu modelirovaniju zadač str. meh., sopr. mat. i teorii uprugosti. B. M., Novočerkasskij Politehn. Inst., 1960.
- ARGYRIS, J. H. — [1] *On the analysis of complex elastic structures*. Appl. Mech. Rev., **11**, 7 (1958).
- ARŽANYH, I. S. — [1] *Integralnye uravnenija osnovnyh zadač teorii polja i teorii uprugosti*. Taškent, 1954.
- ARŽANYH, I. S., BONDARENKO, B. A. — [1] *Priloženija teorii funkcij kompleksnogo peremennogo k trehmernym zadačam matematičeskoj teorii uprugosti*. Trudy In-ta matematiki AN Uzb. SSR, **23** (1961).
- ARUTJUNJAN, N. H. — [1] *O kručenii elliptičeskogo kolcevogo sektora*. Prikl. Mat. Meh., **11**, 5 (1947). — [2] *Rešenje zadač o kručenii steržnej poligonalnogo poperečnogo sečenija*. Prikl. Mat. Meh., **13**, 1 (1949).
- ARUTJUNJAN, N. H., ABRAMJAN, B. L. — [1] *Kručenje uprugih tel*. Fizmatgiz, Moscova, 1963. — [2] *O vдавlivanii žestkogo štampa v upruguju sferu*. Prikl. Mat. Meh., **28**, 6 (1964).
- AVAZAŠVILI, D. Z. — [1] *O primenenii teorii funkcij kompleksnogo peremennogo k zadačam kručenja i izgiba*. Prikl. Mat. Meh., **4**, 1 (1940).
- AZIMOV, B. A., AMENZADE, I. A., BORISOV, E. M., BELKINA, G. L., KUTUZOV, A. I. — [1] *Rešenje zadač izgiba prizmatičeskikh steržnej na električeskoj modeli*. Dokl. AN Azerb. SSR, **11**, 3 (1955).
- BABIČ, I. I., KAMINSKI, A. A. — [1] *O kritičeskikh nagruzkah, vyzyvajuščih razvitie treščiny vozle elliptičeskogo otverstija*. Prikladnaja Mehanika, **9** (1965).
- BABUŠKA, I. — [1] *Sur l'algorithme de Schwarz dans la théorie des équations différentielles de la physique mathématique*. Tchecoslov. Mat. Journ., **8**, 1958. — [2] *Die Abhängigkeit der Lösung der Elastizitätsprobleme von kleinen Veränderungen des Definitionsgebietes*, ZAMM, **39**, 9–11 (1959).
- BABUŠKA, I., KAUTSKI, J. — [1] *Ein Beitrag zur Theorie der Kerbspannungen*. ZAMM, **41**, 10–11 (1961).
- BABUŠKA, I., PRAGER, M. — [1] *Reissnerian algorithms in the theory of elasticity*. Bull. Acad. Pol. Sci., **8**, 8 (1960).
- BABUŠKA, I., REKTORYS, K., VYČICHLO, F. — [1] *Mathematische Elastizitätstheorie der ebenen Probleme*. Berlin, Akademie-Verlag, 1960.
- BALDACC, R. F. — [1] *Sulla integrazione diretta del problema di Saint-Venant in termini di tensioni*. Atti Torino, **90**, 1955–56. — [2] *Soluzione generale diretta del problema di Saint-Venant*. Genio Civile, **95**, 10 (1957).
- BARENBLATT, G. I. — [1] *Ob osnovnyh predstavlenijah teorii ravnovesnyh treščin, obrazuiuščihsja pri hrupkom razrušenii*. Sb. „Problemy mehaniki splošnoi sredy”, Akademkniga, Moscova, 1961. — [2] *The mathematical theory of equilibrium of cracks in brittle fracture*. Advances in appl. mech., vol. 7, Academic Press, N. York, 1962. — [3] *O nekotoryh obščih predstavlenijah matematičeskoj teorii hrupkogo razrušenija*. Prikl. Mat. Meh., **28**, 4 (1964).
- BARI, N. K. — [1] *Rjady Furie (Fourier)*. Fizmatgiz, Moscova, 1961.
- BARTELS, R. — [1] *Torsion of hollow cylinders*. Trans. Amer. Math. Soc., **53**, 1 (1943).
- BARTHA, J. — [1] *On the estimation of torsional rigidity*. Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., (B), **58**, 1 (1955). — [2] *Sur l'estimation de la rigidité de torsion des prismes multicellulaires à parois minces*. Acta Techn. Acad. Sci. Hungar., **12**, 3–4 (1955). — [3] *Inequality relation between torsional and flexural rigidity*. Acta Techn. Acad. Sci. Hungar., **14**, 3–4 (1956).
- BASSALI, W. A. — [1] *The torsion of elastic cylinders with regular curvilinear cross-sections*. J. Math. Phys., **38**, 4 (1960) — [2] *The classical torsion problem for sections with curvilinear boundaries*. J. Mech. Phys. Solids, **8**, 1960.
- BATYREV, A. V. — [1] *Kručenje cilindričeskikh steržnej*. Uč. zap. Rostov. Univ., **18**, 3 (1953).
- BEATTY, M. F. — [1] *Some static and dynamic implications of the general theory of elastic stability*. Arch. Rat. Mech. Anal., **19**, 3 (1965).
- BEJU, I. — [1] *Asupra ecuațiilor teoriei elasticității în coordonate oarecare*. St. Cerc. Mat., **20**, 4, (1968).

- BELENKIJ, M. I. — [1] *Nekotorye osesimmetričnye zadači teorii uprugosti*. Prikl. Mat. Meh., **24**, 3 (1960).
- BELJAEV, N. M. — [1] *Laboratornye raboty po soprotivleniju materialov*. Gostehizdat, Moscova, 1951. — [2] *Soprotivlenie materialov*. Gostehizdat, Moscova, 1954. — [3] *Trudy po teorii uprugosti i plastičnosti*. Gostehizdat, Moscova, 1957.
- BELJAKOV, V. M., KRAVCOVA, R. I., RAPPAPORT, M. G. — [1] *Tablicy elliptičeskikh integralov*. Akademkniga, Moscova, 1962.
- BELONOSOV, S. M. — [1] *Primenenie integralnyh uravnenij v zadače o kručenii valov peremennogo diametra*. Prikl. Mat. Meh., **24**, 6 (1960). — [2] *Osnovnye ploskie statičeskie zadači teorii uprugosti dlja odnosvjaznyh i dvusvjaznyh oblastej*. Izd. SO AN SSSR, Novosibirsk, 1962. — [3] *Matematičeskie problemy v teorii uprugosti dlja oblastej s uglami*. Trudy 2 s'ezda po mehanike, vol. 3, Izd-vo Nauka, Moscova, 1966.
- BELOV, K. P. — [1] *Uprugie, teplovye i električeskie javlenija v ferromagnitah*. Gostehizdat, Moscova, 1957.
- BELTRAMI, E. — [1] *Osservazioni sulla Nota precedente (del socio Morera)*. Rendiconti dei Lincei (5), **1**, 1 (1892).
- BERGER, E. R. — [1] *Obere und untere Schranken für den Drillwiderstand*. Z.A.M.M., **34**, 8–9 (1954).
- BERGMAN, S. — [1] *Integral operators in the theory of linear differential equations*. Springer, Berlin, 1961.
- BERMAN, M. E. — [1] *K voprosu o centre izgiba*. Dokl. AN SSSR, **72**, 1 (1950).
- BERNOULLI, J. — [1] *Véritable hypothèse de la résistance des solides, avec la démonstration de la courbure des corps, qui font ressort*. Œuvres, vol. 2, Geneva, 1744.
- BERNSTEIN, B. — [1] *Hypo-elasticity and elasticity*. Arch. Rat. Mech. Anal., **6**, 2 (1960).
- BETTI, E. — [1] *Teoria della elasticità*. Il nuovo Cimento, (2), **7–10** (1872–3) — [2] *Sopra l'equazioni di equilibrio dei corpi solidi elastici*. Annali Mat. pura ed appl., (2), **6**, 1873–5.
- BIEZENO, C. B., GRAMMEL, R. — [1] *Technische Dynamik*. Springer, Berlin, 1953.
- BILBY, B. A. — [1] *Continuous distributions of dislocations*. Progress in solid mechanics, vol. 1, North Holland, Amsterdam, 1960.
- BIOT, M. A. — [1] *General solutions of the equations of elasticity and consolidation for a porous material*. J. Appl. Mech., **23**, 1 (1956). — [2] *Thermoelasticity and irreversible thermodynamics*. J. Appl. Phys., **27**, 3 (1956). — [3] *Linear thermodynamics and the mechanics of solids*, Proc. IIIrd. U. S. Nat. Congr. Appl. Mech., Pergamon Press, 1958 — [4] *Mechanics of incremental deformations*. J. Wiley, New York, 1965.
- BIRKHOFF, G., YOUNG, D. M., ZARANTONELLO, E. H. — [1] *Numerical methods in conformal mapping*. Proc. Symp. Appl. Math., **4** (1953).
- BIRMAN, S. E. — [1] *O stesnjennom kručenii tonkostennyh steržnej zamknutogo prjamougolnogo profilja s poperečnymi diafragmami*. Izv. OTN, Meh. Maš., **1** (1961).
- BISPLINGHOFF, R. L. — [1] *Aeroelasticity*. Appl. Mech. Rev., **11**, 3 (1958).
- BLAGOVEŠČENSKIJ, I. V., FILČAKOV, P. F. — [1] *Rozv'jazannaja ploskih zadač kručenja ta zghinu za dopomogoiu metodu electroghidrodinamičnyh analogij*. Prikl. Meh., **1**, 2 (1955).
- BLOH, V. I. — [1] *O predstavlenii obščego rešenija osnovnyh uravnenij statičeskoj zadači teorii uprugosti izotropnogo tela pri pomošči garmoničeskikh funkcij*. Prikl. Mat. Meh. **22**, 4 (1958) — [2] *Teoria uprugosti*. Izd-vo Univ. Harkov, 1964.
- BOGGIO, T. — [1] *Nuova risoluzione di un problema fondamentale della teoria dell'elasticità*. Rendiconti dei Lincei, (5), **16** (1907).
- BOŽENKO, A. S. — [1] *Opredelenie mestopoloženija centra izgiba profilej, sostavlennyh iz prjamougolnyh oblastej*. Sb. naučn. trudov Taškent. In-ta inž. žel.-dor. transp., **4** (1954). — [2] *Kručenje steržnei poligonalnogo sečenija*. Sb. Leningr. In-ta inž. žel.-dor. transp., **164** (1959).
- BOLEY, B. A. — [1] *A method for the construction of fundamental solutions in elasticity theory*. J. Math. Phys., **36**, 3 (1957). — [2] *Some observations on Saint-Venant's principle*. Proc. IIIrd U. S. Nat. Congr. Appl. Mech., Pergamon Press, 1958. — [3] *On a dynamical Saint-Venant's principle*. J. Appl. Mech., **27**, 1 (1960).
- BOLEY, B. A., WEINER, J. H. — [1] *Theory of thermal stresses*. J. Wiley, New York, 1960.

- BOLLE, L. — [1] *Contribution au problème linéaire de flexion d'une plaque élastique*. Bull. Techn. Suisse Romande, **73** (1947).
- BOLOTIN, V. V. — [1] *Dinamičeskaja ustoičivost' uprugih sistem*. Gostehizdat, Moscova, 1956. — [2] *Mehanika tverdogo tela i teorija nađežnosti*. Trudy 2 s'ezda po mehanike, vol. 3, Izd-vo Nauka, Moscova, 1966.
- BONDAR, V. D. — [1] *O tenzornyh harakteristikah konečnyh deformacij splošnoi sredy*. Prikl. Mat. Meh., **25**, 3 (1961).
- BONDARENKO, B. A. — [1] *Približennye rešenija pervoj i vtoroj osnovnyh zadač teorii uprugosti dlja paralelepipeda*. Trudy In-ta matematiki AN Uzb. SSR, **23** (1961). — [2] *O približenom rešenii trehmernyh zadač statiki teorii uprugosti*. Trudy In-ta matematiki AN Uzb. SSR, **26** (1962).
- BONDARENKO, P. S. — [1] *Vyčislitelnye algoritmy približennogo rešenija operatornyh uravnenij*. Dokl. AN SSSR, **154**, 4 (1964).
- BORN, M., HUANG, K. — [1] *Dynamical theory of crystal lattices*. Oxford, 1954.
- BORODAČEV, N. M. — [1] *O rešenii dinamičeskoj kontaktnoj zadači dlja poluprostranstva v slučae osevoj simmetrii*. Izv. OTN, Meh. Maš., **4** (1960). — [2] *Dinamičeskaja kontaktnaja zadača dlja štampa s ploskim krugovym osnovaniem, lejaščego na uprugom poluprostranstve*. Izv. OTN, Meh. Maš., **2** (1964). — [3] *Ob opredelenii osadok žestkih plit i massivov*. Osnovaniya, fundamente i mehanika gruntov, **4** (1964). — [4] *Opredelenie dinamičeskih naprjaženij voznikajuščih v uprugom poluprostranstve pod štampom s ploskim kruvognm osnovaniem*. Izv. OTN, Meh. Maš., **4** (1965).
- BOULIGAND, G. — [1] *La mécanique théorique des corps flexibles (1638—1788) et les premières tentatives de «spéculations fonctionnelles» au XVIII-ième siècle*. Rev. histoire sci., **17**, 1 (1964).
- BOUSSINESQ, J. V. — [1] *Etude nouvelle sur l'équilibre et le mouvement des corps solides élastiques dont certaines dimensions sont très petites par rapport à d'autres*. J. Math. Pures et appl., (2), **16** (1871). — [2] *Applications des potentiels à l'étude de l'équilibre et du mouvement des corps élastiques, avec des notes étendues sur divers points de physique mathématique et d'analyse*. Gauthier-Villars, Paris, 1885.
- BRAMBLE, J. H. — [1] *A sphere theorem for the equations of elasticity*. Z.A.M.P., **12** (1961).
- BRAMBLE, J. H., PAYNE, L. E. — [1] *On some new continuation formulas and uniqueness theorems in the theory of elasticity*. J. Math. Anal. and Applic., **3** (1961). — [2] *On the uniqueness problem in the second boundary-value problem in elasticity*. Proc. IV U. S. Nat. Congr. Appl. Mech., 1962. — [3] *Some uniqueness theorems in the theory of elasticity*. Arch. Rat. Mech. Anal., **9**, 4 (1962). — [4] *Some inequalities for vector functions with application in elasticity*. Arch. Rat. Mech. Anal., **11**, 1 (1962). — [5] *Effect of error in measurement of elastic constants on the solutions of problems in classical elasticity*. Journ. Research, Nat. Bur. Stand., **67 B**, 3 (1963). — [6] *Some mean value theorems in elastostatics*. J. Soc. Industr. and Appl. Math., **12**, 1 (1964).
- BREDT, R. — [1] *Kritische Bemerkungen über Drehungselastizität*. Zeitschrift des VDI, **40** (1896).
- BREWSTER, D. — [1] *On the communication of the structure of doubly refracting crystals of glass, muriate of soda, flour spat and other substances by mechanical compression and dilatation*. Phil. Trans. Roy. Soc., London, **106**, 1816.
- BRILLA, J. — [1] *Anizotropické steny*. SAV, Bratislava, 1958. — [2] *Contact problems of an elastic anisotropic half-plane*. Rev. Roum. Méc. Appl., **7**, 3 (1962).
- BRILLOUIN, L. — [1] *La structure des corps solides dans la physique moderne*. Hermann, Paris, 1937. — [2] *Influence de la température sur l'élasticité*. Mém. Sci. Math., fasc. 99, Gauthier-Villars, Paris, 1940. — [3] *Les tenseurs en mécanique et en élasticité*. Masson, Paris, 1960.
- BUCHWALD, V. T. — [1] *A note on a method of Milne-Thomson*. J. Austral. Math. Soc., **3**, 1 (1963). — [2] *Plane elastostatic boundary-value problems (I—III)*. Mathematica, **10** (1963).
- BUCHWALD, V. T., DAVIES, G. O. — [1] *Plane elastostatic boundary value problems of doubly connected regions*. The Quart. J. Mech. Appl. Math., **17**, 1 (1964).
- BULLEN, K. E. — [1] *Seismic wave transmission*. Handbuch d. Physik, (2), **47**, Springer, Berlin, 1956.
- BURMISTROV, E. F. — [1] *O koncentracii naprjaženij okolo ovalnyh otverstij nekotorigo vida*. Inž. sb., **17** (1953).
- BUZDUGAN, GH. — [1] *Rezistența materialelor*. Ed. Didactică și Pedagogică, 1964.

- CADY, W. G. — [1] *Piezoelectricity*. McGraw-Hill, New York, 1946.
- CAPILDEO, R. — [1] *Flexure with shear centre. A general treatment with complex variables*. Proc. Cambridge Phil. Soc., 49, 2 (1953).
- CARATHEODORY, C. — [1] *Funktionentheorie*. Birkhäuser, Basel, 1960.
- CARLSON, D. E., SHIELD, R. T. — [1] *Second and higher-order effects in a class of problems in plane finite elasticity*. Arch. Rat. Mech. Anal., 19, 3 (1965).
- CARLSAW, H. S., JAEGER, J. C. — [1] *Operational methods in applied mathematics*. Oxford, 1948.
- CATTANEO, C. — [1] *Sulla torsione di due sfere elastiche a contatto*. Ann. di Pisa (3), 6, 1–2 (1952). — [2] *Compressione e torsione nel contatto tra corpi elastici di forma qualunque*. Ann. di Pisa, (3), 9, 1–2 (1955).
- CAUCHY, A. L. — [1] *De la pression ou tension dans un corps solide*. Œuvres, (2), 7, (1823). — [2] *Sur la condensation et la dilatation des corps solides*. Œuvres, (2), 7, 1823. — [3] *Sur les relations qui existent dans l'état d'équilibre d'un corps solide ou fluide entre les pressions ou tensions et les forces accélératrices*. Œuvres, (2), 7, 1823. — [4] *Sur les équations qui expriment les conditions d'équilibre ou les lois du mouvement intérieur d'un corps solide, élastique ou non élastique*. Œuvres, (2), 8, 1828. — [5] *Sur la relation qui existe entre les pressions ou tensions supportées par deux plans quelconques en un point donné d'un corps solide*. Œuvres, (2), 9, 1829. — [6] *Sur l'équilibre et le mouvement intérieur des corps, considérés comme des masses continues*. Œuvres, (2) 9, 1829. — [7] *Mémoire sur la torsion et les vibrations tournantes d'une verge rectangulaire*. Œuvres, (1), 2, 1830.
- ČEMERIS, V. S. — [1] *Primenenie obobščennogo integrala tipa Cauchy dlja p-analitičeskikh funkcij v osesimmetričnoj teorii uprugosti*. 2 Vses. sjezd po mehanike, Annot. dokladov, Moscov, 1964.
- ČEREPANOV, G. P. — [1] *Ob odnom klasse zadač ploskoj teorii uprugosti*. Izv. OTN, Meh. Maš., 4 (1962). — [2] *Rešenje odnoj linejnoj kraevoj zadači Riemann'a dlja dvuh funkcij i ee prilozhenie k nekotorym smešannym zadačam ploskoj teorii uprugosti*. Prikl. Mat. Meh., 26, 5 (1962). — [3] *K rešeniju nekotoryh zadač teorii uprugosti i plastičnosti s neizvestnoj granicej*. Prikl. Mat. Meh., 28, 1 (1964).
- CERRUTI, V. — [1] *Ricerche intorno all'equilibrio dei corpi elastici isotropi*. Rendiconti dei Lincei (3), 13, (1882). — [2] *Sulla deformazione di un corpo elastico isotropo per alcune speciali condizioni ai limiti*. Rendiconti dei Lincei, (4), 4, 1 (1888).
- CESARO, E. — [1] *Sulle formole del Volterra, fondamentali nella teoria delle distorsioni elastiche*. Il nuovo Cimento, (5), 12 (1906).
- CHADWICK, P. — [1] *Thermoelasticity. The dynamical theory*. Progress in solid mechanics, Vol. 1, North Holland, Amsterdam, 1960.
- CHI TEH WANG — [1] *Applied elasticity*. McGraw-Hill, New York, 1953.
- CHIEN WEI ZANG, HU HAI CHIAN, LIN HUN SUN, YEN CHAI YUAN — [1] *Teoria torsiunii corpurilor elastice cilindrice* (In lb. chineză). Pekin, 1956.
- CHIN BING LING — [1] *On torsion of prisms with longitudinal holes*. Quart. Appl. Math., 9, 3 (1951).
- CHREE, CH. — [1] *Longitudinal vibrations of a circular bar*. The Quart. Journ. pure appl. Math., 21 (1886). — [2] *A new solution of the equations of an isotropic elastic solid and its applications to the theory of beams*. The Quart. Journ. pure appl. Math., 22 (1887) — [3] *On longitudinal vibrations*. The Quart. Journ. pure appl. Math., 23 (1889).
- ČAPLYGIN, S. A. — [1] *Sočinenija*, vol. 3, Akademkniga, Moscov, 1950.
- ČARNIK, K. E. — [1] *Konformnoe preobrazovanie oblastej, sostavlennyh iz prjamougolnikov, na ediničnyj krug*. Trudy Mat. Inst. im. V. A. Steklova, 53, Akademkniga, 1959.
- ČUDAJEV, I. F. — [1] *Približennyj metod issledovanija kručenja prizmatičeskikh steržnej*. Issled. po teorii sooruženij, 6 (1954). — [2] *Vlijanie lysok na pročnost i žestkost kruglogo steržnja pri kručenii*. Trudy Sib. Metallurg. In-ta, 4/A (1957).
- ČURIKOV, F. S. — [1] *Ob odnoj forme obščego rešenija uravnenij ravnovesija teorii uprugosti v pere-meščenijah*. Prikl. Mat. Meh., 17, 6 (1953).
- CLEBSCH, A. — [1] *Über die Reflexion an einer Kugelfläche*. Journ. reine u. angew. Math., 61, (1863).
- CLEBSCH, A., SAINT-VENANT, B. de — [1] *Théorie de l'élasticité des corps solides, avec des notes étendues de B. de Saint-Venant et Flamant*. Dunod, Paris, 1883.
- COKER, E. G., FILON, L. N. G. — [1] *A treatise on photo-elasticity*. Cambridge, 1931.

- COLEMAN, B. D. — [1] *Mechanical and thermodynamical admissibility of stress-strain functions*. Arch. Rat. Mech. Anal. **9**, 2 (1962). — [2] *On thermodynamics, strain impulses, and viscoelasticity*. Arch. Rat. Mech. Anal., **17**, 3 (1964).
- COLEMAN, B. D., NOLL, W. — [1] *On the thermostatics of continuous media*. Arch. Rat. Mech. Anal., **4**, 2 (1959). — [2] *Material symmetry and thermostatic inequalities in finite elastic deformations*. Arch. Rat. Mech. Anal., **15**, 2 (1964).
- COLOMBO, G. — [1] *Magiorazioni delle componenti di stress nel problema di de Saint-Venant*. Rend. Padova, **24** (1955).
- COSSERAT, E., COSSERAT, F. — [1] *Sur la théorie de l'élasticité*. Ann. de Toulouse, **10** (1896). — [2] *Sur les fonctions potentielles de la théorie de l'élasticité*. C. R. Ac. Sci., **126** (1898). — [3] *Sur une application des fonctions potentielles de la théorie de l'élasticité*. C. R. Ac. Sci., **133** (1901). — [4] *Théorie des corps déformables*. Gauthier-Villars, Paris, 1909.
- COULOMB, C. A. — [1] *Recherches théoriques et expérimentales sur la force de torsion et sur l'élasticité des fils de métal*. Mémoires de l'Académie des Sciences, 1784.
- COURANT, R. — [1] *Partial differential equations*. J. Wiley, New York, 1962.
- COURANT, R., HILBERT, D. — [1] *Methoden der Mathematischen Physik*. Springer, Berlin, 1937.
- COURANT, R., SCHIFFER, M. (Appendix) — [1] *Dirichlet's principle, conformal mapping, and minimal surfaces*. Appendix: Recent developments in conformal mapping. Interscience Publishers, New York, 1950.
- CRAGGS, J. W. — [1] *Plastic waves*. Progress in solid mechanics. Vol. 2, North Holland, Amsterdam, 1961.
- CRISTESCU, N. — [1] *Dynamic plasticity*. North Holland, Amsterdam, 1967.
- CRISTESCU, R., MARINESCU, GH. — [1] *Unele aplicatii ale teoriei distribuțiilor*. Ed. Academiei, București, 1966.
- CSONKA, P. — [1] *Méthode de calcul numérique des contraintes causées par la torsion*. Acta Techn. Acad. Sci. Hungar., **18**, 3–4 (1957).
- DEAN, W. R., PARSONS, H. W., SNEDDON, I. N. — [1] *A type of stress distribution on the surface of a semi-infinite elastic solid*. Proc. Cambridge Phil. Soc., **40**, 1 (1944).
- DEEV, V. M. — [1] *O formah obščego rešenija prostranstvennoj zadači teorii uprugosti, vyražennyh pri pomošči garmoničeskikh funkcij*. Prikl. Mat. Meh., **23**, 6 (1959).
- DERESIEWICZ, H. — [1] *Contact of elastic spheres under an oscillating torsional couple*. J. Appl. Mech., **21**, 1 (1954). — [2] *Oblique contact of non-spherical elastic bodies*. J. Appl. Mech., **24**, 4 (1957). — [3] *Mechanics of granular matter*. Advances in applied mechanics. Vol. 5, Academic Press, New York, 1958. — [4] *A review of some recent studies of the mechanical behaviour of granular media*. Appl. Mech. Rev., **11**, 6 (1958). — [5] *The half-space under pressure distributed over an elliptical portion of its plane boundary*. J. Appl. Mech., **27**, 1 (1960). — [6] *A note on second-order Hertz contact*. J. Appl. Mech., **28**, 1 (1961).
- DEUTSCH, E. — [1] *Asupra torsiunii barelor prismatice cu secțiune dublu conexă*. St. Cerc. Mat., **12**, 1 (1961). — [2] *On the centre of flexure*. Z.A.M.P., **12**, 3 (1961). — [3] *Torsiunea barelor prismatice cu secțiune transversală în formă de cruce cu brațele opuse egale*. St. Cerc. Mec. Apl., **13**, 2 (1962). — [4] *On the flexure problem (I–II)*. The Quart. J. Mech. Appl. Math., **15**, 3 (1962). — [5] *Torsion of beams of L-cross-sections*. Proc. Glasgow Math. Assoc., **5**, 4 (1962). — [6] *Flexure of hollow cylinders*. Arch. Mech. Stos., **14**, 6 (1962). — [7] *Asupra problemei lui Boussinesq*. Comunicările Acad. RPR, **12**, 10 (1962). — [8] *Asupra torsiunii semispățiului elastic*. St. Cerc. Mec. Apl., **14**, 1 (1963).
- DEVERALL, L. I. — [1] *Solution of some problems in bending of thin clamped plates by means of the method of Muskhelishvili*. J. Appl. Mech., **24**, 2 (1957).
- DIAZ, J. B. — [1] *Estimation of torsional rigidity and other physical quantities*. J. Appl. Mech., **18**, 3 (1951).
- DIAZ, J. B., GREENBERG, H. J. — [1] *Upper and lower bounds for the solution of the first boundary value problem of elasticity*. Quart. Appl. Math., **6**, 4 (1949).
- DIAZ, J. B., PAYNE, L. E., — [1] *Mean value theorems in the theory of elasticity*. Proc. IIIrd U. S. Nat. Congr. Appl. Mech., Pergamon Press, 1958.
- DINCĂ, F. — [1] *Considerații asupra torsiunii unor bare cilindrice*. St. Cerc. Mec. Apl., **6**, 3–4 (1955).
- DINCĂ, F., BOICU, N. — [1] *Asupra torsiunii barelor cilindrice de secțiune dublu conexă*. St. Cerc. Mec. Apl., **9**, 3 (1958).

- DINCĂ, G. — [1] *Sur la déformation plane du corps plastique. (Utilisation des variables complexes.)* Rev. Roum. Math. pures appl., **10**, 5 (1965).
- DINNIK, A. N. — [1] *Izbrannye trudy.* Izd. AN USSR, Kiev, 1952. — [2] *Prodolnyj izgib. Kručenie.* Akademkniga, Moscova, 1955.
- DŽANELIDZE, G. I. — [1] *Obzor rabot po teorii izghiba tolstyh i tonkih plit, opublikovannyh v SSSR.* Prikl. Mat. Meh., **12**, 1 (1948). — [2] *K teorii tonkih i tonkostennyh steržnej.* Prikl. Mat. Meh., **13**, 6 (1949). — [3] *Princip Saint-Venant'a (k stoletiju principa).* Trudy Leningr. Politehn. In-ta, **192** (1958) — [4] *Zadača Almansi.* Trudy Leningr. Politehn. In-ta, **210** (1960). — [5] *Zadači teorii uprugosti anizotropnoj sredy, privodiaščiesja k ploskim.* Sb. „Problemy mehaniki splošnoj sredy“, Akademkniga, Moscova, 1961.
- DLUGAČ, M. I. — [1] *Metod setok v smešannoju ploskoj zadače teorii uprugosti.* Izd. Naukova Dumka, Kiev, 1964.
- DOBOVOLSKIJ, I. P., KOPYTOV, V. D. — [1] *Opredelenie kontaktnyh davlenij metodom fotouprugosti.* Izv. OTN, Meh. Maš., **4** (1960). — [2] *Opredelenie kontaktnyh davlenij na objemnyh modeljah.* Inž. Žurnal, **4** (1961).
- DOBOVOLSKIJ, V. L. — [1] *Zadača o ploskoj deformacii idealno plastičeskogo tela v kompleksnyh peremennyh.* Prikl. Mat. Meh., **24**, 2 (1960).
- DOLAN, T. J., MURRAY, W. M., DRUCKER, D. C. — [1] *Photoelasticity.* Handbook exper. stress analysis. (M. Hetényi), J. Wiley, New York, 1950.
- DONNEL, L. H. — [1] *About Saint-Venant's principle.* J. Appl. Mech., **29**, 4 (1962).
- DOVNOROVIČ, V. I. — [1] *Prostranstvennye kontaktnye zadači teorii uprugosti.* Izd. Univ. Minsk, 1959.
- DOYLE, J. M. — [1] *On completeness of stress functions in elasticity.* J. Appl. Mech., **31**, 4 (1964).
- DOYLE, T. C., ERICKSEN, J. L. — [1] *Nonlinear elasticity.* Advances in applied mechanics, vol. 4., Academic Press, New York, 1956.
- DRĂGANU, M. — [1] *Introducere matematică în fizica teoretică.* Ed. Tehnică, București, 1958.
- DRUCKER, D. C. — [1] *On the role of experiment in the development of theory.* Proc. IVth U. S. Nat. Congr. Appl. Mech., Pergamon Press, New York, 1962.
- DUFFIN, R. J., NOLL, W. — [1] *On exterior boundary value problems in linear elasticity.* Arch. Rat. Mech. Anal., **2**, 2 (1958).
- DURELLI, A. J., DANIEL, I. M. — [1] *A non-destructive three-dimensional strain-analysis method.* J. Appl. Mech., **28**, 1 (1961).
- DURELLI, A. J., PHILIPPS, E. A., TASSO, C. H. — [1] *Introduction to the theoretical and experimental analysis of stress and strain.* McGraw-Hill, New York, 1958.
- DUVAL, F. — [1] *Shock waves in the study of solids.* Appl. Mech. Rev., **15**, 11 (1962).
- DWIGHT, H. B. — [1] *Tables of integrals.* New York, 1941.
- DYSON, A. — [1] *Approximate calculation of Hertzian compressive stresses and contact dimensions.* Journ. Mech. Engng. Sci., **7**, 2 (1965).
- EDAMOTO, I. — [1] *An electrical method for solving the torsion problem of a cylindrical body.* Proc. Ist Japan. Nat. Congr. Appl. Mech., 1951.
- EDELSTEIN, W., GURTIN, M. — [1] *Uniqueness theorems in the linear dynamic theory of anisotropic viscoelastic solids.* Arch. Rat. Mech. Anal., **17**, 2 (1964). — [2] *A generalization of the Lamé and Somigliana stress functions for the dynamic linear theory of viscoelastic solids.* Internat. Journ. Engng. Sci., **3**, 1 (1965).
- EGOROV, K. E. — [1] *Vdavlivanie v poluprostranstvo štampa s ploskoj podošvoj kolcevoj formy.* Izv. OTN, Meh. Maš., **5** (1963).
- EIDUS, D. M. — [1] *O smešannoju zadače teorii uprugosti.* Dokl. AN SSSR, **76**, 2 (1951). — [2] *Kontaktnaja zadača teorii uprugosti.* Matem. Sbornik, **34**, 3 (1954).
- EIRICH, F. R. (red.) — [1] *Rheology.* Academic Press, New York, 1956–1960.
- EISLEY, J. T. — [1] *Nonlinear deformations of elastic beams, rings and strings.* Appl. Mech. Rev., **16**, 9 (1963).
- ENGLAND, A. H., GREEN, A. E. — [1] *Some two-dimensional punch and crack problems in classical elasticity.* Proc. Cambridge Phil. Soc., **59**, 2 (1963).
- ENTOV, V. M., SALGANIK, R. L. — [1] *O baločnom približenii v teorii treščin.* Mehanika, **5** (1965).
- ERDELYI, A. — [1] *From delta functions to distributions.* In: „Modern Mathematics for the Engineers“, red. de E. BECKENBACH, seria 2, McGraw-Hill, New York, 1961.

- ERICKSEN, J. L. — [1] *Tensor fields*, Handbuch d. Physik, (2), 3, partea 1, Springer, Berlin, 1960.
 — [2] *Non-existence theorems in linear elasticity theory*. Arch. Rat. Mech. Anal., 14, 3 (1963).
 — [3] *Non-uniqueness and non-existence in linearized elasticity theory*. Contributions to diff. equations, 3 (1964).
- ERICKSEN, J. L., TRUESDELL, C. A. — [1] *Exact theory of stress and strain in rods and shells*. Arch. Rat. Mech. Anal., 1, 4 (1958).
- ERINGEN, A. C. — [1] *Non-linear theory of continuous media*, McGraw-Hill, New York, 1962.
- ERŠOV, L. V., IVLEV, D. D. — [1] *Ob ustoičivosti polosy pri sžatii*. Dokl. AN SSSR, 138, 5 (1961).
- ESHELBY, J. D. — [1] *Elastic inclusions and inhomogeneities*. Progress in solid mechanics. Vol. 2, North Holland, Amsterdam, 1961.
- EUBANKS, R. A., STERNBERG, E. — [1] *On the completeness of the Boussinesq-Papkovich stress functions*. J. Rat. Mech. Anal., 5, 5 (1956).
- EWING, M., PRESS, F. — [1] *Surface waves and guided waves*. Handbuch d. Physik, (2), 47, Springer, Berlin, 1956.
- FALK, G. — [1] *Axiomatik der Thermodynamik*. Handbuch d. Physik, (2), 3, partea 2, Springer, Berlin, 1959.
- FATOU, P. — [1] *Séries trigonométriques et séries de Taylor*. Acta Mathematica, 30, 1906.
- FICHERA, G. — [1] *Sull'essistenza e sul calcolo delle soluzioni dei problemi al contorno, relativi all'equilibrio di un corpo elastico*. Ann. di Pisa (3), 4, 1950. — [2] *Condizioni perche sia compatibile il problema principale della statica elastica*. Rend. Lincei, 14, 3 (1953). — [3] *Sulla torsione elastica dei prismi cavi*. Rend. di matematica e delle sue applicazioni, (5), 12, 1–2 (1953). — [4] *Il teorema del massimo modulo per l'equazione dell'elastostatica tridimensionale*. Arch. Rat. Mech. Anal., 7, 5 (1961).
- FIELD, F. A. — [1] *A comment on the uniqueness of the solution to Boussinesq's problem*. J. Appl. Mech., 31, 3 (1964).
- FILON, L. N. G. — [1] *On an approximate solution for the bending of a beam of rectangular cross-section under any sistem of load with special reference to points of concentrated or discontinuous loading*. Phil. Trans. London, (A), 201 (1903).
- FILONENKO, G. G. — [1] *Pro ruh kolea, ščo kotitsia po prujnij reiti*. Prikladna Mehanika, 4, 2 (1958).
- FILONENKO-BORODIČ, M. M. — [1] *Teoria uprugosti*. Gostehizdat, Moscova, 1947 — [2] *Nekotorye obobščeniya zadači Lamé dlja uprugogo paralelepipedu*. Prikl. Mat. Meh., 17, 4, (1953). — [3] *Mehaničeskie teorii pročnosti*. Izd. MGU, Moscova, 1961.
- FILONENKO-BORODIČ, M. M., IZJUMOV, S. M., OLISOV, B. A., KUDRJAČEV, I. N., MALGINOV, L. I. — [1] *Kurs soprotivlenija materialov*. Gostehizdat, Moscova, 1955.
- FILČAKOV, P. F. — [1] *Približennye metody konformnyh otobraženij*. Izd. AN USSR, Kiev, 1964.
- FINZI, B. — [1] *Integrazione delle equazioni indefinite della meccanica dei sistemi continui (I, II)*. Rend. Lincei, (6), 19 (1934).
- FÖPPL, A., FÖPPL, L. — [1] *Drang und Zwang. Eine höhere Festigkeitslehre für Ingenieure*. Oldenburg, Berlin-München, 1924–1928.
- FREDHOLM, I. — [1] *Sur les équations d'équilibre d'un corps solide élastique*. Acta Mathematica, 23, 1 (1900). — [2] *Sur une classe d'équations fonctionnelles*. Acta Mathematica, 27, 1903. — [3] *Solution d'un problème fondamental de la théorie de l'élasticité*. Archiv för Mathematik, Astronomi och Fysik, 2, 28 (1906).
- FREUDENTHAL, A. — [1] *Fatigue*. Handbuch d. Physik, (2), 6, Springer, Berlin, 1958.
- FREUDENTHAL, A., GEIRINGER, H. — [1] *The mathematical theories of the inelastic continuum*. Handbuch d. Physik, (2), 6, Springer, Berlin, 1958.
- FREUDENTHAL, A., GUMBEL, J. — [1] *Physical and statistical aspects of fatigue*. Advances in applied mechanics, vol. 4, Academic Press, New York, 1956.
- FRIDMANN, M. M. — [1] *Obzor matematičeskoj teorii uprugosti anizotropnyh sred*. Prikl. Mat. Meh., 14, 3 (1950).
- FRIEDEL, J. — [1] *Les dislocations*. Gauthier-Villars, Paris, 1956. (trad. engleză revizuită : Pergamon Press, 1964).
- FRIEDRICHS, K. O. — [1] *On the boundary-value problem of the theory of elasticity and Korn's inequality*. Annals of Math., 48, 2 (1947). — [2] *Kirchhoff's boundary conditions and the edge effect for elastic plates*. Proc. Symp. Appl. Math., 3, 1950.

- FRIEDRICH, K. O., DRESSLER, D. F. — [1] *A boundary layer theory for elastic bending of plates. Communications on pure and appl. Math.*, 14, 1 (1961).
- FROCHT, M. M. — [1] *Photoelasticity*. J. Wiley, New York, 1941—1948.
- FROCHT, M. M., FLYNN, P. D. — [1] *Studies in dynamic photoelasticity*. J. Appl. Mech., 23, 1 (1956).
- FROCHT, M. M., GUERNSEY, R. — [1] *Further work on the general three-dimensional photoelastic problem*. J. Appl. Mech., 22, 2 (1955).
- FROCHT, M. M., SRINATH, L. S. — [1] *A non-destructive method for three-dimensional photoelasticity*. Proc. IIIrd U. S. Nat. Congr. Appl. Mech., Pergamon Press, 1958.
- FROSTMAN, O. — [1] *Potentiel d'équilibre et capacité des ensembles*. Thèse. Lund, 1935.
- FUKA, J. — [1] *Das zweite Problem der ebenen Elastizitätstheorie für inkompressible Körper*. Aplikace Matematiky, 7 (1962).
- GAHOV, F. D. — [1] *Kraevye zadachi*. Gostehizdat, Moscova, 1958.
- GAIER D. — [1] *Konstruktive Methoden der konformen Abbildung*. Springer, Berlin, 1964.
- GALERKIN, B. G. — [1] *Contribution à la solution générale du problème de la théorie de l'élasticité dans le cas de trois dimensions*. C.R. Ac. Sci., 190, 1930. — [2] *Sobranie Socinenii*. Akademkniga, Moscova, 1952.
- GALILEI, G. — [1] *Discorsi e dimostrazione matematiche intorno a due nuove scienze attenenti alla meccanica et i movimenti locali*. Leyda, 1638.
- GALIN, L. A. — [1] *O gipoteze Cimmermana-Vinklera dlja balok*. Prikl. Mat. Meh., 7, 4 (1943). — [2] *O davlenii štampa elliptičeskoj formy v plane na uprugoe poluprostranstvo*. Prikl. Mat. Meh., 11, 2 (1947). — [3] *Ocenka peremeščenij v prostranstvennyh kontaktnyh zadachah teorii uprugosti*. Prikl. Mat. Meh., 12, 3 (1948). — [4] *Kontaktnye zadachi teorii uprugosti*. Gostehizdat, Moscova, 1953.
- GATTEGNO, C., OSTROWSKI, A. — [1] *Représentation conforme à la frontière*. Mémorial Sci. Math., fasc. 109, 110, Gauthier-Villars, Paris, 1949.
- GAZIS, D. C. — [1] *Graphical investigation of geometric aspects of the Hertz problem*. J. Appl. Mech., 27, 4 (1960).
- GECKELER, J. W. — [1] *Elastostatik*. Handbuch d. Physik, (1), 6, Springer, Berlin.
- GELFAND, I. M., ŠILOV, G. E. — [1] *Obobščennye funkcii*. Fizmatgiz, Moscova, 1958.
- GEONDŽIAN, G. P. — [1] *K teorii stesnennogo kručenja splošnyh prizmatičeskikh steržnej*. Izv. AN Arm. SSR, 12, 5 (1959).
- GERMAIN, P. — [1] *Mécanique des milieux continus*. Masson, Paris, 1962.
- GIBBS, J. V. — [1] *On the equilibrium of heterogeneous substances*. Trans. Connecticut Acad., 3, 1875—1878. — [2] *Termodinamiceskie raboty*. Gostehizdat, Moscova, 1950.
- GLOUMAKOFF, N. A., YI-YUAN YU — [1] *Torsion of bars with isosceles triangular and diamond sections*. J. Appl. Mech., 31, 2 (1964).
- GOGOLADZE, V. G. — [1] *Uprugie volny*. Mehanika v SSSR za 30 let, Gostehizdat, Moscova, 1950.
- GOLDENBLATT, I. I. — [1] *Nekotorye voprosy mehaniki deformiruemyh sred*. Gostehizdat, Moscova, 1955.
- GOLDENBLATT, I. I., KOPNOV, V. A. — [1] *Kriterii pročnosti anizotropnyh materialov*. Mehanika, 6 (1965).
- GOLDENVEIZER, A. L. — [1] *Teoria uprugih tonkih oboloček*. Gostehizdat, Moscova, 1953. — [2] *O teorii izgiba plastinok Reissnera*. Izv. OTN, 4 (1958). — [3] *Postroenie približennoj teorii izgiba plastinki metodom asimptotičeskogo integriruvanija uravnenij teorii uprugosti*. Prikl. Mat. Meh., 26, 4 (1962). — [4] *Razvitie teorii uprugih tonkih oboloček*. Trudy Vsesojuznogo s'ezda po teor. i prikl. meh., Akademkniga, Moscova, 1962.
- GOLDENVEIZER, A. L., KOLOS, A. V. — [1] *K postroeniju dvumernykh uravnenij teorii uprugosti tonkih plastinok*. Prikl. Mat. Meh., 29, 1 (1965).
- GOLDSMITH, W. — [1] *Impact: the collision of solids*. Appl. Mech. Rev., 16, 11 (1963).
- GOLDSMITH, W., LYMAN, P. — [1] *The penetration of hard-steel spheres into plane metal surfaces*. J. Appl. Mech., 27, 4 (1960).
- GOLECKI, J. — [1] *Statics of an isotropic incompressible elastic solid*. Arch. Mech. Stos., 14, 1 (1962).
- GOLUZIN, G. M. — [1] *Geometričeskaja teorija funkcij kompleksnogo peremennogo*. Gostehizdat, Moscova, 1952.

- GOODIER, J. N. — [1] *A general proof of Saint-Venant's principle*. Philos. Mag., **23** (1937). — [2] *Dimensional Analysis*. Handbook of exper. stress anal. (M. Hetényi), J. Wiley, New York, 1950. — [3] *A survey on some recent researches in the theory of elasticity*. Appl. Mech. Rev., **4**, 6 (1951). — [4] *The mathematical theory of elasticity*. J. Wiley, New York, 1958.
- GOODMAN, L. E. — [1] *Contact stress analysis of normally loaded rough spheres*. J. Appl. Mech., **29**, 3 (1962).
- GORBUNOV-POSADOV, M. I. — [1] *Rasčet balok i plit na uprugom poluprostranstve*. Prikl. Mat. Meh., **4**, 3 (1940). — [2] *Balki i plity na uprugom osnovanii*. Strojizdat, Moscova, 1949.
- GOUSAT, E. — [1] *Sur l'équation $\Delta\Delta u = 0$* . Bull. Soc. Math. de France, **26**, 1898. — [2] *Cours d'analyse mathématique*, Vol. 3, Gauthier-Villars, Paris, 1942.
- GRAFFI, D. — [1] *Sui teoremi di reciprocità nei fenomeni non stazionari*. Atti Accad. Sci. Bologna, (11), **10**, 2 (1963).
- GRAHAM, G. A. C. — [1] *The contact problem in the linear theory of visco-elasticity*. Internat. Journ. Engng. Sci., **3**, 1 (1965).
- GREEN, A. E. — [1] *The equilibrium of rods*. Arch. Rat. Mech. Anal., **3**, 5 (1959).
- GREEN, A. E., ADKINS, J. E. — [1] *Large elastic deformations and non-linear continuum mechanics*. Oxford, 1960.
- GREEN, A. E., RIVLIN, R. S. — [1] *Simple force and stress multipoles*. Arch. Rat. Mech. Anal., **16**, 1 (1964). — [2] *Multipolar continuum mechanics*. Arch. Rat. Mech. Anal., **17**, 2 (1964).
- GREEN, A. E., ZERNA, W. — [1] *Theoretical elasticity*. Oxford, 1954.
- GREEN, G. — [1] *Mathematical papers*. London, 1871.
- GREEN, W. A. — [1] *Dispersion relations for elastic waves in bars*. Progress in solid mechanics, Vol. 1, North Holland, Amsterdam, 1960.
- GRIGORJAN, S. S. — [1] *O nekotoryh specialnyh voprosah termodinamiki splošnyh sred*. Prikl. Mat. Meh., **24**, 4 (1960).
- GRIOLI, G. — [1] *Proprietà di media ed equilibrio elastico*. Atti IV Congr. Unione Mat. Ital., **1**, 1953. — [2] *Limitazioni per lo stato tensionale di un qualunque sistema continuo*. Ann. Mat. pura ed appl., (4), **39**, 1955. — [3] *Mathematical theory of elastic equilibrium (recent results)*. Springer, Berlin, 1962.
- GRODSKIJ, G. D. — [1] *Integrirovanie obščih uravnenij ravnovesija izotropnogo uprugogo tela pri pomošči n'jutonovskih potencialov i garmoničeskikh funkcij*. Izv. AN SSSR, **4** (1935).
- GROOT, S. R. de — [1] *Thermodynamics of irreversible processes*. North Holland, Amsterdam, 1952.
- GUBENKO, V. S. — [1] *Nekotorye kontaktnye zadači teorii uprugosti i drobnoe differencirovanie*. Prikl. Mat. Meh., **21**, 2 (1957). — [2] *Davlenie osesimmetričnogo kolcevogo šampa na uprughie sloi i uprugoe poluprostranstvo*. Izv. OTN, Meh. Maš., **3** (1960). — [3] *Davlenie serii krugovyh kolcevyyh šampov na uprugoe poluprostranstvo*. Izv. OTN, Meh. Maš., **4** (1960). — [4] *Zadači o krugovom šampe, sceplennom s poluprostranstvom, i o sloe, oslablennom kolcevoj ščel'ju*. Izv. OTN, Meh. Maš., **5** (1961).
- GUBENKO, V. S., MOSSAKOVSKI, V. I. — [1] *Davlenie osesimmetričnogo kolcevogo šampa na uprugoe poluprostranstvo*. Prikl. Mat. Meh., **24**, 2 (1960).
- GUGGENHEIM, E. A. — [1] *Thermodynamics, classical and statistical*. Handbuch. d. Physik, (2), **3**, partea 2, Springer, Berlin, 1959.
- GÜNTHER, N. M. — [1] *La théorie du potentiel et ses applications aux problèmes fondamentaux de la physique mathématique*. Gauthier-Villars, Paris, 1934; ed. rusă Gostehizdat, Moscova, 1953.
- GURTIN, M. E. — [1] *A note on the principle of minimum potential energy for linear anisotropic elastic solids*. Quart. Appl. Math., **20**, 4 (1963). — [2] *A generalization of the Beltrami stress functions in continuum mechanics*. Arch. Rat. Mech. Anal., **13**, 5 (1953). — [3] *On Helmholtz's theorem and the completeness of the Papkovitch-Neuber stress functions for infinite domains*. Arch. Rat. Mech. Anal., **9**, 3 (1962). — [4] *Variational principles for linear elastodynamics*. Arch. Rat. Mech. Anal., **16**, 1 (1964). — [5] *Thermodynamics and the possibility of spatial interaction in elastic materials*. Arch. Rat. Mech. Anal., **19**, 5 (1965).
- GURTIN, M. E., STERNBERG, E. — [1] *On the first boundary-value problem of linear elastostatics*. Arch. Rat. Mech. Anal., **6**, 3 (1960). — [2] *Theorems in linear elastostatics for exterior domains*. Arch. Rat. Mech. Anal., **8**, 2 (1961). — [3] *A note on uniqueness in classical elastodynamics*. Quart. Appl. Math., **19**, 2 (1961). — [4] *On the linear theory of visco-elasticity*. Arch. Rat. Mech. Anal., **11**, 4 (1962).

- GURTIN, M. E., TOUPIN, R. A. — [1] *A uniqueness theorem for the displacement boundary-value problem of linear elastodynamics*. Quart. Appl. Math., **23**, 1 (1965).
- GUTENMAHER, L. I. — [1] *Električeskie modeli*. Akademkniga, Moscova, 1949.
- HAČATURJAN, T. T. — [1] *Ob učioe vlijanija kasatelnyh naprjaženij v teorii izgiba plit*. Izv. AN Arm. SSR, **14**, 1 (1961).
- HADAMARD, J. — [1] *Leçons sur la propagation des ondes et les équations de l'Hydrodynamique*. Hermann, Paris, 1903. — [2] *La théorie des équations aux dérivées partielles*. Ed. Scientifiques, Pekin, 1964.
- HAIMOVICI, M. — [1] *Curs de teoria elasticității*. Ed. didactică și pedagogică, București.
- HAMBURGER, L., DINČA, F., MANEA, V. — [1] *Asupra torsiunii unor bare cilindrice*. St. Cerc. Mec. Apl., **8**, 4 (1957).
- HARDY, G. H., LITTLEWOOD, J. E. — [1] *Some more theorems concerning Fourier series and Fourier power series*. Duke Math. Journ., **2**, 2 (1936).
- HARDY, G. H., ROGOSINSKI, W. W. — [1] *Fourier series*. Cambridge, 1956.
- HASHIN, Z. — [1] *Theory of mechanical behaviour of heterogeneous media*. Appl. Mech. Rev., **17**, 1 (1964).
- HATA, K. — [1] *Some remarks on the three-dimensional problems concerned with the isotropic and anisotropic elastic solids*. Mech. Fac. Engng., Hokkaido Univ., **10**, 2 (1956).
- HAYES, M., RIVLIN, R. S. — [1] *Surface waves in deformed elastic materials*. Arch. Rat. Mech. Anal., **8**, 5 (1961).
- HELLER, S. R., BROCK, J. S., BART, R. — [1] *The stresses around a rectangular opening with rounded corners in a uniformly loaded plate*. Proc. IIIrd U. S. Nat. Congr. Appl. Mech., Pergamon Press, 1958.
- HERTZ, H. — [1] *Über die Berührung fester elastischer Körper*. Journal f. reine u. angew. Math., **92** (1882).
- HERZIG, A. — [1] *Zur Torsion von Stäben*. Z.A.M.M., **33**, 12 (1953).
- HETÉNYI, M. — [1] *Handbook of experimental stress analysis*. J. Wiley, N. Y., 1950. — [2] *Brittle models and brittle coatings*. Handb. exper. stress anal., J. Wiley, New York, 1950. — [3] *The precision of measurements*. Handb. exper. stress anal., J. Wiley, New York, 1950. — [4] *Photoelasticity and photoplasticity*. Proc. Ist Symp. Naval structural mechanics, Pergamon Press, 1960.
- HETÉNYI, M., MAC-DONALD, P. H. — [1] *Contact stresses under combined pressure and twist*. J. Appl. Mech., **25**, 3 (1958).
- HIGGINS, TH. J. — [1] *Remarks on a method for solving the torsion problem*. Nat. Math. Magazine, **17** (1942). — [2] *A comprehensive review of Saint-Venant's torsion problem*. Amer. Journ. Phys., **10** (1942). — [3] *The approximate mathematical methods of applied physics as exemplified by application to Saint-Venant's torsion problem*. Journ. Appl. Phys., **14** (1943). — [4] *Analogic experimental methods in stress analysis as exemplified by Saint-Venant's torsion problem*. Proc. Soc. Exper. Stress Analysis, **2**, 2 (1945). — [5] *Stress analysis of shafting exemplified by Saint-Venant's torsion problem*. Proc. Soc. Exper. Stress Analysis, **3**, 1 (1945). — [6] *Electroanalogic methods*. Appl. Mech. Rev., **9**, 1 și 2 (1956); **10**, 2, 8 și 10 (1957); **11**, 5 (1958).
- HILBERT, D. — [1] *Über das Dirichletsche Prinzip*. Math. Ann., **59** (1904).
- HILL, R. — [1] *New horizons in the mechanics of solids*. Journ. Mech. Phys. Solids, **5**, 1 (1956). — [2] *On uniqueness and stability in the theory of finite elastic strain*. Journ. Mech. Phys. Solids, **5**, 4 (1957). — [3] *Bifurkacija i edinstvennost v nelineinoj mehanike splošnoj sredy*. Sb. „Problemy mehaniki splošnoj sredy”, Akademkniga, Moscova, 1961. — [4] *Uniqueness in general boundary-value problems for elastic or inelastic solids*. Journ. Mech. Phys. Solids, **9**, 2 (1961). — [5] *Uniqueness criteria and extremum principles in self-adjoint problems of continuum mechanics*. Journ. Mech. Phys. Solids, **10**, 3 (1962). — [6] *Discontinuity relations in mechanics of solids*. Progress in solid mechanics. Vol. 2, North Holland, Amsterdam, 1961.
- HILLIER, K. W. — [1] *The measurement of elastic dynamic properties*. Progress in solid mechanics. Vol. 2, North Holland, Amsterdam, 1961.
- HINČIN, I. IA. — [1] *Kratkij kurs matematičeskogo analiza*. Gostehizdat, Moscova, 1953.
- HOBSON, E. W. — [1] *The theory of functions of a real variable and the theory of Fourier series*. Cambridge, 1907. — [2] *The theory of spherical and ellipsoidal harmonics*. Cambridge, 1931.

- HODGE, P. G. Jr. — [1] *The mathematical theory of plasticity*. J. Wiley, New York, 1958.
- HOLDEN, J. T. — [1] *Estimation of critical loads in elastic stability theory*. Arch. Rat. Mech. Anal., **17**, 3 (1964).
- HOOKE, R. — [1] *Lectures de potentia restitutiva of springs, explaining the power of springing bodies*. London, 1678.
- HORWAY, G. — [1] *Some aspects of Saint-Venant's principle*. Journ. Mech. Phys. Solids, **5**, 2 (1957). — [2] *Saint Venant's principle: a biharmonic eigenvalue problem*. J. Appl. Mech., **24**, 3 (1957).
- HRISTOFOROV, V. V. — [1] *Primenenie funkcij Grina k ploskim zadacam statiki teorii uprugosti*. Trudy In-ta mat. i meh. AN Uzb. SSR, **15** (1955).
- HUNTER, S. C. — [1] *Viscoelastic waves*. Progress in solid mechanics. Vol. 1, North Holland, Amsterdam, 1960.
- HUTH, J. H. — [1] *Torsional stress concentration in angle and square tube fillets*. J. Appl. Mech., **17**, 4 (1950).
- IACOB, C. — [1] *Sur le problème plan de Dirichlet dans un domaine plan multiplement connexe et ses applications à l'Hydrodynamique*. Journ. Math. pures et appl., (9), **18** (1939). — [2] *Asupra torsiunii barelor cilindrice*. Bul. şt. Acad. RPR, **4**, 4 (1952). — [3] *Asupra potenţialului complex al unor mişcări fluide cu singularităţi date*. Bul. şt. Acad. RPR, **9**, 2 (1957). — [4] *Observări asupra problemei lui Dirichlet modificate*. Comunicările Acad. RPR, **8**, 11 (1958). — [5] *Introduction mathématique à la mécanique des fluides*. Gauthier-Villars şi Ed. Acad. RPR, Paris-Bucureşti, 1959. — [6] *Asupra problemei plane a lui Dirichlet pentru o clasă particulară de domenii. Aplicaţie la problema lui Saint-Venant*. Comunicările Acad. RPR, **12**, 10 (1962). — [7] *Sur la résolution du problème biharmonique fondamental pour le cercle dans quelques cas particuliers*. Rev. roum. math. pures appl., **9**, 10 (1964).
- IACOVACHE, M. — [1] *Asupra relaţiilor dintre tensiuni într-un corp elastic în mişcare*. Bul. şt. Acad. RPR, **2**, 9 (1950).
- ILJUŠIN, A. A. — [1] *Plastičnost'*. Izd-vo Nauka, Moscova, sub tipar.
- ILJUŠIN, A. A., LENSKIJ, V. S. — [1] *Soprotivlenie materialov*. Fizmatgiz, Moscova, 1959.
- IONESCU, D. GH. — [1] *La méthode des fonctions analytiques dans l'hydrodynamique des liquides visqueux*. Rev. Roum. Méc. Appl., **8**, 4 (1963).
- IONESCU-CAZIMIR, V. — [1] *Problem of linear coupled thermoelasticity*. Bull. Ac. Pol. Sci., Sect. technique, **12**, 9 (1964).
- IOSIPESCU, N. — [1] *Introducere în fotoelasticitate*. Ed. Tehnică, Bucureşti, 1958—1960.
- IRWIN, R. — [1] *Fracture*. Handbuch d. Physik, (2), **6**, Springer, Berlin, 1958.
- IŠLINSKIJ, A. JU. — [1] *Rassmotrenie voprosov ob ustojčivosti ravnovesija uprugih tel s točki zrenija matematičeskoj teorii uprugosti*. Ukrainskij Mat. Žurnal, **6**, 2 (1954).
- JAHNKE, E., EMDE, F. — [1] *Funktionentafeln mit Formeln und Kurven*. Dover Publications, New York, 1945.
- JESSOP, H. T. — [1] *Photoelasticity*. Handbuch d. Physik, (2), **6**, Springer, Berlin, 1958.
- JOUGUET, E. — [1] *Note sur la théorie de l'élasticité*. Ann. Fac. Sci. Toulouse, **12** (1920).
- JULIA, G. — [1] *Leçons sur la représentation conforme des aires simplement connexes*. Gauthier-Villars, Paris, 1931. — [2] *Leçons sur la représentation conforme des aires multiplement connexes*. Gauthier-Villars, Paris, 1934.
- KAČANOV, L. M. — [1] *Mehanika plastičeskih sred*. Gostehizdat, Moscova, 1948. — [2] *K kinetike rosta treščin*. Prikl. Mat. Meh., **25**, 3 (1961). — [3] *Variacionnye metody v teorii plastičnosti*. Trudy 2 s'ezda po mehanike. Vol. 3, Izd-vo Nauka, Moscova, 1966.
- KALANDJA, A. I. — [1] *Izgib uprugoi plastinki v vide elliptičeskogo kolca*. Prikl. Mat. Meh., **17**, 6 (1953). — [2] *K kontaktnoj zadace teorii uprugosti*. Prikl. Mat. Meh., **21**, 3 (1957). — [3] *O zadace Gherca o szatii uprugih tel*. Trudy vyčisl. centra AN Gruz. SSR, 1960.
- KALISKI, S. — [1] *Reduction of Fredholm's integral equations of the first kind to those of the second kind in boundary-value problems of the dynamical theory of elasticity*. Archiwum Mech. Stos., **13**, 6 (1961).
- KANTOROVIČ, L. V., KRYLOV, V. I. — [1] *Približennye metody vyššego analiza*. Fizmatgiz, Moscova, 1962.
- KAPANJAN, L. K. — [1] *Ob izgibe nekotoryh polyh konsolnyh steržnej*. Izv. AN Arm. SSR, **9**, 3 (1956). — [2] *Vybor otobražajuščih funkcij pri rešenii zadac o kručenii polyh prizmatičeskih steržnej*. Sb. naučn. trudov Erevan. Polit. In-ta, **14** (1957).

- KÁRMÁN, TH. von — [1] *Festigkeitsprobleme im Maschinenbau*. Encykl. Math. Wiss., 4, partea 4, Teubner, Leipzig, 1907—1914. — [2] *Physikalische Grundlagen der Festigkeitslehre*. Encykl. Math. Wiss., 4, partea 4, Teubner, Leipzig, 1907—1914. — [3] *Über die Grundlagen der Balken-Theorie*. Abhandl. aus dem Aerodyn. Inst. an d. Techn. Hochschule Aachen, 7, 3 (1927).
- KAUFMAN, R. N. — [1] *Sžatie uprugogo šara s nekoncentričeskoj šarovoju polosťju*. Prikl. Mat. Meh., 28, 4 (1964).
- KECS, W. — [1] *Sur les problèmes concernant le demi-espace élastique*. Bull. Math. Soc. Sci. Math. Phys. RPR, 6, 3—4 (1962).
- KEER, L. M. — [1] *The contact stress problem for an elastic sphere indenting an elastic layer*. Journ. Appl. Mech., 31, 1 (1964). — [2] *The torsion of a rigid punch in contact with an elastic layer when the friction law is arbitrary*. Journ. Appl. Mech., 31, 3 (1964).
- KELDYŠ, M. V. — [1] *Konformnye otobraženija mnogosvjaznyh oblastej na kanoničeskie oblasti*. Uspehi Mat. Nauk, 6 (1939). — [2] *O razrešimosti i ustoičivosti zadač Dirichlet*. Uspehi Mat. Nauk, 8 (1941).
- KELDYŠ, M. V., LAVRENTJEV, M. A. — [1] *Sur la représentation conforme des domaines limités par des courbes rectifiables*. Ann. Sci. Ecole Norm. Sup., 54 (1937).
- KELLER, H. B. — [1] *Saint-Venant's procedure and Saint-Venant's principle*. Quart. Appl. Math., 22, 4 (1965).
- KELLOG, O. D. — [1] *Foundations of potential theory*. Springer, Berlin, 1929.
- KELVIN, Lord (W. Thomson) — [1] *Note on the integration of the equations of equilibrium of an elastic solid*. Cambridge Dublin Math. Journ., 1848. — [2] *On the thermoelastic and thermomagnetic properties of matter*. Quart. Journ. pure a. appl. Math., 1855. — [3] *Dynamical properties regarding elastic spheroidal shells and spheroids of incompressible liquids*. Trans. Royal Soc., London, 1863. — [4] *Mathematical and Physical Papers*. Cambridge, 1882—1890.
- KELVIN, Lord, TAIT, P. G. — [1] *Treatise on natural philosophy*. Cambridge, 1903.
- KIKUKAWA, M. — [1] *On a method of calculating stress concentrations in an infinite plate with a hole of an arbitrary profile*. Proc. Ist Japan Nat. Congr. Appl. Mech., 1951. — [2] *On plane-stress problems in domains of arbitrary profiles*. Proc. IIrd Japan Nat. Congr. Appl. Mech., 1953. — [3] *On plane-stress problems in domains of arbitrary profiles*. Proc. IVth Japan Nat. Congr. Appl. Mech., 1954. — [4] *On the applications of the conformal mapping in plane stress concentration problems*. Applic. Theory of functions in continuum mechanics. Vol. 1, Nauka, Moscova, 1965.
- KILČEVSKIJ, N. A. — [1] *Teoria soudarenij tverdyh tel*. Gostehizdat, Moscova, 1949. — [2] *Elementy tenzornogo isčislenija i ego priloženija k mehanike*. Gostehizdat, Moscova, 1954. — [3] *Doslidžennia G. Gherca z kontaktnoi zadači i delaki elapi ih dalšogo rozvilku*. Prikladna Mehanika, 4, 2 (1958). — [4] *Postanovka i metod rešenija zadači o kontaktnom sžatii uprugih tel, ograničennyh lineičatymi poverhnostjami*. Izv. OTN, Meh. Maš., 4 (1960). — [5] „Priami” metodi rozviazuvannia kontaktnoi zadači G. Gherca. Dopovidi AN USSR, 8 (1960).
- KILČEVSKIJ, N. A., BOJKO, V. I. — [1] *Pro rozviazok kontaktnoi zadaci G. Gherca pri naiavnosti vnutrišnoi oblasti plastičnosti*. Prikladna Mehanika, 6, 1 (1960).
- KINOSHITA, N., MURA, T. — [1] *On boundary value problems of elasticity*. Res. Reports Fac. Engng. Meiji Univ., 8 (1956).
- KIRCHHOFF, G. — [1] *Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe*. Journ. d. reine u. angew. Math., 40, (1850). — [2] *Über das Gleichgewicht und die Bewegung eines unendlich dünnen elastischen Stabes*. Journ. d. reine u. angew. Math., 56, (1859). — [3] *Vorlesungen über Mechanik*. Teubner, Leipzig, 1897.
- KIRPIČEV, M. V. — [1] *Teorija podobija*. Akademkniga, Moscova, 1953.
- KIZINA, JA. M., GRILIŤKII, D. V. — [1] *Do osesimetričnoj zadaci pro tisk ploskogo kruglogo štampa na prujni plovprostir pri naiavnosti sceplennia*. Prikladna Mehanika, 10, 3 (1964).
- KLAPETEK, F. — [1] *Experimentální způsob vyšetřování napjatosti kroncených hřidelu s vícenásobně souvislými pružky*. Strjnécky časop., 12, 1 (1961).

- KLEBOWSKI, Z. — [1] *Studium nad zasada de Saint-Venanta*. Właściwe jej sformułowanie. Zeszyty Naukowe Politechn. Warsz., **27**, 1957.
- KLIAČKO, S. D. — [1] *O modelirovanii pervoj osnovnoj zadači ploskoj teorii uprugosti dla mnogosvjaznyh oblastej*. Prikl. Mat. Meh., **23**, 2 (1959).
- KNOPS, R. J. — [1] *Uniqueness for the whole space in classical elasticity*. Journ. London Math. Soc., **39**, 4 (1964). — [2] *Uniqueness of axisymmetric elasto-static problems for finite regions*. Arch. Rat. Mech. Anal., **18**, 2 (1965). — [3] *Uniqueness of the displacement boundary-value problem for the classical elastic half-space*. Arch. Rat. Mech. Anal., **20**, 5 (1965).
- KNOWLES, J. K. — [1] *On Saint-Venant's principle in the two-dimensional linear theory of elasticity*. Arch. Rat. Mech. Anal., **21**, 2 (1965).
- KOBER, H. — [1] *Dictionary of conformal representations*. Dover Publications, New York, 1952.
- KOČIN, N. E. — [1] *Vektornoe isčislenie i načala tenzornogo isčislenija*. Gostehizdat, Moscova, 1937.
- KOGAN, S. Ja., — [1] *O rešenii prostranstvennoj zadači teorii uprugosti alterniruiušim metodom Švarca*. Izd. AN SSSR, ser. geofiz., **3** (1956).
- KOITER, W. T. — [1] *General theorems for elastic-plastic solids*. Progress in solid mechanics. Vol. 1, North Holland, Amsterdam, 1960.
- KOLOS, A. V. — [1] *Ob uočnenii klassičeskoj teorii izgiba kruglyh plastinok*. Prikl. Mat. Meh., **28**, 3 (1964). — [2] *Metody uočnenija klassičeskoj teorii izgiba i rastjaženija plastinok*. Prikl. Mat. Meh., **29**, 4 (1965).
- KOLOSOV, G. V. — [1] *Sur les problèmes d'élasticité à deux dimensions*. C.R. Ac. Sci., **146** (1908). — [2] *Sur les problèmes d'élasticité à deux dimensions*. C.R. Ac. Sci., **148** (1909). — [3] *Ob odnom priloženii teorii funkcij kompleksnogo peremennogo k ploskoj zadače matematičeskoj teorii uprugosti*. (Težä). Juriev, 1909. — [4] *Sur le problème plan de la théorie de l'élasticité*. Atti IV Congr. Internat. Mat., **3**, Roma, 1909. — [5] *Über einige Eigenschaften des ebenen Problems der Elastizitätstheorie*. Zeitschrift f. Math. u. Physik, **62** (1914). — [6] *Sur une transformation des équations de l'élasticité*. C.R. Ac. Sci., **184** (1927). — [7] *Sur une application des formules de Schwarz, de Villat et de Dini au problème plan de l'élasticité*. C.R. Ac. Sci., **193** (1931). — [8] *Primenenie kompleksnyh diagramm i teorii funkcij kompleksnoj peremennoj k teorii uprugosti*. Gostehizdat, Moscova, 1935.
- KOLSKY, H. — [1] *Stress waves in solids*. Oxford, 1953.
- KOMAROV, V. A. — [1] *O racionalnom raspredelenii materiala v konstrukcijah*. Mehanika, **5** (1965).
- KOPPENFELLS, W., STALLMAN, F. — [1] *Praxis der konformen Abbildung*. Springer, Berlin, 1959.
- KORENEV, B. G. — [1] *Konstrukcii, lejaščie na uprugom osnovanii*. Sb. „Stroitel'naja Mehanika v SSSR, 1917—1957“, Strojizdat, Moscova, 1957. — [2] *Teorija plastinok*. Sb. „Stroitel'naja Mehanika v SSSR, 1917—1957“, Strojizdat, Moscova, 1957. — [3] *Nekotorye zadači teorii uprugosti i teploprovodnosti, rešaemye v besselevykh funkcijah*. Fizmatgiz, Moscova, 1960.
- KORN, A. — [1] *Sur les équations de l'élasticité*. Ann. Ecole Norm. Sup., (3), **24** (1907). — [2] *Solution générale du problème d'équilibre dans la théorie de l'élasticité dans le cas où les efforts sont donnés à la surface*. Ann. Fac. Sci. Toulouse, (2), **10** (1908). — [3] *Über die Lösung des Grundproblems der Elastizitätstheorie*. Math. Ann., **75** (1914).
- KORNECKI, A. — [1] *On the limitations of Saint-Venant's theory of pure bending*. Archiwum Mech. Stos., **14**, 2 (1962).
- KOROTKIN, V. G. — [1] *Objemnaja zadača dla uprugo-izotropnogo poluprostranstva*. Sb. Gidroenergoproekta, **4** (1938).
- KOSTIUK, E. N. — [1] *Čislennye rešenija prostranstvennyh kontaktnyh zadač teorii uprugosti*. Prikladna Mehanika, **10**, 4 (1964).
- KOVALEV, K. F., IAGN, JU. I. — [1] *Osobennosti stesnennogo kručenija tonkostennyh steržnej zamknutogo profilja*. Inž. sb., **24** (1956).
- KRICKEBERG, K. — [1] *Über den Gausschen und Stokesschen Integralsatz*. Math. Nachrichten, **10**, 5—6 (1953); **11**, 1—2 (1954); **12**, 5—6 (1954).
- KRYLOV, A. JA., KUZNECOV, A. M., SEREBRENNIKOVA, I. I., UGODČIKOV, A. G. — [1] *K rešeniju prikladnyh zadač teorii uprugosti pri pomošči elektromodelirovannogo konformnogo otobraženija*. 2 Vses. sjezd po mehanike, Annot. dokladov, Moscova, 1964.

- KRÖNER, E. — [1] *Das Fundamentalintegral der anisotropen elastischen Differentialgleichungen*. Zeitschrift f. Physik, **136**, 4 (1953). — [2] *Die Spannungsfunktionen der dreidimensionalen isotropen Elastizitätstheorie*. Zeitschrift f. Physik, **139**, 2 (1954). — [3] *Die Spannungsfunktionen der dreidimensionalen anisotropen Elastizitätstheorie*. Zeitschrift f. Physik, **141**, 3 (1955). (Errata, **143**, p. 374). — [4] *Kontinuumstheorie der Versetzungen und Eigenspannungen*. Springer, Berlin, 1958. — [5] *Allgemeine Kontinuumstheorie der Versetzungen und Eigenspannungen*. Arch. Rat. Mech. Anal., **4**, 4 (1960). — [6] *Die neuen Konzeptionen der Kontinuumsmechanik der festen Körper*. Mehanika, Sb. sokr. perevodov, **12**, 6 (1961). — [7] *Dislocations and continuum mechanics*, Appl. Mech. Rev., **15**, 8 (1962).
- KRÖNER, E., SEEGER, A. — [1] *Nicht-lineare Elastizitätstheorie der Versetzungen und Eigenspannungen*. Arch. Rat. Mech. Anal., **3**, 2 (1959).
- KRUTKOV, JU. A. — [1] *Tenzor funkcii naprjaženij i obščie rešenija v statike teorii uprugosti*. Akademkniga, Moscov, 1949.
- KUFAREV, P. P. — [1] *K voprosu o kručenii i izgibe steržnej poligonalnogo sečenija*. Prikl. Mat. Meh., **1**, 1 (1937).
- KUNIN, I. A. — [1] *Model uprugoi sredi s prostoi strukturoi s prostranstvennoi dispersiei*. Prikl. Mat. Meh., **30**, 3 (1966).
- KUPRADZE, V. D. — [1] *Graničnye zadači teorii kolebanij i integralnye uravnenija*. Gostehizdat, Moscov, 1950. — [2] *Metody teorii potenciala v teorii uprugosti*. Fizmatgiz, Moscov, 1963. — [3] *Dynamical problems in elasticity*. Progress in solid mechanics. Vol. 3, North Holland, Amsterdam, 1963.
- KURDIN, N. S. — [1] *O koncentracii naprjaženij v uprugo-deformiruemym sredah*. Mehanika, **5** (1965).
- KUTILIN, D. I. — [1] *Teoria konečnyh deformacij*. Gostehizdat, Moscov, 1947.
- LAMÉ, G. — [1] *Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides*. Mallet-Bachelier, Paris, 1852. — [2] *Leçons sur les coordonnées curvilignes et leurs diverses applications*. Mallet-Bachelier, Paris, 1859.
- LANDAU, L. D., LIFŠIC, E. M. — [1] *Teorija uprugosti*. Izd-vo Nauka, Moscov, 1965.
- LANGHAAR, H. L. — [1] *General theory of buckling*. Appl. Mech. Rev., **11**, 11 (1958). — [2] *Energy methods in applied mechanics*. J. Wiley, New York, 1962.
- LAURICELLA, G. — [1] *Sull'equilibrio dei corpi elastici isotropi*. Rend. Lincei, (5), **2**, 1 (1893). — [2] *Equilibrio di un corpo elastico indefinito limitato da un piano*. Il nuovo Cimento, (3), **36** (1894). — [3] *Equilibrio dei corpi elastici isotropi*. Ann. di Pisa, **7** (1895). — [4] *Alcune applicazioni della teoria delle equazioni funzionali alla fisica matematica*. Il nuovo Cimento (5), **13** (1907). — [5] *Sur l'intégration de l'équation relative à l'équilibre des plaques élastiques encastrées*. Acta Mathematica, **32** (1909).
- LAVRENTJEV, M. A. — [1] *Variacionnyj metod v kraevykh zadačah dlja sistem uravnenij elliptičeskogo tipa*. Akademkniga, Moscov, 1962.
- LAVRENTJEV, M. A., ŠABAT, B. V. — [1] *Metody teorii funkcii kompleksnogo peremennogo*. Fizmatgiz, Moscov, 1958.
- LAZAN, B. — [1] *Damping properties of materials and material composites*. Appl. Mech. Rev., **15**, 2 (1962).
- LEHNICKIJ, S. G. — [1] *Anizotropnye plastinki*. Gostehizdat, Moscov, 1947. — [2] *Teorija uprugosti anizotropnogo tela*. Gostehizdat, Moscov, 1950.
- LEJBENZON, L. S. — [1] *Kurs teorii uprugosti*. Gostehizdat, Moscov, 1947. — [2] *Sobranie trudov*. Akademkniga, Moscov, 1951.
- LEIBFRIED, G. — [1] *Gittertheorie der mechanischen und thermischen Eigenschaften der Kristalle*. Handbuch d. Physik, (2), **7**, partea 1, Springer, Berlin, 1955.
- LEONOV, M. JA. — [1] *Nekotorye zadači i priloženija teorii potenciala*. Prikl. Mat. Meh., **4**, 5–6 (1940). — [2] *Obščaja zadača o davlenii krugovogo štampa na uprugoe poluprostranstvo*. Prikl. Mat. Meh., **17**, 1 (1953).
- LEONOV, M. JA., ČUMAK, K. I. — [1] *Davlenie pod štampom blizkim k krugovomu v plane*. Prikladna Mehanika, **5**, 2 (1959).
- LEONOV, M. IA., POSACKIJ, S. L., IVAŠČENKO, A. N. — [1] *Rasčet fundamenta, kvadratnogo v plane*. Naučn. zap. In-ta mašinovedenija i avtomatiki AN USSR, **4**, (1956).
- LEONTOVIČ, M. A. — [1] *Vvedenie v termodinamiku*. Gostehizdat, Moscov, 1952.

- LERAY, J. — [1] *Fonction de Green m -harmonique; flexion de la bande élastique, homogène, isotrope à bords libres*. Appl. Theory of functions in continuum mechanics. Vol. 1, Nauka, Moscova, 1965.
- LERAY, J. C. — [1] *Le calcul des ponts-plaques*. Applic. Theory of functions in continuum mechanics. Vol. 1, Nauka, Moscova, 1965.
- LÉVY, M. — [1] *Mémoires sur la théorie des plaques élastiques planes*. Journ. Math. pures appl., (3), 3, 1877. — [2] *Sur la légitimité de la règle dite du trapèze dans l'étude de la résistance des barrages en maçonnerie*. C. R. Ac. Sci., 126 (1898).
- LEWIS, J. A., POLLAK, H. O. — [1] *Photoelastic calculations by a complex variable method*. Z.A.M.P., 12, 1 (1961).
- L'HERMITE, R. — [1] *Résistance des matériaux*. Dunod, Paris, 1954.
- LICHTENSTEIN, L. — [1] *Neuere Entwicklung der Potentialtheorie. Konforme Abbildung*. Encykl. d. Math. Wiss., 2, partie 3, fasc. 1, Teubner, Leipzig, 1918. — [2] *Über die erste Randwertaufgabe der Elastizitätstheorie*. Math. Zeitschrift, 20 (1924); 24 (1926), p. 640.
- LIHAČEV, V. A. — [1] *Zamečanija k statje A. I. Kalandija „Izgib uprugoj plastinki v vide elliptičeskogo kolca“*. Prikl. Math. Meh., 19, 2 (1955).
- LING HUNG SUN — [1] *On variational methods in the problem of torsion for multiply-connected cross-sections*. Acta Phys. Sinica, 9, 4 (1953).
- LOŽKIN, B. G. — [1] *Analiz racionalnogo primenenija profilej prokatnoj stali*. Izv. OTN, 1 (1956).
- LOMAKIN, V. A. — [1] *O deformirovanii microneodnorodnyh uprugih tel*. Prikl. Mat. Meh., 29, 5 (1965).
- LOVE, A. E. H. — [1] *A treatise on the mathematical theory of elasticity*. Cambridge, 1927. — [2] *The stress produced in a semi-infinite solid by pressure of part of the boundary*. Phil. Trans. Roy. Soc. London, A, 228, 1929. — [3] *Boussinesq problem for a rigid cone*. The Quart. Journ. of Math., Oxford series, 10, 39 (1939).
- LUBINSKII, A. — [1] *Generalization of the theory of elasticity to porous bodies*. Proc. II Ind U.S. Nat. Congr. Appl. Mech., Pergamon Press, 1954.
- LUBKIN, J. L. — [1] *The torsion of elastic spheres in contact*. Journ. Appl. Mech., 18, 2 (1951).
- LURJE, A. I. — [1] *Opredelenie peremeščeniia po zadannomu tenzoru deformacij*. Prikl. Mat. Meh., 4, 1 (1940). — [2] *Nekotorye kontaktnye zadači teorii uprugosti*. Prikl. Mat. Meh., 5, 3 (1941). — [3] *Ravnovesie uprugoj poloj sfery*. Prikl. Mat. Meh., 17, 3 (1953). — [4] *Prostranstvennye zadači teorii uprugosti*. Gostehizdat, Moscova, 1955. — [5] *O knige „Kručenje uprugih tel“*. Mehanika, 2 (1965).
- LUZIN, N. N. — [1] *Teoria funkcij dejstvitel'nogo peremennogo*. Učpedgiz, Moscova, 1948.
- LUZIN, N. N., PRIVALOV, I. I. — [1] *Sur l'unicité et la multiplicité des fonctions analytiques*. Ann. Ec. Norm. Sup., 42 (1925).
- MAHOVIKOV, V. I. — [1] *Pro nabliženi konformni vidobražennia i ih zastosuvania v teorii prujnosti*. Prikladna Mehanika, 3, 1 (1957). — [2] *Nabliženi sposobi konformnogo vidobražennia dvozviaznih oblastei*. Prikladna Mehanika, 5, 3 (1959). — [3] *Približennyj sposob konformnogo otobraženiia mnogougolnyh oblastej i kručenje steržnej formy prokatnyh profilei*. Izv. vysš. učeb. zaved., Stroit. i Arhit., 2 (1961).
- MAKAI, E. — [1] *Bounds for the principal frequency of a membrane and the torsional rigidity of a beam*. Acta Sci. Math. Szeged., 20 (1959).
- MANDJAVIDZE, G. F. — [1] *Ob odnom singuljarnom integralnom uravnenii s razryvnymi koeficientami i ego primenenii v teorii uprugosti*. Prikl. Mat. Meh., 15, 3 (1951). — [2] *Singuljarnye integralnye uravnenija kak apparat rešenija smešannyh zadač ploskoj teorii uprugosti*. Applic. Theory of functions in continuum mechanics, vol. 1, Nauka, Moscova, 1965.
- MANEA, V. — [1] *Torsiunea arborelui cu caneluri radiale exterioare*. St. Cerc. Mec. Apl., 9, 4 (1958). — [2] *Considerații asupra teoriei plăcilor plane elastice subțiri*. St. Cerc. Mec. Apl., 14, 4 (1963). — [3] *Construirea soluțiilor ecuațiilor plăcilor plane elastice subțiri, din teoria fără ipoteza Love-Kirchhoff, prin metoda funcțiilor analitice*. St. Cerc. Mec. Apl., 14, 5 (1963). — [4] *Calculul plăcilor elastice circulare subțiri în teoria fără ipoteza Love-Kirchhoff*. St. Cerc. Mec. Apl., 14, 6 (1963). — [5] *K nelineinym uravnenijam dvizenija splošnoj deformiruemoj sredy*. Rev. Roum. Méc. Appl., 9, 1 (1964). — [6] *On the theory of elastic plane plates of mean thickness*. Rev. Roum. Méc. Appl., 9, 6 (1964). — [7] *Cîteva probleme ale teoriei plăcilor plane elastice*. Editura Academiei, București, 1966.
- MANEA, V., PROCOPOVICI, E. — [1] *O extindere a rezolvării problemei torsiunii unei palete de turbină*. St. Cerc. Mec. Apl., 10, 1 (1959).

- MAPLE, C. G. — [1] *The Dirichlet problem: bounds at a point for the solution and its derivatives*. Quart. Appl. Math., **8**, 3 (1950).
- MARGUERRE, K. — [1] *Ansätze zur Lösung der Grundgleichungen der Elastizitätstheorie*. ZAMM, **35**, 6–7 (1955).
- MARIN, J. — [1] *Testing machines*. Handbook exper. stress anal. (M. Hetényi), J. Wiley, New York, 1950.
- MARIOTTE, E. — [1] *Traité du mouvement des eaux*. Paris, 1686.
- MARKUŠEVIČ, A. I. — [1] *Teorija analitičeskikh funkcii*. Gostehizdat, Moscova, 1950.
- MARTIN, A. I. — [1] *On a formula for the torsional rigidity of thin-symmetrical sections*. Journ. Math. Phys., **36**, 1 (1957).
- MATHURIN, C. — [1] *Application de l'algèbre et de l'analyse linéaires à la statique des plaques élastiques*. Journ. de Mécanique, **1**, 3 (1962). — [2] *Résolution des deux problèmes fondamentaux de l'élastostatique plane quand le contour est analytique simple*. Applic. Theory of functions in continuum mechanics, Nauka, Moscova, 1965.
- MATSCHINSKII, M. — [1] *Beweis des Saint-Venantschen Prinzips*. ZAMM, **39**, 9–11 (1959).
- MAXWELL, J. C. — [1] *On reciprocal figures, frames, and diagrams of forces*. Trans. Roy. Soc. Edinburgh, **26**, 1869–70.
- MCGREGOR, C. W. — [1] *Mechanical properties of materials*. Handbook exper. stress anal. (M. Hetényi), J. Wiley, New York, 1950.
- MCNEAL, R. H. — [1] *The solution of elastic plate problems by electrical analogies*. Journ. Appl. Mech., **18**, 1 (1951).
- MEDOVIKOV, A. I. — [1] *Rešenje ploskoj smešannoј zadači teorii uprugosti metodom elektromodelirovanija funkcij naprjaženij*. Trudy I mežvuzovskoj naučn.-tehn. konferencii po električ. modelirovaniju zadač stroit. meh., sopr. mat. i teorii upr., B.M., Novočerkasskij Polit. Inst., 1960.
- MESNAGER, A. — [1] *Sur le calcul des pièces rectangulaires fléchies au moyen de la théorie de l'élasticité*. Ann. Ponts et Chaussées, (8), 2 (1901). — [2] *Détermination complète, sur un modèle réduit, des tensions qui se produisent dans un ouvrage. Utilisation de la double réfraction accidentelle du verre à l'étude des efforts intérieurs dans les solides*. Ann. Ponts et Chaussées, (9), **13**, 4 (1913).
- METELICYN, I. I. — [1] *K voprosu ob uprugom udare*. Ukr. Mat. Žurnal, **6**, 2 (1954).
- MICHELL, J. H. — [1] *On the direct determination of stress in an elastic solid, with applications to the theory of plates*. Proc. London Math. Soc., **31**, 1900.
- MIHLIN, S. G. — [1] *Integralnye uravnenija*. Gostehizdat, Moscova, 1949. — [2] *Prjamye metody v matematičeskoj fizike*. Gostehizdat, Moscova, 1950. — [3] *Problema minimuma kvadratičnogo funkcionala*. Gostehizdat, Moscova, 1952. — [4] *Variacionnye metody v matematičeskoj fizike*. Gostehizdat, Moscova, 1957. — [5] *Mnogomernye singuljarnye integraly i integralnye uravnenija*. Fizmatgiz, Moscova, 1962.
- MIKLOWITZ, J. — [1] *Recent developments in elastic wave propagation*. Appl. Mech. Rev., **13**, 12 (1960). — [2] *Transient wave propagation in elastic rods and plates*. Journ. Geophys. Res., **68**, 4 (1963).
- MILNE-THOMSON, L. M. — [1] *Flexure*. Trans. Amer. Math. Soc. **99**, 1, (1959). — [2] *Plane elastic systems*. Springer, Berlin, 1960. — [3] *Antiplane elastic systems*. Springer, Berlin, 1962.
- MINDLIN, R. D. — [1] *Force at a point in the interior of a semi-infinite solid*. Physics, **7**, 5 (1936). — [2] *Note on the Galerkin and Papkovitch stress functions*. Bull. Amer. Math. Soc., **42** (1936). — [3] *Compliance of elastic bodies in contact*. Journ. Appl. Mech., **16** (1949). — [4] *Force at a point in the interior of a semi-infinite solid*. Proc. 1st Midwestern Conference Solid Mech., Illinois, Urbana, 1953. — [5] *Mechanics of granular media*. Proc. II U.S. Nat. Congr. Appl. Mech., Pergamon Press, 1954. — [6] *Micro-structure in linear elasticity*. Arch. Rat. Mech. Anal., **16**, 1 (1964). — [7] *Complex representation of displacements and stresses in plane strain with couple-stresses*. Applic. Theory of functions in continuum mechanics, Nauka, Moscova, 1965.
- MINDLIN, R. D., DERESIEWICZ, H. — [1] *Elastic spheres in contact under varying oblique forces*. Journ. Appl. Mech., **20**, 3 (1953).
- MINDLIN, R. D., SALVADORI, M. G. — [1] *Analogies*. Handbook exper. stress anal. (M. Hetényi), J. Wiley, New York, 1950.
- MINDLIN, R. D., TIERSTEN, H. F. — [1] *Effects of couple-stresses in linear elasticity*. Arch. Rat. Mech. Anal., **11**, 5 (1962).

- MIRANDA, C. — [1] *Equazioni alle derivate parziali di tipo ellittico*. Springer, Berlin, 1955.
- MISES, R. von — [1] *On Saint-Venant's principle*. Bull. Amer. Math. Soc., **51** (1945).
- MIȘICU, M. — [1] *Echilibrul mediilor continue cu deformații mari*. St. Cerc. Mec. Metalurg., **4** (1953). — [2] *Über die Anwendung analytischer Funktionen auf dreidimensionale Probleme der Mechanik verformbarer Körper*. Rev. Roum. Méc. Appl., **1**, 2 (1956). — [3] *On the solving of the spatial problem of the theory of elasticity. Applications to the theory of plates*. Rev. Roum. Méc. Appl., **2**, 1 (1957). — [4] *Despre problemele dinamice ale lui Boussinesq și Hertz*. St. Cerc. Mec. Apl., **10**, 2 (1959). — [5] *Torsiunea dinamică a barelor elastice cu secțiune constantă*. St. Cerc. Mec. Apl., **10**, 4 (1959). — [6] *Problema dinamică a torsiunii*. St. Cerc. Mec. Apl., **11**, 1 (1960). — [7] *Theory of visco-elasticity with couple-stresses and some reduction to two-dimensional problems (I, II)*. Rev. Roum. Méc. Appl., **8**, 6 (1963); **9**, 1 (1964). — [8] *On the mechanics of structural media. Noncorrelated fields*. Rev. Roum. Sci. Techn., Méc. Appl., **10**, 2 (1965). — [9] *Mecanica mediilor deformabile*. Ed. Academiei, București, 1967.
- MITCHELL, T. P., WARREN, W. E. — [1] *On the method of Milne-Thomson in plane elasticity*. Journ. Appl. Mech., **29**, 4 (1962).
- MIYATAKE, O., HIRAI, H., MIKAENI, T., FUJII, T. — [1] *Calculations of torsional stress by Monte-Carlo method*. Proc. IX Japan Nat. Congr. Appl. Mech., 1959.
- MOLYNEUX, J., BERAN, M. — [1] *Statistical properties of the stress and strain fields in a medium with small random variations in elastic coefficients*. Journ. Math. Mech., **14**, 3 (1965).
- MORERA, G. — [1] *Soluzione generale delle equazioni indefinite dell'equilibrio di un corpo continuo*. Rend. Lincei, (5), **1**, 1 (1892). — [2] *Appendice alla nota „Sulla soluzione più generale...”, Rend. Lincei, (5), 1, 1 (1892).*
- MORGENSTERN, D. — [1] *Mathematische Begründung der Scheibentheorie (Zweidimensionale Elastizitätstheorie)*. Arch. Rat. Mech. Anal., **3**, 1 (1959). — [2] *Herleitung der Plattentheorie aus der dreidimensionalen Elastizitätstheorie*. Arch. Rat. Mech. Anal., **4**, 2 (1959).
- MOSSAKOVSKIJ, V. I. — [1] *K voprosu ob ocenke peremeščeniij v prostranstvennyh kontaktnyh zadachah*. Prikl. Mat. Meh., **15**, 5 (1951). — [2] *Primenenie teoremy vzaimnosti k opredeleniju summarnyh sil i momentov v prostranstvennyh kontaktnyh zadachah*. Prikl. Mat. Meh., **17**, 4 (1953). — [3] *Osnovnaja smešannaja zadača teorii uprugosti dlja poluprostranstva s krugovoj liniej razdela graničnyh uslovij*. Prikl. Mat. Meh., **18**, 2 (1954). — [4] *Dvalenie štampa, blizkogo v plane k krugovomu, na uprugoe poluprostranstvo*. Prikl. Mat. Meh., **18**, 6 (1954). — [5] *O modelirovanii pervoj osnovnoj zadači teorii uprugosti dlja mnogosvjaznyh oblastej*. Prikl. Mat. Meh., **19**, 3 (1955). — [6] *Davlenie krugovogo štampa na uprugoe poluprostranstvo, modul uprugosti kotorogo javljaetsja stepennoj funkciej glubiny*. Prikl. Mat. Meh., **22**, 1 (1958). — [7] *Sžatie uprugih tel v uslovijah sčeplenija (osesimmetričnyj slučaj)*. Prikl. Mat. Meh., **27**, 3 (1963). — [8] *Rešenje nekotoryh smešannyh zadač teorii uprugosti i teorii potencijala dlja poluprostranstva svedeniem k vspomogatel'nyj ploskim zadacham*. 2 Vsesoiuznyj sjezd po mehanike. Annotacii dokladov, Moscova, 1964.
- MOSSAKOVSKIJ, V. I., FOTIEVA, N. N. — [1] *Vdavlivanie simmetričnogo štampa v upruguju poluploskost pri naličii sčeplenija na linii kontakta*. Mehanika, **6** (1965).
- MOSSAKOVSKIJ, V. I., GUBENKO, V. S. — [1] *Novi metodi rozv'jazannja zadaci pro tisk krugovogo štampa na prupnjii pivprostir*. Prikladna Mehanika, **7**, 1 (1961).
- MOSSAKOWSKA, Z. — [1] *Funkcii naprjaženij dlja uprugih tel s trjohosnoj ortotropiej*. Archiwum Mech. Stos., **7**, 1 (1955).
- MOSSAKOVSKIJ, V. I., ONIŠČENKO, V. I., RVACEV, V. L. — [1] *Pro zastosovannija funkcii Grina do rozv'jazannija mišanoi zadači teorii pružnosti dlja pivprostora*. Prikladna Mehanika, **10**, 3 (1964).
- MUKI, R. — [1] *On the Sneddon's method by Hankel transforms for the three-dimensional problem of elasticity theory*. Proc. Vth Japan Nat. Congr. Appl. Mech., 1955. — [2] *Asymmetric problems of the theory of elasticity for a semi-infinite solid and a thick plate*. Progress in solid mechanics, vol. 1, North Holland, Amsterdam, 1960.
- MÜLLER, C. H., TIMPE, A. — [1] *Die Grundgleichungen der mathematischen Elastizitätstheorie*. Encykl. Math. Wiss., **4**, partea 4, Teubner, Leipzig, 1907–1914.
- MURA, T., RIMAWI, W., LEE, S. L. — [1] *Extended theorems of limit analysis*. Quart. Appl. Math., **23**, 2 (1965).

- MURNAGHAN, F. D. — [1] *Finite deformations of an elastic solid*. Amer. Journ. Math., **59** (1937). — [2] *Finite deformations of an elastic solid*. J. Wiley, New York, 1951.
- MUSGRAVE, M. — [1] *Elastic waves in anisotropic media*. Progress in solid mechanics, vol. 2, North Holland, Amsterdam, 1961.
- MUSHELIŠVILI, N. I. — [1] *Application des intégrales analogues à celles de Cauchy à quelques problèmes de la physique mathématique*. Ed. Univ. Tiflis, 1922. — [2] *Recherches sur des problèmes aux limites relatifs à l'équation biharmonique et aux équations de l'élasticité à deux dimensions*. Math. Ann., **107** (1932). — [3] *Singuliarnye integralnye uravnenija*. Fizmatgiz, Moscova, 1962. — [4] *Applications of the theory of functions of a complex variable to the theory of elasticity*. Applic. theory of functions in continuum mechanics, vol. 1, Nauka, Moscova, 1965. — [5] *Nekotorye osnovnye zadachi matematičeskoj teorii uprugosti*. Akademkniga, Moscova, 1966.
- MUŠTARI, H. M. — [1] *Ob odnom sposobe polučeniya nekotoryh rezul'tatov rešenij zadač Sen-Venana o kručenii i o poperečnom izgibe prizmatičeskikh tel*. Prikl. Mat. Meh., **1**, 4 (1938). — [2] *Teoria izgiba plit srednei tolščiny*. Izv. OTN, Meh. Maš., 2 (1959).
- NADAI, A. — [1] *Theory of flow and fracture of solids*. McGraw-Hill, New York, 1950.
- NAGHDI, P. M. — [1] *On Saint-Venant's principle: elastic shells and plates*. Journ. Appl. Mech., **27**, 3 (1960). — [2] *Foundations of elastic shell theory*. Progress in solid mechanics, vol. 4, North Holland, Amsterdam, 1963.
- NAGHDI, P. M., HSU, C. S. — [1] *On a representation of displacements in linear elasticity in terms of three stress functions*. Journ. Math. Mech., **10**, 2 (1961).
- NAJMAN, M. I. — [1] *Poperečnij izgib cilindra s soosnoj mnogogrannoj polostju*. Rasčety na pročnost', 4, Mašgiz, 1959.
- NAJMARK, B. M. — [1] *O nekotoryh funkcionalnyh metodah v linejnoj idealnoj teorii uprugosti*. Trudy In-ta fiziki Zemli AN SSSR, **11** (1960).
- NAKAZAWA, H. — [1] *Electrical analogies with resistive paper for the torsion problem of bars*. Proc. Vth Japan Nat. Congr. Appl. Mech., 1956.
- NAKAZAWA, H., YATSUKA, T. — [1] *On the torsion of the bar with drill section*. Proc. Xth Japan Nat. Congr. Appl. Mech., 1960.
- NARASIMHAMURTHY, P. — [1] *Torsion of multiply connected sections*. Journ. Indian Inst. Sci., B **36**, 4 (1954).
- NARODECKIJ, M. Z. — [1] *Opredelenie naprjaženij v krugovom kolce pod dejstviem sosredotočennyh sil*. Izv. OTN, **1** (1948).
- NAUMOV, L. G., STEPANOV, G. JU. — [1] *Primenenie metoda elektriceskogo modelirovanija k rešeniju zadači kručenja cilindričeskikh steržnej*. Dokl. 4-oj mežvuzovsk. konf. po primeneniju fizičeskogo i matematičeskogo modelirovanija v različnyh otrasljah tehniki. Sb. **1**, Moscova, 1962.
- NAVIER, L. — [1] *Mémoire sur les lois d'équilibre et du mouvement des corps solides élastiques*. Bull. Soc. Philomathique, Paris, 1823.
- NEDELICU, M. — [1] *Une application de la dérivée spatiale aux équations de l'élasticité dans l'espace*. Rev. Roum. Math. pures appl., **5**, 3—4 (1960).
- NEHARI, Z. — [1] *Conformal mapping*. McGraw-Hill, New York, 1952.
- NEIDHARDT, G. L., STERNBERG, E. — [1] *On the transmission of a concentrated load into the interior of an elastic body*. Journ. Appl. Mech., **23**, 4 (1956).
- NEMÉNYI, P. — [1] *Lösung des Torsionsproblems für Stäbe mit mehrfach zusammenhängendem Querschnitt*. ZAMM, **1** (1921). — [2] *Recent developments in inverse and semi-inverse methods in the mechanics of continua*. Advances in applied mechanics, vol. 2, Mc Graw Hill, New York, 1951.
- NEUBER, H. — [1] *Ein neuer Ansatz zur Lösung räumlicher Probleme der Elastizitätstheorie. Der Hohlkegel unter Einzellast als Beispiel*. ZAMM, **14**, 4 (1934). — [2] *Kerbspannungslehre*. Springer, Berlin, 1958.
- NEUMANN, F. — [1] *Die Gesetze der Doppelbrechung des Lichts in comprimierten oder ungleichförmig erwärmten unkristallinen Körpern*. Abhandl. königl. Akad. d. Wiss., Berlin, **2**, 1841.
- NICOLAU, E. — [1] *Contribuții la utilizarea analogiei cu membrana în cercetarea tensiunilor la torsiune*. St. Cerc. Mec. Apl., **7**, 2 (1956). — [2] *Torsiunea barelor cilindrice cu fisură diametrală de adâncime variabilă, studiată cu ajutorul analogiei cu membrana*. St. Cerc. Mec. Apl., **13**, 5 (1962).

- NICOLESCU, M. — [1] *Recherches sur les fonctions polyharmoniques*. Ann. Sci. Ecole Norm. Sup., (3), **52** (1935).
- NICOLESCU, M., DINCULEANU, N., MARCUS, S. — [1] *Manual de analiză matematică*. Edit. didactică și pedagogică, București, 1962–1964.
- NIGUL, U. K. — [1] *O primeneni simvoličeskogo metoda A.I. Lurje k analizu naprjažennyh sostojanij i dvumernyh teorij uprugih sistem*. Prikl. Mat. Meh., **27**, 3 (1963).
- NIKOLSKII, E. N. — [1] *Algoritm Švarca v zadače teorii uprugosti o naprjaženijah*. Dokl. AN SSSR, **135**, 3 (1960).
- NISIDA, M., HONDO, M. — [1] *New photoelastic procedures for solving torsion problems*. Proc. VIIth Japan Nat. Congr. Appl. Mech., 1957.
- NICECKIJ, L. V. — [1] *Elektromodelirovanie trjohmernyh kontaktnyh zadač teorii uprugosti*. Trudy I mežvuzovskoj naučno-tehn. konf. po električ. modelirovaniju zadač stroit. meh., soprot. mat. i teorii uprugosti. B.M., Novočerkasskij Polit. Inst., 1960.
- NOLL, W. — [1] *On the continuity of the solid and fluid states*. Journ. Rat. Mech. Anal., **4**, 1 (1955). — [2] *Die Herleitung der Grundgleichungen der Theorie der Kontinua aus der statistischen Mechanik*. Journ. Rat. Mech. Anal., **4**, 5 (1955). — [3] *A mathematical theory of the mechanical behaviour of continuous media*. Arch. Rat. Mech. Anal., **2**, 3 (1958). — [4] *La mécanique classique, basée sur un axiome d'objectivité*. In *La méthode axiomatique dans les mécaniques classiques et nouvelles*. Gauthier-Villars, Paris, 1963.
- NOVOŽILOV, V. V. — [1] *Osnovy nelinejnoj teorii uprugosti*. Gostehizdat, Moscova, 1948. — [2] *O centre izgiba*. Prikl. Mat. Meh., **21**, 2 (1957). — [3] *Teorija uprugosti*. Sudpromgiz, Moscova, 1958. — [4] *Teorija tonkih oboloček*. Sudpromgiz, Moscova, 1962.
- NOVOŽILOV, V. V., SLEPIAN, L. I. — [1] *O principe Sen-Venana v dinamike steržnej*. Prikl. Mat. Meh., **29**, 2, (1965).
- NOWACKIJ, W. — [1] *Dinamika sooruzenij*. Strojizdat, Moscova, 1963.
- NOWINSKI, J. — [1] *Skrecanie preta prostopadlosciennego, ktorego jeden przekroj pozostaje ploski*. Archiwum Mech. Stos., **5**, 1 (1953). — [2] *Theory of thin-walled bars*. Appl. Mech. Rev., **12**, 4 (1959).
- NOWINSKI, J., TURSKII, S. — [1] *Z teorii sprężystości ciał izotropowych niejednorodnych*. Archiwum Mech. Stos., **5**, 1 (1953).
- NYE, J. F. — [1] *Physical properties of crystals*. Oxford, 1957.
- OBOLAŠVILI, E. I. — [1] *Effektivnoe rešenje nekotoryh prostranstvennyh zadač teorii uprugosti*. Rev. Roum. Math. pures appl., **11**, 8 (1966).
- ODEH, F., TADJBAKHS, I. — [1] *Uniqueness in the linear theory of viscoelasticity*. Arch. Rat. Mech. Anal., **18**, 4 (1965).
- ODQVIST, F. K. G. — [1] *Über die Randwertaufgaben der Hydrodynamik zäher Flüssigkeiten*. Math. Zeitschrift, **32** (1930).
- OGIBALOV, P. M. — [1] *Izgib, ustojčivost i kolebanija plastinok*. Edit. Univ. Moscova, 1958.
- OLSZAK, W. — [1] *Uogólnienie analogii membranowej do zagadnień układów anizotropowych*. Archiwum Mech. Stos., **5**, 1 (1953). — [2] *Non-homogeneity in elasticity and plasticity*. (Red.) Pergamon Press, 1959.
- OLSZAK, W., PERZYNA, Z., MROZ, P. — [1] *Sovremennoe sostojanie teorii plastičnosti*. Mir, Moscova, 1964.
- OLSZAK, W., RYCHLEWSKI, J. — [1] *On plane states of equilibrium in non-homogeneous elastic and plastic media*. Applic. Theory of functions in continuum mechanics. Vol. 1, Nauka, Moscova, 1965.
- ONICESCU, O. — [1] *Variationsprinzipien, welche die inneren Verbindungen eines kontinuierlichen Mediums definieren*. Revue Roum. Mécanique Appliquée, **1**, 2 (1956).
- ORLOV, A. V., PINEGHIN, S. V. — [1] *Experimentalnoe issledovanie mikroperemeščenij v rajone kontakta uprugih tel i pročnosť poverhnostnogo sloja*. Izv. OTN, Meh. Maš., **6** (1960).
- OSGOOD, W. F. — [1] *Allgemeine Theorie der analytischen Funktionen*. Encykl. Math. Wiss., **2**, partea 2, Teubner, Leipzig, 1901–1921. — [2] *Lehrbuch der Funktionentheorie*. Teubner, Leipzig, 1912.
- OSGOOD, W. F., TAYLOR, E. H. — [1] *Conformal transformations on the boundary of their regions of definition*. Trans. Amer. Math. Soc., **14** (1913).
- PACELLI, M. — [1] *Contatto con attrito tra due corpi elastici di forma qualunque; compressione e torsione*. Ann. di Pisa, (3), **10**, 3–4 (1956). — [2] *Compressione e torsione di due corpi elastici a contatto*. Rend. Lincei, (8), **21**, 5 (1956).

- PALMOV, V. A. — [1] *Koncentracija naprjaženij okolo šerohovatoj granicy uprugogo tela*. Izv. OTN, Meh. Maš., 3 (1963). — [2] *Naprjažennoe sostojanie vblizi šerohovatoj poverhnosti uprugogo tela*. Prikl. Mat. Meh., 27, 5 (1963). — [3] *Zavisimost koncentracii naprjaženij ot kacestva obrabotki poverhnosti detalej*. Izv. OTN, Meh. Maš., 5 (1963). — [4] *Osnovnye uravnenija teorii nesimmetričnoj uprugosti*. Prikl. Mat. Meh., 28, 3 (1964). — [5] *Naprjažennoe sostojanie v slučajno neodnorodnom tele*. 2 Vsesojuznyi sjezd po mehanike, Annot. dokladov, Moscova, 1964. — [6] *Ploskaja zadača nesimmetričnoj teorii uprugosti*. Prikl. Mat. Meh., 28, 6 (1964).
- PANASIUK, V. V. — [1] *Rozvitok triščini, iaka v plani mae formu elipsa*. Prikladna Mehanika, 6, 1 (1960). — [2] *Pro odnu prostorovu zadaču teorii prujnosti dlja izotropnogo tila z elliptičnoju triščinoju*. Prikladna Mehanika, 8, 3 (1962). — [3] *O razrušenii hrupkih tel pri ploskom naprjažennom sostojanii*. Prikladnaja Mehanika, 1, 9 (1965).
- PANOVKO, JA. G., GUBANOVA, I. I. — [1] *Ustojčivost i kolebanija uprugih sistem*. Izd-vo Nauka, Moscova, 1964.
- PAPKOVIČ, P. F. — [1] *Solution générale des équations différentielles fondamentales de l'élasticité, exprimée par trois fonctions harmoniques*. C.R. Ac. Sci., 195 (1932). — [2] *Expressions générales des composantes des tensions, ne renfermant comme fonctions arbitraires que des fonctions harmoniques*. C.R. Ac. Sci., 195 (1932). — [3] *Obzor nekotoryh obščih rešenij osnovnyh differencialnyh uravnenij pokoja izotropnogo uprugogo tela*. Prikl. Mat. Meh., 1, 1 (1937). — [4] *Teorija uprugosti*. Oborongiz, Moscova, 1939.
- PATER, A. D. de — [1] *On the reciprocal pressure between two elastic bodies*. Rolling contact phenomena, North Holland, Amsterdam, 1963.
- PAYNE, L. E. — [1] *On axially symmetric punch, crack and torsion problems*. Journ. Soc. industr. and appl. math., 1, 1 (1953). — [2] *Upper and lower bounds for the center of flexure*. Journ. Res. Nat. Bur. Standards, B, 64, 2 (1960).
- PAYNE, L. E., WEINBERGER, H. F. — [1] *New bounds in harmonic and biharmonic problems*. Journ. Math. Phys., 33, 4 (1955). — [2] *Bounds for solutions of second order elliptic equations in terms of arbitrary vector fields*. Arch. Rat. Mech. Anal., 20, 2 (1965).
- PEARSON, C. E. — [1] *Remarks on the centre of shear*. ZAMM, 36, 3–4 (1956). — [2] *Theoretical elasticity*. Cambridge (Mass.), 1959.
- PELEH, B. L. — [1] *K opredeleniju koeficientov koncentracii pri izgibe plit s otverstijami*. Prikladnaja mehanika, 7 (1965).
- PEREHVATOV, V. K. — [1] *K rasčetu naprjaženij v balkah-stenkah metodom N.I. Muskhelišvili pri pomošči elektromodelirovanija konformnogo preobrazovanija*. Trudy 1 mezvuzovsk. konf. po električ. modelirovaniju zadač stroit. meh., sopr. mat. i teorii uprugosti. B.M., Novočerkasskij Polit. Inst., 1960.
- PERLIN, P. I. — [1] *Ob odnom metode rešenija osnovnyh prostranstvennyh zadač teorii potencijala i teorii uprugosti dlja oblastej, ograniceennyh dvumja zamknutymi poverhnostjami*. Inž. Žurn., 4, 1 (1964).
- PETROVSKIJ, I. G. — [1] *Lekcii ob uravnenijah s častnymi proizvodnymi*. Gostehizdat, Moscova, 1953.
- PFEIFFER, F. — [1] *Elastokinetik*. Handbuch d. Physik, (1), 6, Springer, Berlin, 1928.
- PIPKIN, A. C., RIVLIN, R. S. — [1] *The formulation of constitutive equations in continuum physics (I)*. Arch. Rat. Mech. Anal., 4, 2 (1959).
- PÎRVU, A. — [1] *Problema plană a elasticității pentru o coroană circulară în cazul celei de a doua probleme fundamentale la limită*. St. Cerc. Mec. Ap., 7, 2 (1956).
- PISACANE, V. L., MALVERN, L. E. — [1] *Application of numerical mapping to the Muskhelishvili method in plane elasticity*. Journ. Appl. Mech., 30, 3 (1963).
- PIVOVAROV, A. M. — [1] *Koncentracija kasatelnyh naprjaženij pri kručenii prizmatičeskikh steržnej*. Prikl. Mat. Meh., 17, 2 (1953).
- PLANK, M. — [1] *Thermodynamik*. De Gruyter, Berlin, 1930.
- PLATRIER, G. — [1] *Mécanique rationnelle*. Dunod, Paris, 1954–1955.
- PLEMELJ, J. — [1] *Über lineare Randwertaufgaben der Potentialtheorie*. Monatshefte f. Math. u. Physik., 15 (1904). — [2] *Ein Ergänzungssatz zur Cauchyschen Integraldarstellung analytischer Funktionen, Randwerte betreffend*. Monatshefte f. Math. u. Physik, 19 (1908).
- POCHHAMMER, L. — [1] *Beitrag zur Theorie der Biegung des Kreiscylinders*. Journ. f. reine u. angew. Math., 81 (1876). — [2] *Über die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten kleiner Schwingungen in einem unbegrenzten isotropen Kreiscylinder*. Journ. f. reine u. angew. Math., 81 (1876).

- POINCARÉ, H. — [1] *Leçons sur la théorie de l'élasticité*. G. Carré, Paris, 1892.
- POL, B. van der, BREMMER, H. — [1] *Operational calculus based on the two-sided Laplace integral*. Cambridge, 1950.
- POLOŽIJ, G. N. — [1] *Variacionno-topologičeskie teoremy kraevykh zadač teorii kručenja valov peremennogo sečenija. Metod sohraneniya oblasti i mažorantnykh oblastej*. Izv. AN SSSR, serija mat., **19**, 3 (1955). — [2] *Pro deiaki teoremi porivniannia kraiovih zadač kručennia prizmatičnih steržniv*. Prikladna Mehanika, **1**, 4 (1955). — [3] *Pro odin metod rozviazannia zadač zginu prizmatičnih steržniv*. Prikladna Mehanika, **2**, 3 (1956). — [4] *Obobščenie teorii analitičeskikh funkcij kompleksnogo peremennogo*. Izd.-vo Univ. Kiev, 1965.
- POLSKIJ, N. I. — [1] *Proekcionnye metody v prikladnoj matematike*. Dokl. AN SSSR, **143**, 4 (1962). — [2] *Proekcionnye metody rešenija lineinykh zadač (rezumat)*. Uspehi Mat. Nauk., **18**, 2 (1963), p. 179.
- POLYA, G. — [1] *Torsional rigidity, principal frequency, electrostatic capacity, and symmetrization*. Quart. Appl. Math., **6**, 3 (1948).
- POLYA, G., SZEGÖ, G. — [1] *Isoperimetric inequalities in mathematical physics*. Princeton, 1951.
- POLYA, G., WEINSTEIN, A. — [1] *On the torsional rigidity of multiply connected cross-sections*. Ann. of Math., **52**, 2 (1950).
- POMPEIU, D. — [1] *Sur une classe de fonctions d'une variable complexe*. Rend. Palermo, **33** (1912). — [2] *Sur une classe de fonctions d'une variable complexe et sur certaines équations intégrales*. Rend. Palermo, **35** (1913).
- POPOV, E. P. — [1] *Nelineinye zadači statiki tonkih steržnej*. Gostehizdat, Moscova, 1948.
- POPOV, G. IA. — [1] *Ob odnom sposobe rešenija osesimmetričnykh kontaktnykh zadač teorii uprugosti*. Prikl. Mat. Meh., **25**, 1 (1961). — [2] *Kontaknaja zadača teorii uprugosti pri naličii krugovoj oblasti kontakta*. Prikl. Mat. Meh., **26**, 1 (1962).
- POPOV, G. IA., ROSTOVCEV, N. A. — [1] *Kontaktnye (smešannye) zadači teorii uprugosti*. Trudy 2 sjezda po mehanike, vol. 3, Izd.-vo Nauka, Moscova, 1966.
- PORITSKY, H. — [1] *Stresses and deflections of cylindrical bodies in contact with application to contact of gears and of locomotive wheels*. Journ. Appl. Mech., **17**, 2 (1950). — [2] *Stress fields of axially symmetric shafts in torsion and related fields*. Proc. Symp. Appl. Math., **3** (1950).
- PORITSKY, H., DANFORTH, C. E. — [1] *On the torsion problem*. Proc. III U.S. Nat. Congr. Appl. Mech., Pergamon Press, 1958.
- PORITSKY, H., JERRARD, R. P. — [1] *Calculus of elastic displacements from photoelastic curves*. Journ. Appl. Mech., **20**, 3 (1953).
- PRAGER, W. — [1] *The theory of plasticity: a survey of recent achievements*. Proc. Inst. Mech. Eng., **169**, 21 (1955). — [2] *Einführung in die Kontinuumsmechanik*. Birkhäuser Verlag, Basel, 1961.
- PRAGER, W., HODGE, PH. G. — [1] *Theory of perfectly plastic solids*. J. Wiley, New York, 1951.
- PRAGER, W., SYNGE, J. L. — [1] *Approximations in elasticity based on the concept of function space*. Quart. Appl. Math., **5**, 3 (1948).
- PRANDTL, L. — [1] *Zur Torsion von prismatischen Stäben*. Phys. Zeitschrift, **4** (1903). — [2] *Eine neue Darstellung der Torsionsspannungen bei prismatischen Stäben von beliebigem Querschnitt*. Jahresberichte d. deutschen Math. Verein., **13** (1904).
- PREDELEANU, M. — [1] *On spatial contact problem in the linear creep theory*. Bull. Math. Soc. Sci. Mat. Phys. RPR, **6**, 3–4 (1962).
- PRIGOGINE, J. — [1] *Etude thermodynamique des phénomènes irréversibles*. Dunod, Paris, 1947.
- PRIVALOV, I. I. — [1] *Graničnye svojstva odnoznačnykh analitičeskikh funkcij*. Gostehizdat, Moscova, 1950. — [2] *Vvedenie v teoriju funkcij kompleksnogo peremennogo*. Gostehizdat, Moscova, 1954.
- PROKOPOV, V. K. — [1] *K zadače o stesennom kručeniі prizmatičeskikh steržnej*. Naučno-inform. bjull. Leningr. Polt. In-ta, **3** (1959). — [2] *Primenenie simboličeskogo metoda k vyvodu uravnenij teorii plit*. Prikl. Mat. Meh., **29**, 5 (1965).
- PUHOV, G. E. — [1] *Električeskoe modelirovanie steržnevych i tonkostennykh konstrukcij*. Izd.-vo AN USSR, Kiev, 1956.
- QUINLAN, P. M. — [1] *The torsion of an irregular polygon*. Proc. Roy. Soc., (A), **282** (1964).

- RABINOVICH, I. M. — [1] *Steržnevye sistemy minimalnogo vesa*. Trudy 2 sjezda po mehanike, vol. 3, Nauka, Moscova, 1966.
- RABINOVICH, I. S. — [1] *K rešeniju zadač o kontakte cilindrov s parallelnymi osjami*. Izv. OTN, 10 (1958). — [2] *Kontaktnoe szatie dvuh uprugih konusov*. Mehanika, 1 (1965).
- RABOTNOV, JU. N. — [1] *Plastinki i oboločki*. Mehanika v SSSR za 30 let, Gostehizdat, Moscova, 1950. — [2] *Soprotivlenie materialov*. Fizmatgiz, Moscova, 1962.
- RADOK, J.R.M. — [1] *On the solution of problems of dynamic plane elasticity*. Quart. Appl. Math., 14, 3 (1956). — [2] *Ploskie zadači linejnoj teorii vjazkouprugosti*. Sb. „Problemy mehaniki splošnoj sredy“, Akademkniga, Moscova, 1961. — [3] *Complex variable and direct variational methods*. Applic. Theory of functions in continuum mechanics, vol. 1, Nauka, Moscova, 1965.
- RAYLEIGH, Lord (J. W. Strutt) — [1] *Theory of sound*. Mac-Millan, London, 1894–1896.
- REINER, M. — [1] *Rheology*. Handbuch d. Physik, (2), 6, Springer, 1958.
- REISS, E. L., LOCKE, S. — [1] *On the theory of plane stress*. Quart. Appl. Math., 19, 3 (1961).
- REISSNER, E. — [1] *On the theory of bending of elastic plates*. Journ. Math. Phys., 23 (1944). — [2] *The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates*. Journ. Appl. Mech., 12 (1945). — [3] *On bending of elastic plates*. Quart. Appl. Math., 5, 1 (1947). — [4] *On a variational theorem in elasticity*. Journ. Math. Phys., 29, 2 (1950). — [5] *On non-uniform torsion of cylindrical rods*. Journ. Math. Phys., 31, 3 (1952). — [6] *On torsion with variable twist*. Österr. Ingenieur-Archiv, 9, 2–3 (1955). — [7] *Note on torsion with variable twist*. Journ. Appl. Mech., 23, 2 (1956). — [8] *On variational principles in elasticity*. Proc. Symp. Appl. Math., 8 (1958). — [9] *O nekotoryh variacionnyh teoremah teorii uprugosti*. Sb. „Problemy mehaniki splošnoj sredy“, Akademkniga, Moscova, 1961.
- REISSNER, E., SAGOCCHI, H. F. — [1] *Forced torsional oscillations of an elastic half-space*. Journ. Appl. Phys., 15 (1944).
- REITMAN, M.I., ŠAPIRO, G.S. — [1] *Teorija optimalnogo proektirovanija v stroitelnoj mehanike, teorii uprugosti i plastičnosti*. Itogi Nauki, V.I.N.I.T.I., Moscova, 1966.
- REYNOLDS, R.R. — [1] *The Dirichlet problem for multiply-connected domains*. Journ. Math. Phys., 30, 1 (1951).
- RIBIÈRE, M. — [1] *Sur la flexion des pièces épaisses*. C.R. Ac. Sci., 126 (1898). — [2] *Sur la résistance des massifs épais*. C.R. Ac. Sci., 126 (1898).
- RIEKEP, P. — [1] *Tafeln der Elastizitätskonstanten und Festigkeitszahlen*. Handbuch d. Physik, (1), 6, Springer, Berlin, 1928.
- RIESZ, M. — [1] *Intégrales de Riemann-Liouville et potentiels*. Acta Sci. Math. Szeged., 9 (1938).
- RIVLIN, R. S. — [1] *Some topics in finite elasticity*. Structural mechanics, Pergamon Press, 1960. — [2] *The formulation of constitutive equations in continuum physics*. Arch. Rat. Mech. Anal., 4, 3 (1960).
- ROKVA, J. P. — [1] *Ob approksimacii rešenij integralnyh uravnenij ploskoj teorii uprugosti*. Soobščeniya AN Gruz. SSR, 35, 1 (1964).
- ROMALIS, B. L. — [1] *Kontaktnaja zadača o szatii uprugih cilindrov, napravljajuščie kotoryh imejut prjamolinejnye učastki*. Izv. OTN, Meh. Maš., 2 (1962). — [2] *Nekotorye slučai ploskoj kontaktnoj zadači*. Sb. „Rasčety na pročnosť“, 10, Moscova, 1964.
- RONGVED, L. — [1] *Force at a point in the interior of a semi-infinite solid with fixed boundary*. Journ. Appl. Mech., 22, 4 (1955).
- ROSENFELD, R. L., MIKLOWITZ, J. — [1] *Wave fronts in elastic rods and plates*. Proc. IVth U.S. Nat. Congr. Appl. Mech., Pergamon Press, New York, 1962. — [2] *Elastic wave propagation in rods of arbitrary cross-section*. Journ. Appl. Mech. 32, 2 (1965).
- ROSTOVCEV, N. A. — [1] *K rešeniju ploskoj kontaktnoj zadači*. Prikl. Mat. Meh., 17, 1 (1953). — [2] *Kompleksnye funkții naprjaženija v osesimmetričnoj kontaktnoj zadače teorii uprugosti*. Prikl. Mat. Meh., 17, 5 (1953). — [3] *K zadače o kručenii uprugogo poluprostranstva*. Prikl. Mat. Meh., 19, 1 (1955). — [4] *Kompleksnye potencijaly v zadače o štampe, kruglom v plane*. Prikl. Mat. Meh., 21, 1 (1957). — [5] *Zamečaniya k rabote „Nekotorye kontaktnye zadači teorii uprugosti i drobnoe differencirovanie“*. Prikl. Mat. Meh., 23, 4 (1959). — [6] *O nekotoryh rešenijah integralnogo uravnenija teorii linejno deformiruемого osnovanija*. Prikl. Mat. Meh., 23, 1 (1964). — [7] *K teorii uprugosti neodnorodnoj sredy*. Prikl. Mat. Meh., 23, 4 (1964).
- ROY, M. — [1] *Mécanique des milieux continus et déformables*. Gauthier-Villars, Paris, 1950. — [2] *Thermodynamique macroscopique*. Dunod, Paris, 1964.

- RUDAKOV, Z. Z. — [1] *O perekatyvanii uprugih tel pri postojannom i peremennom koefficiente trenija v uslovijah prostranstvennoj zadači teorii uprugosti*. Izv. OTN, Meh. Maš., 3 (1960).
- RÜDIGER, D. — [1] *Eine Verallgemeinerung des Prinzips vom Minimum der potentiellen Energie elastischer Körper*. Ingenieur Archiv, 27 (1960). — [2] *Eine Verallgemeinerung des Prinzips vom Minimum der potentiellen Energie zweidimensionaler elastischer Kontinua*. Ingenieur Archiv, 29, 2 (1960).
- RUSHTON, K. R. — [1] *Electrical analogue solutions of elastic-plastic torsion for shafts containing structural discontinuities*. Journ. Mech. Phys. Solids, 11, 4 (1963).
- RVAČEV, V. L. [1] *Davlenie na uprugoe poluprostranstvo štampa imejuščego v plane formu polosy*. Prikl. Mat. Meh., 20, 2 (1956). — [2] *K rasčetu beskonečnoj balki, ležaščej na uprugoe poluprostranstvo*. Prikl. Mat. Meh., 20, 5 (1956). — [3] *K zadače o davlenii na uprugoe poluprostranstvo štampa s ploskim osnovaniem*. Prikl. Mat. Meh., 21, 3 (1957). — [4] *O davlenii na uprugoe poluprostranstvo štampa, imejuščego v plane formu klina*. Prikl. Mat. Meh., 23, 1 (1959). — [5] *O davlenii pod beskonečnoj balkoj, ležaščej na uprugoe poluprostranstvo*. Prikl. Mat. Meh., 23, 2 (1959).
- RYŽIK, I. M., GRADŠTEIN, L. S. — [1] *Tablicy integralov, summ, rjadov i proizvedenij*. Gostehizdat, Moscov, 1951.
- SAINT-VENANT, B. de — [1] *Mémoire sur la torsion des prismes, avec des considérations sur leur flexion*. Mém. prés. par div. savants étrangers à l'Acad. des Sci., 14 (1855). — [2] *Mémoire sur la flexion des prismes*. Journ. Math. pures appl., (2), 1 (1856). — [3] *Sur une formule donnant approximativement le moment de torsion*. C. R. Ac. Sci., 88 (1879). — [4] *Memuar o kručenii prizm. Memuar ob izgibe prizm*. Fizmatizdat, Moscov, 1961.
- SALGANIK, R. L. — [1] *Ob ocenke ošibki, soveršennoj pri perehode ot točnyh uravnenij teorii uprugosti k uravnenijam ploskogo naprjažennogo sostojanija*. Prikl. Mat. Meh., 23, 4 (1964).
- ȘANDRU, N. — [1] *O sosredotočennyh vnutrennih nagruzkah v uprugom poluprostranstve s zakreplennymi krajami*. Bull. Math. Soc. Sci. Math. Phys. RPR, 5, 3–4 (1961). — [2] *Asupra unei forțe concentrate în spațiul elastic nemărginit*. Comunicările Acad. RPR 13, 12 (1963). — [3] *Despre reprezentarea complexă a soluției elastodinamicii plane*. Analele Univ. București, 14, 1 (1965).
- ŠAPIRO, G. S. — [1] *Naprjaženija u otverstija v beskonečnom kline*. Trudy Leningr. Polit. In-ta, 3 (1941). — [2] *Prostranstvennye zadači teorii uprugosti*. Sb. „Mehanika v SSSR za 30 let“, Gostehizdat, Moscov, 1950.
- SARKISJAN, M. S. — [1] *Izgib prizmatičeskogo sterznja dvulavrovogo poperečnogo sečenija*. Izv. AN Arm. SSR, 9, 7 (1956).
- SAVIN, G. N. — [1] *Koncentracija naprjaženij okolo otverstij*. Gostehizdat, Moscov, 1951. — [2] *Osnovy ploskoj teorii nesimmetričnoj uprugosti*. (kurs lito). Izd-vo Univ. Kiev, 1965.
- SAVIN, G. N., RVAČEV, V. L. — [1] *Pro peremiščennia pid zoseredjenoju siloju*. Prikladna Mehanika, 10, 2 (1964).
- SCHAEFFER, H. — [1] *Die Spannungsfunktion des dreidimensionalen Kontinuums und des elastischen Körpers*. ZAMM, 33, 10–11 (1953).
- SCHIFFER, M. — [1] *Applications of variational methods in the theory of conformal mapping*. Proc. Symp. Appl. Math., 8 (1958).
- SCHILE, R. D., SIERAKOWSKI, R. L. — [1] *On the Saint-Venant problem for a non-homogeneous elastic material*. Quart Appl. Math., 23, 1 (1965).
- SCHUMANN, W. — [1] *Sur les différentes formes du principe de B. de Saint-Venant*. C.R. Ac. Sci., 238 (1954). — [2] *Theoretische und experimentelle Untersuchungen über das de Saint-Venantsche Prinzip, speziell mit Anwendung auf die Plattentheorie*. Dissertation, Techn. Hochschule Zürich, ETH Prom., Nr. 2420 (1955).
- SCHWARTZ, L. — [1] *Théorie des distributions*. Hermann, Paris, 1957 — [2] *Méthodes mathématiques pour les sciences physiques*. Hermann, Paris, 1961.
- SCHWARZ, M. J. de — [1] *Über das Verhalten der Torsionsfunktion in der Nähe von einspringenden Ecken massiver und hohler Stäbe*. Österreich. Ingenieur-Archiv, 7, 2 (1953).
- SEDOV, L. I. — [1] *Ob osnovnyh principah mehaniki splošnoj sredy*. Izd-vo Univ. Moscov, 1961. — [1] *Vvedenie v mehaniku splošnoj sredy*. Fizmatgiz, Moscov, 1962.
- SEGER, A. — [1] *Theorie der Gitterfehlstellen*. Handbuch d. Physik, (2), 7, parte 1, Springer, Ber.in, 1955.
- SEEWALD, F. — [1] *Die Spannungen und Formänderungen von Balken mit rechteckigem Querschnitt*. Abhandl. aus dem Aerodyn. Inst. an der techn. Hochschule, Aachen, 7 (1929).

- SEIDEL, W. — [1] *Über die Ränderzuordnung bei konformen Abbildungen*. Math. Ann., **104** (1931).
- SEREBRENNIKOVA, I. I. — [1] *Pro zgin porožnistih steržniv*. Prikladna Mehanika, **6**, 3 (1960).
- ŠEREMETJEV, M. P. — [1] *Uprugoe ravnovesie elliptičeskogo kolca*. Prikl. Mat. Meh., **17**, 1 (1953).
- ŠEREMETJEV, M. P., PELEH, B. L. — [1] *K postroeniju utočnennoi teorii plastin*. Inž. Žurn., **4**, 3 (1964).
- ŠERMAN, D. I. — [1] *Ob odnoj zadače teorii uprugosti*. Dokl. AN SSSR, **27**, 9 (1940). — [2] *K rešeniju ploskoj statičeskoj zadači teorii uprugosti pri zadannyh na granice smeščenijah*. Dokl. AN SSSR, **27**, 9 (1940). — [3] *K rešeniju ploskoj statičeskoj zadači teorii uprugosti pri zadannyh vnešnih silah*. Dokl. AN SSSR, **28**, 1 (1940). — [4] *Smešannaja zadača statičeskoj teorii uprugosti dlja ploskih mnogosvjaznyh oblastej*. Dokl. AN SSSR, **28**, 1 (1940). — [5] *Prostranstvennaja statičeskaja zadača teorii uprugosti s zadannymi smeščenijami na granice*. Prikl. Mat. Meh., **7**, 5 (1943). — [6] *Osnovnye ploskie i kontaktne (smešannye) zadači statičeskoj teorii uprugosti*. „Mehanika v SSSR za 30 let“, Gostehizdat, Moscov, 1950. — [7] *Pro odin metod rozviazannia delakih zadač krucennia, zginu i ploskoj teorii pružnosti dlja neodnozviaznyh oblastej*. Prikladna Mehanika, **3**, 4 (1957). — [8] *Metod integralnyh uravnenij v ploskih i prostranstvennyh zadačah teorii uprugosti*. Trudy Vsesoiuznogo sjezda po mehanike, Akademkniga, Moscov, 1962. — [9] *Kručenie i izgib polyh prizmatičeskikh tel*. Izd-vo Nauka, Moscov, sub tipar.
- SERRIN, J. — [1] *The derivation of stress-deformation relations for a Stokesian fluid*. Journ. Math. Mech., **8**, 4 (1959).
- SETH, B. R. — [1] *Some recent applications of the theory of finite elastic deformations*. Proc. Symp. Appl. Math., **3** (1950).
- SHIELD, R. T., DRUCKER, D. C. — [1] *The application of limit analysis to punch-indentation problems*. Journ. Appl. Mech., **20**, 3 (1953).
- SIGNORINI, A. — [1] *Questioni di elasticità non linearizzata e semilinearizzata*. Rend. Mat. e applic., **18**, 1–2 (1959). — [2] *Questioni di elasticità non linearizzata*. Rend. Mat. e applic., **19**, 1–2 (1960). — [3] *Questioni di elasticità non linearizzata*. Cremonese, Roma, 1960.
- ŠIRJAEV, E. A. — [1] *O kručenii kruglogo brusa s treščinoj po duge okružnosti ili po radiusu*. Prikl. Mat. Meh., **20**, 4, (1956). — [2] *Kručenie kruglogo brusa s dvumja vyrezami*. Prikl. Mat. Meh., **22**, 4 (1958).
- SLOBODJANSKIJ, M. G. — [1] *Obščie formy rešenij uravnenij uprugosti dlja odnosvjaznyh i mnogosvjaznyh oblastej, vyražennye čerez garmoničeskie funkci*. Prikl. Mat. Meh., **18**, 1 (1954). — [2] *Ob obščih i polnyh formah rešenij uravnenij uprugosti*. Prikl. Mat. Meh., **23**, 3 (1959). — [3] *Nekotorye ocenki v statičeskoj zadače teorii uprugosti*. Trudy Mosk. Energ. In-ta, **32** (1959). — [4] *Ulučšenie nekotoryh ocenok dlja naprjaženij v zadačah teorii uprugosti*. Mehanika, **1** (1965).
- SMIRNOV, V. I. — [1] *Über die Ränderzuordnung bei konformer Abbildung*. Math. Ann., **107** (1933). — [2] *Kurs vysšej matematiki*. Gostehizdat, Moscov, 1951.
- SMITH, J. O., CHANG KENG LIN — [1] *Stresses due to tangential and normal loads on an elastic solid with application to some contact stress problem*. Journ. Appl. Mech., **20**, 2 (1953).
- SNEDDON, I. N. — [1] *Fourier transforms*. McGraw-Hill, New York, 1951. — [2] *Functional analysis*. Handbuch d. Physik, (2), **2**, Springer, Berlin, 1955. — [3] *Dual equations in elasticity*. Applic. theory of functions in continuum mechanics, vol. 1, Nauka, Moscov, 1965. — [4] *The relation between load and penetration in the axysymmetric Boussinesq problem for a punch of arbitrary profile*. Internat. Journ. Engng. Sci., **3**, 1 (1965).
- SNEDDON, I. N., BERRY, D. S. — [1] *The classical theory of elasticity*. Handbuch d. Physik, (2), **6**, Springer, Berlin, 1958.
- SOBOLEV, S. L. — [1] *Algorifm Švarca v teorii uprugosti*. Dokl. AN SSSR, **13**, 6 (1936). — [2] *Nekotorye primenenija funkcionalnogo analiza v matematičeskoj fizike*. Izd-vo Univ. Leningrad, 1950. — [3] *Uravnenija matematičeskoj fiziki*. Gostehizdat, Moscov, 1954.
- SOKOLNIKOFF, I. S. — [1] *On a solution of Laplace's equation with an application to the torsion problem for a polygon with reentrant angles*. Trans. Amer. Math. Soc., **33** (1931). — [2] *The mathematical theory of elasticity*. McGraw-Hill, New York, 1956.
- SOKOLNIKOFF, I. S., SOKOLNIKOFF, E. S. — [1] *Torsion of regions bounded by circular arcs*. Bull. Amer. Math. Soc., **44** (1938).
- SOLJANIK-KRASSA, K. V. — [1] *Kručenie valov peremennogo sečenija*. Gostehizdat, Moscov, 1949. — [2] *Funkcii naprjaženija osesimetričnoj zadači teorii uprugosti*. Prikl. Mat. Meh., **21**, 2 (1957). — [3] *Uprugoe ravnovesie tel vraščenija*. Inž. Sbornik, **26** (1958).

- SOLOMON, L. — [1] *Funcții-potențial de deplasare pentru ecuațiile echilibrului elastic*. Bul. șt. Acad. R.P.R., **9**, 2 (1957). — [2] *Funcții-potențial de deplasare pentru ecuațiile dinamice ale lui Lamé*. Comunicările Acad. R.P.R., **8**, 10 (1958). — [3] *Sur les rapports entre les constantes de Prandtl, la rigidité géométrique à la torsion et la fonction de Green*. Bull. Math. Soc. Sci. Math. Phys. RPR, **2**, 3 (1958); **4** (1958). — [4] *Tensorul lui Green pentru ecuațiile lui Lamé*. Analele Univ. București, **25** (1960). — [5] *Quelques remarques sur le problème du contact élastique*. C. R. Ac. Sci., **250** (1960). — [6] *Nekotorye zamečanija po povodu zadači Gerca*. Izv. OTN, Meh. Maš., **3** (1960). — [7] *Despre gradul de arbitrar în determinarea funcțiilor lui Papkovici*. Comunicările Acad. R. P. R., **11**, 9 (1961). — [8] *În legătură cu problema lui Saint-Venant (I—IV)*. Comunicările Acad. RPR, **11**, 7 și 11 (1961); **12**, 1 (1962). — [9] *Some remarks on Saint-Venant's problem*. Archiwum Mech. Stos., **14**, 5 (1962). — [10] *Despre stabilirea formulelor lui Kolosov-Mushelishvili*. Analele Univ. București, **40** (1963). — [11] *Une solution approchée du problème du poinçon à base plane bornée convexe non-elliptique*. C.R. Ac. Sci., **258** (1964). — [12] *Upon the geometrical punch-penetration rigidity*. Rend. Lincei, **36**, 6 (1964). — [13] *Upon the paradoxal character of the solutions of Kelvin-Somigliana and Kolossoff-Mushelishvili in the plane elasticity*. Rend. Lincei, **37**, 1—2 (1964). — [14] *Elasticité linéaire*. Masson, Paris, 1968.
- SOLOMON, L., DRĂGHICESCU, D. — [1] *Asupra utilizării transformărilor conforme în problema plană a elasticității pentru domenii dublu conexe*. St. Cere. Mec. Apl., **8**, 4 (1957).
- SOLOMON, L., ZAMFIRESCU, I. — [1] *Some approximate formulae and solutions in the contact problem for punches with a plane bounded non-elliptical basis*. Applications Theory of functions in continuum mechanics. Vol. 1, Nauka, Moscova, 1965.
- SOMIGLIANA, C. — [1] *Sopra l'equilibrio di un corpo elastico isotropo*. Il nuovo Cimento, (3), **17—19** (1885). — [2] *Sopra l'equilibrio di un corpo elastico isotropo limitato da una o due superficie sferiche*. Annali di Pisa, **4** (1887). — [3] *Sulle equazioni della elasticità*. Annali di mat. pura appl., (2), **17** (1889—90). — [4] *Formole generali per la rappresentazione di un campo di forza per mezzo di forze elastiche*. Rend. R. Ist. Lombardo di Sci. et Lett., (2), **23**, 20 (1890). — [5] *Sul principio delle immagini di Lord Kelvin e le equazioni dell'elasticità*. Rend. Lincei, (5), **11**, 1 (1902).
- SOMMERFELD, A. — [1] *Mechanik der deformierbaren Medien*. Geest u. Portig, Leipzig, 1949. — [2] *Thermodynamik und Statistik*, Wiesbaden, 1952.
- SOOS, E. — [1] *Despre problema lui Saint-Venant în cazul unui material anizotrop și neomogen*. Analele Univ. București, **40** (1963).
- SOROKA, W. W. — [1] *Simulation in science and technology*. Appl. Mech. Rev., **13**, 9 (1960).
- SOUTHWELL, R. V. — [1] *On Castigliano's theorem of least work and the principle of Saint-Venant*. Phil. Mag., **45** (1923). — [2] *Castigliano's principle of minimum strain-energy*. Proc. Roy. Soc. London, (A), **154** (1936). — [3] *An introduction to the theory of elasticity for engineers and physicists*, Oxford, 1941.
- SRETENSKIJ, L. N. — [1] *Teoria njutonovskogo potencijala*. Gostehizdat, Moscova, 1946.
- ŠTAERMAN, I. JA. — [1] *Kontaktnye zadači teorii uprugosti*. Gostehizdat, Moscova, 1949. — [2] *Szatié uprugih tel, soprikasaiuščihsja po prjamolineinomu otrezku*. Sb. „Problemy mehaniki splošnoj sredy”, Akademkniga, Moscova, 1961.
- STAKGOLD, I. — [1] *The Cauchy relations in a molecular theory of elasticity*. Quart. Appl. Math., **8**, 2 (1950).
- STĂNESCU, C. — [1] *Metoda Mushelishvili în mișcările plane ale fluidelor viscoase incompresibile*. Bul. șt. Acad. RPR, **9**, 2 (1957). — [2] *O problemă de tip mixt din încovoierea plăcilor elastice*. St. Cere. Mec. Apl., **9**, 2 (1958).
- STĂNESCU, C., DUMITRESCU, L. — [1] *Torsiunea barelor cilindrice prevăzute cu canal de pană*. Comunicările Acad. RPR, **8**, 6 (1958).
- STERNBERG, E. — [1] *On Saint-Venant's principle*. Quart. Appl. Math., **11**, 4 (1954). — [2] *Three-dimensional stress concentrations in the theory of elasticity*. Appl. Mech. Rev., **11**, 1 (1958). — [3] *On the integration of the equations of motion in the classical theory of elasticity*. Arch. Rat. Mech. Anal., **6**, 1 (1960). — [4] *On some recent developments in the linear theory of elasticity*. Structural mechanics, Pergamon Press, 1960.
- STERNBERG, E., AL-KHOZAI, S. — [1] *On Green's functions and Saint-Venant's principle in the linear theory of elasticity*. Arch. Rat. Mech. Anal., **15**, 2 (1964).

- STERNBERG, E., EUBANKS, R. A. — [1] *On the singularity at a concentrated load applied to a curved surface*. Proc. IInd U. S. Nat. Congr. Appl. Mech., Pergamon Press, 1954. — [2] *On the concept of concentrated loads and an extension of the uniqueness theorem in the linear theory of elasticity*. Journ. Rat. Mech. Anal., **4**, 1 (1955).
- STERNBERG, E., GURTIN, M. E. — [1] *On the completeness of certain stress functions in the linear theory of elasticity*. Proc. IV U. S. Nat. Congr. Appl. Mech., Pergamon Press, 1962.
- STERNBERG, E., ROSENTHAL, F. — [1] *The elastic sphere under concentrated loads*. Journ. Appl. Mech., **19**, 4 (1952).
- STEVENSON, A. C. — [1] *Flexure with shear and associated torsion in prisms of uni-axial and asymmetric cross-sections (I, II)*. Phil. Trans. Roy. Soc. London, (A), **237** (1938). — [2] *Some boundary problems in two-dimensional elasticity*. Phil. Mag. (7), **34** (1943). — [3] *Complex potentials in two-dimensional elasticity (I, II)*. Proc. Roy. Soc. London, (A), **184** (1945).
- STOILLOV, S. (vol. 2 — în colab. cu ANDREIAN-CAZACU, C.) — [1] *Teoria funcțiilor de o variabilă complexă*. Edit. tehnică și Edit. Academiei, București, 1954—1958.
- SUHH, L. I. — [1] *K opredeleniju optimalnoj formy prodolnoj vytočki pri kručenii valov*. Izv. OTN, Meh. Maš., **2** (1963).
- SUPPER, H. — [1] *Photoélasticité et apsidométrie*. Publ. Sci. Techn. Min. de l'Air, **106**, Paris, 1937.
- SWAINGER, K. — [1] *Analysis of deformation*. Vol. 4: *Waves and vibration*. Chapman and Hall, London, 1959.
- SYNGE, J. L. — [1] *The hypocircle in mathematical physics*. Cambridge, New York, 1957.
- SYNGE, J. L., CAHILL, W. F. — [1] *The torsion of a hollow square*. Quart. Appl. Math., **15**, 3 (1957).
- TAKANO, R. — [1] *Analiza, prin intermediul unui concentrator de rezistență, a cazului contactului triunghiular (lb. japoneză)*. Lucrările congresului IV al Uniunii electrotehnice din Japonia.
- TANG LI-MIN, SUN HWAN-CHUN — [1] *Three-dimensional elasticity problems solved by complex variable method*. Scientia Sinica, **12**, 11 (1963).
- TANII, T., TAKANO, R., MIKI, Y. — [1] *Constriction resistance of electrical contacts*. Review electric. comm. lab., Tokyo, **16**, 7—8 (1968).
- TANIMOTO, O. — [1] *The solution of the generalized Boussinesq-problem for elastic foundations*. Proc. V Japan Nat. Congr. Appl. Mech., 1955.
- TEDONE, O. — [1] *Saggio di una teoria generale delle equazioni dell'equilibrio elastico per un corpo isotropo*. Ann. di Mat. pura appl., (3), **8** (1903). — [2] *Allgemeine Theoreme der mathematischen Elastizitätslehre (Integrationstheorie)*. Encykl. Math. Wiss., **4**, partea 4, Teubner, Leipzig, 1907—1914.
- TEDONE, O., TIMPE, A. — [1] *Spezielle Ausführungen zur Statik elastischer Körper*. Encykl. Math. Wiss., **4**, partea 4, Teubner, Leipzig, 1907—1914.
- TELEMAN, S. — [1] *Metoda proiecției ortogonale și primele două probleme la limită din teoria elasticității*. Bul. șt. Acad. RPR, **7**, 1 (1955).
- TEODORESCU, N. — [1] *La dérivée aréolaire*. București, 1936.
- TEODORESCU, N., OLARU, V. — [1] *Ecuațiile fizicii matematice*. (Curs lito). Ed. didactică și pedagogică, București, 1963—1965.
- TEODORESCU, P. P. — [1] *Sur le problème du parallélépipède élastique*. Archivum Mech. Stos., **12**, 5—6 (1960). — [2] *Probleme plane în teoria elasticității*. Vol. 1. Edit. Academiei, București, 1961. — [3] *One hundred years of investigations in the plane problem of the theory of elasticity*. Appl. Mech. Rev., **17**, 3 (1964). — [4] *Probleme plane în teoria elasticității*. Vol. 2. Edit. Academiei, București, 1966. — [5] *Probleme spațiale în teoria elasticității*. Edit. Academiei, București, sub tipar.
- TEODOSIU, C. — [1] *Rezolvarea problemei plane a teoriei elasticității în cazul unor forțe masice oarecare*. St. Cerc. Mec. Apl., **13**, 6 (1962).
- THEOCARIS, P. S. — [1] *Moiré fringes: a powerful measuring device*. Appl. Mech. Rev., **15**, 5 (1962).
- TIFFEN, R. — [1] *An investigation of the transverse displacement equation of elastic plates theory*. The Quart. Journ. Mech. Appl. Math., **14**, 1 (1961).
- TIHONOV, A. N., SAMARSKIJ, A. A. — [1] *Uraveniia matematičeskoj fiziki*. Gostehizdat, Moscova, 1953.
- TIMOSHENKO, S. P. — [1] *Collected papers*. McGraw-Hill, New York, 1953. — [2] *History of strength of materials*. McGraw-Hill, New York, 1953.
- TIMOSHENKO, S. P., GERE, J. M. — [1] *Theory of elastic stability*. McGraw-Hill, New York, 1961.
- TIMOSHENKO, S. P., GOODIER, J. N. — [1] *Theory of elasticity*. McGraw-Hill, New York, 1951.
- TIMOSHENKO, S. P., WOINOWSKI-KRIEGER, S. — [1] *Theory of plates and shells*. McGraw-Hill, New York, 1959.

- TIRSKIJ, G. A. — [1] *Kručenje pologo steržnja, ograničenog krylovymi profiljami Žukovskogo.* Izv. OTN, Meh. Maš., 2 (1959).
- TODHUNTER, I., PEARSON, K. — [1] *A history of the theory of elasticity and of the strength of materials from Galilei to the present time.* Cambridge, 1886–1893.
- TOLOKONNIKOV, L. A. — [1] *Konečnye ploskie deformacii nesžimaemogo materiala.* Prikl. Mat. Meh., 23, 1 (1959).
- TOISTOV, G. P. — [1] *Rjady Fourier.* Gostehizdat, Moscova, 1951.
- TONOJAN, V. S. — [1] *Kručenje pologo prizmatičeskogo steržnja s poperečnym sečením v vide ellipsa s vytočkoy.* Izv. OTN, Meh. Maš., 1 (1961).
- TOPOLJANSKIJ, D. B. — [1] *O primenenii effektivnyh metodov konformnogo otobraženija k rešeniju odnoj zadači ob izgibe steržnej.* Prikl. Mat. Meh., 4, 2 (1940).
- TOUPIN, R. A. — [1] *Elastic materials with couple-stresses.* Arch. Rat. Mech. Anal., 11, 5 (1962). — [2] *Theories of elasticity with couple-stresses.* Arch. Rat. Mech. Anal., 17, 2 (1964). — [3] *Saint-Venant's principle.* Arch. Rat. Mech. Anal., 18, 2 (1965).
- TREFFTZ, E. — [1] *Über die Torsion prismatischer Stäbe von polygonalem Querschnitt.* Math. Ann., 82 (1921). — [2] *Über die Wirkung einer Abrundung auf die Torsionsspannungen in der inneren Ecke eines Winkelleisens.* ZAMM, 2 (1922). — [3] *Mathematische Elastizitätstheorie.* Handbuch d. Physik, (1), 6, Springer, Berlin, 1928. — [4] *Über den Schubmittelpunkt in einem durch eine Einzellast gebogenen Balken.* ZAMM, 15 (1935).
- TRUESDELL, C. A. — [1] *The mechanical foundations of elasticity and fluid dynamics.* Journ. Rat. Mech. Anal., 1 (1952); 2 (1953). — [2] *Hypoelasticity.* Journ. Rat. Mech. Anal., 4, 1 (1955) (Correction, 4, 6 (1955)). — [3] *The rational mechanics of materials: past, present, future.* Appl. Mech. Rev., 12, 2 (1959). — [4] *Invariant and complete stress functions for general continua.* Arch. Rat. Mech. Anal., 4, 1 (1959). — [5] *General and exact theory of waves in finite and elastic strain.* Arch. Rat. Mech. Anal., 8, 4 (1961). — [6] *Etapy razvitija ponjatija naprjaženija.* Sb. „Problemy mehaniki splošnoj sredy“, Akademkniga, Moscova, 1961. — [7] *Reactions of the history of mechanics upon modern research.* Proc. IVth U. S. Nat. Congr. Appl. Mech., Pergamon Press, 1962. — [8] *The meaning of Betti's reciprocal theorem.* Mathematics a. Math. Physics, (sect. B, Journ. Res. Nat. Bur. Standards), 67 B, 2 (1963).
- TRUESDELL, C. A., NOLL, W. — [1] *The non-linear field theories of mechanics.* Handbuch d. Physik, (2), 3, partea 3, Springer, Berlin, 1965.
- TRUESDELL, C. A., TOUPIN, R. A. — [1] *The classical field theories.* Handbuch d. Physik, (2), 3, partea 1, Springer, Berlin, 1960. — [2] *Static grounds for inequalities in finite strain of elastic materials.* Arch. Rat. Mech. Anal., 12, 1 (1963); 19, 5 (1965), p. 407.
- TSU TAO LOO — [1] *Effect of curvature on the Hertz theory for two circular cylinders in contact.* Journ. Appl. Mech., 25, 1 (1958).
- UFLJAND, Ja. S. — [1] *Kontaktnaja zadača teorii uprugosti dlja krugovogo v plane štampa, pri naličii sceplenija.* Prikl. Mat. Meh., 20, 5 (1956). — [2] *Integralnye preobrazovanija v zadačah teorii uprugosti.* Akademkniga, Moscova, 1963. — [3] *Parnye integralnye uravnenija v teorii uprugosti.* 2 Vsesoiuznyi sjezd po mehanike, Annotacii dokladov, Moscova, 1964.
- UGODČIKOV, A. G. — [1] *Rozrahnok na krucennia prizmatičnih izotropnih sterjnih z odnozviaznim poperečnim pererizom.* Prikladna Mehanika, 2, 1 (1956). — [2] *Krucennia porojnistih prizmatičnih sterjnih.* Prikladna Mehanika, 2, 2 (1956).
- USTINOV, Ju. A. — [1] *Rasčet naprjaženij v krugovom kolce.* Izv. OTN, Meh. Maš., 1 (1964).
- UTEŠEVA, V. I. — [1] *Približennye uravnenija dinamiki uprugogo steržnja krugovogo poperečnogo sečenija.* Izv. OTN, Meh. Maš., 4 (1963).
- VAHITOV, M. B. — [1] *K vypodu uravnenij ploskoj zadači teorii uprugosti v kosougolnyh koordinatah.* Izv. vyših učeb. zaved., Aviacionnaia tehnica, 1 (1964).
- VAJNBERG, D. V. — [1] *Mestnye naprjaženija v ploskom kolcevom diske ot dvuh sosredotocennyh sil.* Prikl. Mat. Meh., 13, 2 (1949).
- VAJNBERG, D. V., SINJAVSKIJ, A. L. — [1] *Metody čislennogo analiza v teorii uprugosti.* Trudy 2 sjezda po mehanike. Vol. 3, Nauka, Moscova, 1966.
- VAKULENKO, A. A. — [1] *O svjazjah meždu naprjaženijami i deformacijami v neuprugih sredah.* Sb. „Issledovanija po uprugosti i plastičnosti“, Izd-vo Univ. Leningrad, 1 (1961).
- VÁLCOVICI, V., BĂLAN, ȘT., VOINEA, R. — [1] *Mecanica teoretică.* Edit. tehnică, București, 1963.

- VALIRON, G. — [1] *Théorie des fonctions*. Masson, Paris, 1955. — [2] *Equations fonctionnelles*. Masson, Paris, 1950.
- VALLÉE-POUSSIN, Ch. de la — [1] *Leçons de mécanique analytique*. Gauthier-Villars, Paris, 1932.
- VALOV, G. M. — [1] *Ob osesimmetričnoj deformacii krugovogo cilindra konečnoj dliny*. Prikl. Mat. Meh., **26**, 4 (1962). — [2] *Rešenje smešannych zadač o kručenii beskonečnogo uprugogo cilindra metodom dualnyh integralnyh uravnenij, i differencirovaniem graničnyh uslovij*. Prikl. Mat. Meh., **29**, 3 (1965).
- VEKUA, I. N. — [1] *Obobščennye analitičeskie funkcii*. Fizmatgiz, Moscova, 1959. — [2] *Teorija tonkih pologih oboloček peremennoj tolščiny*. Trudy Tbilissk. Mat. In-ta, **30** (1965).
- VEKUA, I. N., MUSHELIŠVILI, N. I. — [1] *Metody teorii analitičeskikh funkcij v teorii uprugosti*. Trudy Vses. sjezda po mehanike, Akademkniga, Moscova, 1962.
- VEKUA, I. N., RUHADZE, A. K. — [1] *Zadača kručenja krugovogo cilindra, armirovannogo prodolnym krugovym steržnem*. Izv. AN SSSR, **3** (1933).
- VERMA, G. R. — [1] *Application of Dirac's delta function in isolated force problems of semi-infinite elastic solid of isotropic and non-isotropic materials*. ZAMM, **37**, 1–2 (1957).
- VERMEULEN, P. J., JOHNSON, K. L. — [1] *Contact of non-spherical elastic bodies transmitting tangential forces*. Journ. Appl. Mech., **31**, 2 (1964).
- VISARION, V. — [1] *Elemente pentru calculul plăcilor curbe subțiri elastice*. Edit. Academiei, București, 1961. — [2] *Stări de tensiune în teoria plăcilor curbe*. Edit. Academiei, București, 1967.
- VLASOV, B. F. — [1] *Ob uravnenijah teorii izgiba plastinok*. Izv. OTN, **12** (1957).
- VLASOV, V. V. — [1] *Metod načalnyh funkcij v osesimmetričnoj zadače teorii uprugosti*. Izv. OTN, Meh. Maš., **5** (1960).
- VLASOV, V. Z. — [1] *Uravnenija nerazryvnosti deformacii v krivolineinyh koordinatah*. Prikl. Mat. Meh., **8**, 4 (1944). — [2] *Tonkostennye uprugie steržni i oboločki s žestkim otkrytym profilem*. (Anexă la S. P. TIMOŠENKO, „Uslojčivost uprugih sistem”, Gostehizdat, Moscova, 1946.) — [3] *Obščaja teorija oboloček*. Gostehizdat, Moscova, 1949. — [4] *Metod načalnyh funkcij v zadačah teorii uprugosti*. Izv. OTN, **7** (1955).
- VOIGT, W. — [1] *Theoretische Studien über die Elastizitätsverhältnisse der Kristalle*. Abh. d. Königl. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, **34** (1887). — [2] *Lehrbuch der Kristallphysik*. Teubner, Berlin, 1910.
- VOLYNSKIJ, B. A., BUDMAN, V. E. — [1] *Modeli dlja rešenija kraevykh zadač*. Fizmatgiz, Moscova, 1960.
- VOLTERRA, V. — [1] *Sur l'équilibre des corps élastiques multiplement connexes*. Ann. Sci. Ecole Norm. Sup., (3), **24** (1907).
- VOLTERRA, V., VOLTERRA, E. — [1] *Sur les distorsions des corps élastiques*. Mém. Sci. Math., fasc. 147, Gauthier-Villars, Paris, 1960.
- VOROVIČ, I. I. — [1] *Nekotorye zamečanija k statje R. Salganika „Ob ocenke ošibki...”*. Prikl. Mat. Meh., **29**, 1 (1965).
- VRĂNCEANU, G. — [1] *Curs de geometrie analitică și proiectivă*. București, 1944–1945.
- WALSH, J. L. — [1] *Interpolation and approximation by rational functions in the complex domain*. Amer. Math. Soc., Colloquium publications, 1960.
- WANER, N. S., SOROKA, W. W. — [1] *Stress concentrations for structural angles in torsion by the conducting sheet analogy*. Proc. Soc. Exp. Stress Analysis, **11**, 1 (1953).
- WARSCHAWSKI, S. E. — [1] *Über das Randverhalten der Ableitung der Abbildungsfunktion bei konformer Abbildung*. Math. Zeitschrift, **35**, 3–4 (1932); **38** (1934). — [2] *Recent results in numerical methods of conformal mapping*. Proc. Symp. Appl. Math., **6** (1956).
- WASHIZU, K. — [1] *Bounds for solutions of boundary value problems in elasticity*. Journ. Math. Phys., **32**, 2–3 (1953). — [2] *A note on the condition of compatibility*. Journ. Math. Phys., **36**, 4 (1958).
- WASIUTINSKI, Z., BRANDT, A. — [1] *The present state of knowledge in the field of optimum design of structures*. Appl. Mech. Rev., **16**, 5 (1963).
- WEBER, C. — [1] *Die Lehre der Drehungsfestigkeit*. Forschungsarbeiten VDI, **65** (1921). — [2] *Die Drehungsfestigkeit von Stäben*. Forschungsarbeiten VDI, **66** (1922). — [3] *Spannungsfunktionen des dreidimensionalen Kontinuums*. ZAMM, **28** (1948).
- WEBER, C., GÜNTHER, W. — [1] *Torsionstheorie*. Vieweg, Braunschweig, 1958.
- WEINBERGER, H. F. — [1] *Upper and lower bounds for torsional rigidity*. Journ. Math. Phys., **32**, 1 (1953).

- WEINER, J. M. — [1] *A resisto-network solution for the torsion of hollow sections*. Journ. Appl. Mech., **20**, 4 (1953).
- WEINGARTEN, G. — [1] *Sulle superficie di discontinuità nella teoria della elasticità dei corpi solidi*. Rend. Lincei, (5), **10**, 1 (1901).
- WEINSTEIN, A. — [1] *The center of shear and the center of twist*. Quart. Appl. Math., **5**, 1 (1947).
— [2] *On cracks and dislocations in shafts under torsion*. Quart. Appl. Math., **10**, 1 (1952).
— [3] *New methods for the estimation of the torsional rigidity*. Proc. Symp. Appl. Math., **3** (1953).
- WERNITZ, W. — [1] *Friction at Hertzian contact with combined roll and twist*. Rolling contact phenomena, North Holland, 1963.
- WEYL, H. — [1] *Das asymptotische Verteilungsgesetz der Eigenschwingungen eines beliebig gestalteten elastischen Körpers*. Rend. Palermo, **39** (1915). — [2] *The method of orthogonal projections in potential theory*. Duke Math. Journ., **7** (1940).
- WIEGHARDT, K. — [1] *Über ein neues Verfahren, verwickelte Spannungsverteilungen in elastischen Körpern auf experimentellem Wege zu finden*. Mitteil. über Forsch. an den Geb. des Ing., **49** (1908).
- WILBUR, J. B., NORRIS, C. H. — [1] *Structural model analysis*. Handbook exper. stress anal. (M. Hetényi), McGraw-Hill, New York, 1950.
- WINSLOW, A. M. — [1] *Stress solutions for rectangular plates by conformal transformation*. The Quart. Journ. Mech. Appl. Math., **10** (1957).
- WOZNIAK, C. — [1] *On the solution of certain boundary value problems of torsion and bending of straight bars*. Archiwum Mech. Stos., **13**, 1 (1961).
- YU CHEN — [1] *Remarks on variational principles in elastodynamics*. Journ. Franklin Inst., **273**, 1 (1964).
- ZAHORSKI, S. — [1] *Equations of the theory of large elastic deformations in terms of the geometry of the undeformed body*. Archiwum Mech. Stos., **14**, 6 (1962).
- ZAKORKO, V. N., ROSTOVCEV, N. A. — [1] *K dinamičeskoj kontaktnoj zadače stacionarnyh kolebanij uprugogo poluprostranstva*. Prikl. Mat. Meh., **29**, 3 (1965).
- ZAMANSKY, M. — [1] *Introduction à l'algèbre et l'analyse modernes*. Dunod, Paris, 1958.
- ZAMFIRESCU, I. — [1] *La distribution d'équilibre sur un ellipsoïde à n dimensions*. Revue Roum. Math. pures appl., **9**, 9 (1964).
- ZANABONI, O. — [1] *Dimostrazione generale del principio di de Saint-Venant*. Rend. Lincei, (6), **25** (1937).
- ZAPALOWICZ, W. — [1] *Torsion of prismatical bars of regular polygonal cross-sections*. Archiwum Mech. Stos., **11**, 5 (1959).
- ZENER, C., KE TIN SUI, ARTMAN, R., THOMSON, D., TAKAHASHI, S., NOVIK, A. — [1] *Uprugost i neuprugost metallov*. Izd-vo Inostr. Lit., Moscova, 1954.
- ZIEGLER, H. — [1] *On the concept of elastic stability*. Advances in appl. mech. Vol. 4, McGraw-Hill, New York, 1956. — [2] *Some extremum principles in irreversible thermodynamic with application to continuum mechanics*. Progress in solid mechanics. Vol. 4, North Holland, Amsterdam, 1963.
- ZYGMUND, A. — [1] *Trygonometric series*. Cambridge, 1959.
- ZVOLINSKIJ, N. V. — [1] *Volnovye problemy teorii uprugosti splošnoj sredy*. Mehanika, 1 (1965).
- * * * — [1] *Symbols, units and nomenclature in physics*. International Union of pure and appl. physics, 1961.
- * * * — [1] *Terminologija teorii uprugosti, ispytaniij i mehaničeskikh svoistv materialov i stroitelnoj mehaniki*. Akademizdat, Moscova, 1952.

*Bun de tipar 30 VIII 1969. Hîrlie scris I A 70 × 100
de 80 g/m². Coli tipar 51. C. Z. pentru Bibliotecile
mari și mici 539.3 : 517*

Intreprinderea Poligrafică „INFORMAȚIA” Comanda
nr. 329. București, str. Brezoianu Nr. 23—25
Republica Socialistă România

